Практическое применение логарифмов в экономике

Непер Джон
(1550 - 1617)

Известный английский математик, шотландский барон. Математика и астрономия были его увлечениями, а не профессией. Непер вошел в историю математики как изобретатель логарифмов, составитель первой таблицы логарифмов, которой он посвятил 20 лет своей жизни. Параллельно с ним над составлением таблицы логарифмов работал другой любитель математики - И. Бюрги. Непер вывел несколько формул для решения сферических треугольников, сделал ряд других математических открытий. Любил заниматься составлением математических таблиц, которые упрощали процесс счета.

- Можно найти применение логарифмам не только в математике, но и в других областях науки, например, экономике, в частности, в банковском деле

Пример 1. Задача о вкладчике.

Пусть вкладчик положил в банк 10 000 рублей под ставку 12 % годовых. Через сколько лет его вклад удвоится?

Через год на счету вкладчика будет сумма:

$$10000 + 10000 \cdot \frac{12}{100}$$

Еще через год эта сумма составит

$$(10000 + 10000 \cdot \frac{12}{100}) +$$

$$(10000 + 1000 \cdot \frac{12}{100}) \cdot \frac{12}{100}$$

Попробуем найти закон образования суммы вклада после каждого года

После первого года

$$10000+10000\cdot\frac{12}{100}=1000(1+\frac{12}{100})$$

После второго года

$$1000(1+\frac{12}{100})+1000(1+\frac{12}{100})\cdot\frac{12}{100}=$$

$$=10000(1+\frac{12}{100})(1+\frac{12}{100})=$$

$$=10000(1+\frac{12}{100})^2$$

Через n лет хранения денег их количество составит

$$1000\left(1+\frac{12}{100}\right)^{n} \textit{рублей}$$

Вывели формулу, которая в экономике называется формулой сложных процентов

$$S = A\left(1+\frac{P}{100}\right)^{n}, \textit{где}$$

A – начальная сумма вклада,

P – процентная ставка (годовая),

n – срок хранения (в годах),

S – накопительная (итоговая) сумма вклада

В нашем случае деньги на вкладе накапливаются по формуле

$$S = 1000\left(1 + \frac{12}{100}\right)^n \text{ рублей}$$

Нам необходимо найти n, при котором

$$20000 = 1000\left(1 + \frac{12}{100}\right)^n \text{ рублей}$$

т.е. решить уравнение

$$2 = \left(1 + \frac{12}{100}\right)^n$$

по определению логарифма получим

$$n = \log_{1,12} 2$$

$$n = \log_{1,12} 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1,12} \approx \frac{0,3010}{0,0492} = 6,11$$

Увеличение вклада произойдет через 6 лет (с небольшим)

Рассмотрим этот же пример в общем виде

Некоторая сумма денег в А рублей подвержена приросту в р% годовых. Через сколько лет эта сумма составит S рублей?

$$S = A\left(1 + \frac{12}{100}\right)^n$$

Прологарифмируем это уравнение по основанию 10, получим:

$$\lg S = \lg\left(A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n\right),$$

$$\lg S = \lg A + \lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

$$\lg S - \lg A = n \cdot \lg\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

$$n = \frac{\lg S - \lg A}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

Пример.

Пенсионер 1 января положил на вклад все свои сбережения – 150 000 рублей под 5% годовых. Он намеревается каждый год 31 декабря снимать с вклада по 25 тыс.рублей. На протяжении какого периода времени он это может делать?

Рассмотрим ситуацию в общем виде. Пусть А – исходная сумма, S – снимаемая сумма ежегодно, Р – процентная ставка.

Тогда через год на счету будет

$$A\left(1+\frac{12}{100}\right)$$ ***а после снятия денег*** $$A\left(1+\frac{12}{100}\right)-S$$

через два года

$$\left(A\left(1+\frac{P}{100}\right)-S\right)\left(1+\frac{P}{100}\right)-S \text{ или}$$

$$A\left(1+\frac{P}{100}\right)^2-S\left(1+1+\frac{P}{100}\right);$$

В итоге получим, что закон образования суммы в конце каждого года после съема денег с вклада

$$A\left(1+\frac{P}{100}\right)^{n}-S\cdot\frac{100}{P}\left(\left(1+\frac{P}{100}\right)^{n}-1\right)$$

Для нашего случая получим:

$$150000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{n}-25000\cdot\frac{100}{5}\left(\left(1+\frac{5}{100}\right)^{n}-1\right)$$

Нам надо найти, при каком значении n эта сумма будет равна нулю.

$$150000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{n}-25000\cdot\frac{100}{5}\left(\left(1+\frac{5}{100}\right)^{n}-1\right)=0$$

$$150000(1{,}05)^n = 500000 \cdot ((1{,}05)^n - 1);$$

$$15(1{,}05)^n = 50 \cdot ((1{,}05)^n - 1);$$

$$15(1{,}05)^n - 50 \cdot (1{,}05)^n = -50;$$

$$35(1{,}05)^n = 50;$$

$$(1{,}05)^n = \frac{10}{7};$$

$$\lg 1{,}05^n = \lg \frac{10}{7};$$

$$n \lg 1{,}05 = \lg \frac{10}{7};$$

$$n = \frac{\lg \frac{10}{7}}{\lg 1{,}05}; n = \frac{\lg \frac{10}{7}}{\lg 1{,}05} \approx \frac{0{,}1549\ldots}{0{,}0212\ldots} = 7{,}31$$

выводы

- Логарифмы можно использовать при нахождении банковского процента по вкладам
- Зная процент по вкладам, который предлагают разные банки, можно определить какой из них более выгодный на данный момент