

Практикум по математике

Занятие №1

Действительные числа

1. Между любыми двумя действительными числами расположено бесконечно много рациональных чисел

Пример 1. Среди всех обыкновенных несократимых дробей $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, лежащих между дробями а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{16}{21}$ и $\frac{17}{21}$; в) $\frac{5}{17}$ и $\frac{1}{3}$, найдите такую дробь, которая имеет наименьший знаменатель.

Пример 1.

Решение, а) Пусть $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < \frac{1}{3}$. Тогда $3n < 6m < 4n$. Таким образом, на интервале $(3n; 4n)$ требуется найти наименьшее кратное 6. При $n=1; 2; 3; 4$ интервал $(3n; 4n)$ не содержит кратных 6. При $n=5$ интервал $(3n; 4n)$ имеет вид $(15; 20)$, на котором лежит только одно число, кратное 6, а именно: $18=6 \cdot 3$, т.е. $m=3$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет дробь $\frac{3}{5}$.

Проверь себя дома

Задания б) и в) решите самостоятельно. Вы получите

$$\text{б) } \frac{16}{21} < \frac{4}{5} < \frac{17}{21}; \quad \text{в) } \frac{5}{17} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}.$$

Пример 2. При каком значении параметра a на интервале $(5 - 2a; 2a + 7)$ лежит ровно 101 целое число?

Решение. При любом a серединой интервала $(5 - 2a; 2a + 7)$ является число $x_0 = \frac{(5 - 2a) + (2a + 7)}{2} = 6$. Следовательно, чтобы на интервале $(5 - 2a; 2a + 7)$ лежало ровно 101 целое число, необходимо и достаточно, чтобы в правой полукрестности точки 6 лежало ровно 50 натуральных чисел, что равносильно неравенству:

$$56 < 2a + 7 \leq 57 \Leftrightarrow 24,5 < a \leq 25.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют только те a , для которых $24,5 < a \leq 25$.

Для натуральных чисел справедлива основная теорема арифметики:

Каждое натуральное число n , большее 1, может быть представлено в виде произведения простых чисел, причем такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей, т.е.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k,$$

где $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ — простые числа. Напомним, что натуральное число $p > 1$ называется простым числом, если оно имеет только два натуральных делителя: 1 и p . Натуральное число $p > 1$, не являющееся простым, называется составным числом. Множество простых чисел — бесконечное множество.

Пример 3. Решите уравнение $x^2 - px + q = 0$, где p, q — простые числа, если один корень этого уравнения также является простым числом.

Решение. Пусть x — простой корень данного уравнения. Тогда $x \neq 0$ и данное уравнение равносильно уравнению $x = p - \frac{q}{x}$. Отсюда следует, что число $\frac{q}{x}$ — целое. Значит, число x — делитель числа q . По условию x и q — простые числа, а число 1 не является простым числом. Следовательно, $x = q$. Подставляя $x = q$ в данное уравнение, находим $q = p - 1$. Существует только два простых числа, разность между которыми равна 1. Это числа 3 и 2. Итак, данное уравнение имеет вид $x^2 - 3x + 2 = 0$, а его корни 1 и 2.

На множестве $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$ целых чисел определена особая операция: деление с остатком. Справедлива теорема:

Для любых целых чисел a и b существуют единственные целое число c и целое неотрицательное число r такие, что $a = bc + r$, причем $0 \leq r < |b|$.

При $r > 0$ число c называется неполным частным от деления a на b ; при $r = 0$ число c есть частное от деления a на b ; b — делитель a ; a — кратное b . Говорят также, что число b делит число a . Записывают это так: $b|a$ или, что то же самое, число a делится на b : $a:b$. Из определения делимости натуральных чисел следует, что если $b|a$, то $1 \leq b \leq a$. Поэтому число натуральных делителей натурального числа a конечно. Например, число 28 имеет ровно шесть натуральных делителей, а именно: 1; 2; 4; 7; 14; 28.

Пример 4. Определите последнюю цифру числа 3^{4567} .

Решение. Посмотрим на неотрицательные целые степени числа 3: $3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, ... Мы видим, что последние цифры этих степеней образуют периодическую последовательность цифр: 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; Период этой последовательности равен 4. Поскольку $4567=1141 \cdot 4 + 3$, то последней цифрой данной степени является число 7.