Практикум по математике

Занятие №1

Действительные числа

1.Между любыми двумя действительными числами расположено бесконечно много рациональных чисел

Пример 1. Среди всех обыкновенных несократимых дробей $\frac{m}{n}$, m, $n \in N$, лежащих между дробями а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{16}{21}$ и $\frac{17}{21}$; в) $\frac{5}{17}$ и $\frac{1}{3}$, найдите такую дробь, которая имеет наименьший знаменатель.

Пример 1.

Решение, а) Пусть $\frac{1}{2}<\frac{m}{n}<\frac{1}{3}$. Тогда $3n<6m<4n$. Таким образом, на интервале $(3n;\ 4n)$ требуется найти наименьшее кратное 6. При $n=1;\ 2;\ 3;\ 4$ интервал $(3n;\ 4n)$ не содержит кратных 6. При $n=5$ интервал $(3n;\ 4n)$ имеет вид $(15;\ 20)$, на котором лежит только одно число, кратное 6, а именно: $18=6\cdot 3$, т.е. $m=3$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет дробь $\frac{3}{5}$.

Проверь себя дома

Задания б) и в) решите самостоятельно. Вы получите

б) $\frac{16}{21} < \frac{4}{5} < \frac{17}{21}$; в) $\frac{5}{17} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}$.

Пример 2. При каком значении параметра a на интервале $(5 - 2a;\ 2a + 7)$ лежит ровно 101 целое число?

Решение. При любом a серединой интервала $(5 - 2a;\ 2a + 7)$ является число $x_0 = \frac{(5-2a)+(2a+7)}{2} = 6$. Следовательно, чтобы на интервале $(5 - 2a;\ 2a + 7)$ лежало ровно 101 целое число, необходимо и достаточно, чтобы в правой полуокрестности точки 6 лежало ровно 50 натуральных чисел, что равносильно неравенству:

$$56 < 2a + 7 \leq 57 \Leftrightarrow 24{,}5 < a \leq 25.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют только те a, для которых $24{,}5 < a \leq 25$.

Для натуральных чисел справедлива основная теорема арифметики:

Каждое натуральное число n, большее 1, может быть представлено в виде произведения простых чисел, причем такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей, т.е.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k ,$$

где p_1, p_2, p_3, ... p_k — простые числа. Напомним, что натуральное число $p > 1$ называется **простым числом,** если оно имеет только два натуральных делителя: 1 и p. Натуральное число $p > 1$, не являющееся простым, называется **составным числом.** Множество простых чисел — бесконечное множество.

Пример 3. Решите уравнение $x^2-px+q=0$, где p, q — простые числа, если один корень этого уравнения также является простым числом.

Решение. Пусть x — простой корень данного уравнения. Тогда $x \neq 0$ и данное уравнение равносильно уравнению $x=p-\frac{q}{x}$. Отсюда следует, что число $\frac{q}{x}$ — целое. Значит, число x — делитель числа q. По условию x и q — простые числа, а число 1 не является простым числом. Следовательно, $x=q$. Подставляя $x=q$ в данное уравнение, находим $q=p-1$. Существует только два простых числа, разность между которыми равна 1. Это числа 3 и 2. Итак, данное уравнение имеет вид $x^2-3x+2=0$, а его корни 1 и 2.

На множестве $Z=\{0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots\}$ целых чисел определена особая операция: **деление с остатком.** Справедлива теорема:

Для любых целых чисел a и b существуют единственные целое число c и целое неотрицательное число r такие, что $a=bc+r$, причем $0\le r<|b|$.

При $r>0$ число c называется **неполным частным** от деления a на b; при $r=0$ число c есть **частное** от деления a на b; b — **делитель** a; a — **кратное** b. Говорят также, что **число b делит число a**. Записывают это так: $b|a$ или, что то же самое, **число a делится на b**: $a \vdots b$. Из определения делимости натуральных чисел следует, что если $b|a$, то $1\le b\le a$. Поэтому число натуральных делителей натурального числа a конечно. Например, число 28 имеет ровно шесть натуральных делителей, а именно: 1; 2; 4; 7; 14; 28.

Пример 4. Определите последнюю цифру числа 3^{4567}.

Решение. Посмотрим на неотрицательные целые степени числа 3: $3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, ... Мы видим, что последние цифры этих степеней образуют периодическую последовательность цифр: 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; ... . Период этой последовательности равен 4. Поскольку $4567=1141\cdot 4+3$, то последней цифрой данной степени является число 7.