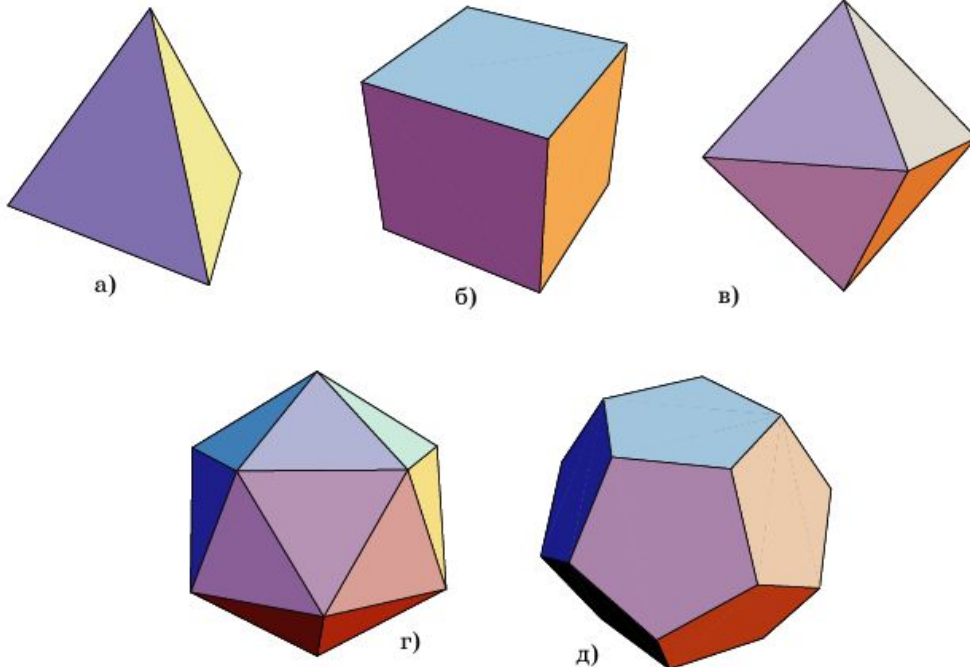


# ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

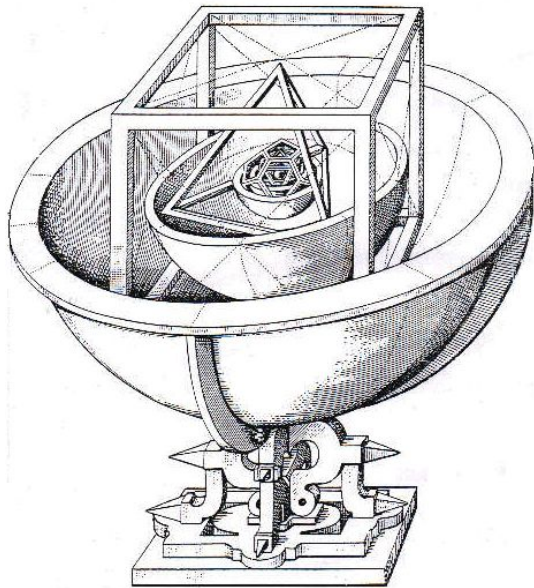
Правильные многогранники были известны еще в древней Греции. Пифагор и его ученики считали, что все состоит из атомов, имеющих форму правильных многогранников. В частности, атомы огня имеют форму тетраэдра (его гранями являются четыре правильных треугольника (рис. а); земли - гексаэдра (куб – многогранник, гранями которого являются шесть квадратов, рис. б); воздуха – октаэдра (его гранями являются восемь правильных треугольников, рис. в); воды – икосаэдра (его гранями являются двадцать правильных треугольников, рис. г); вся Вселенная, по мнению древних, имела форму додекаэдра (его гранями являются двенадцать правильных пятиугольников, рис. д).



Названия многогранников тоже имеют древнегреческое происхождение. В переводе с греческого: "Тетра" - четыре; "Гекса" - шесть; "Окто" - восемь; "Икоси" - двадцать, "Додека" - двенадцать. "Эдра" - грань.

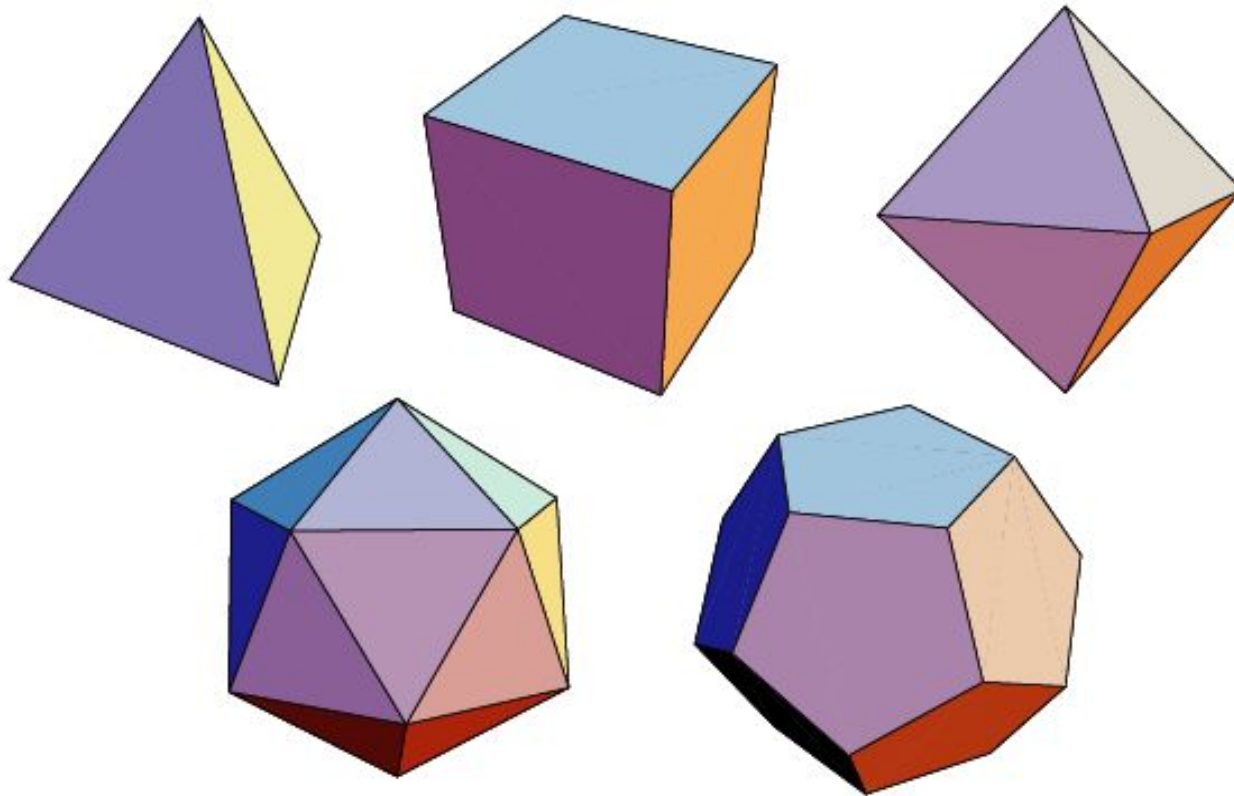
# Кубок Кеплера

Иоганн Кеплер (1571 – 1630) в одной из первых своих работ "Тайна мироздания" в 1596 году, используя правильные многогранники, вывел принцип, которому подчиняются формы и размеры орбит планет Солнечной системы. Геометрия Солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем: "Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия". Такая модель Солнечной системы получила название "Космического кубка" Кеплера. Впоследствии, проведя более точные измерения, Кеплер пришел к выводу, что орбиты планет являются не окружностями, а эллипсами, при этом Солнце находится в одном из фокусов этих эллипсов. В этом состоит 1-ый закон Кеплера.



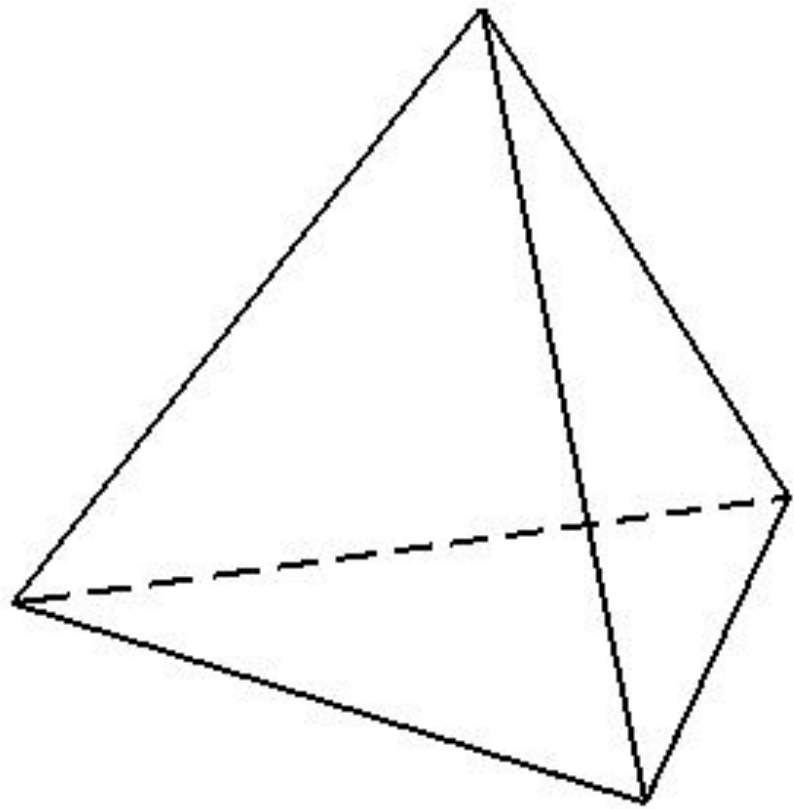
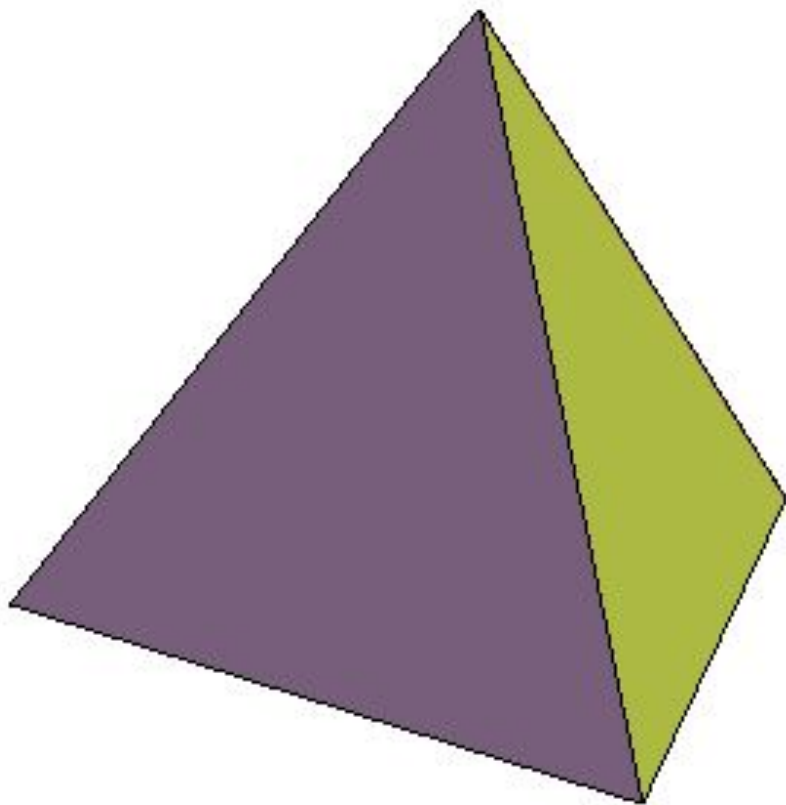
# ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Выпуклый многогранник называется правильным, если его гранями являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.



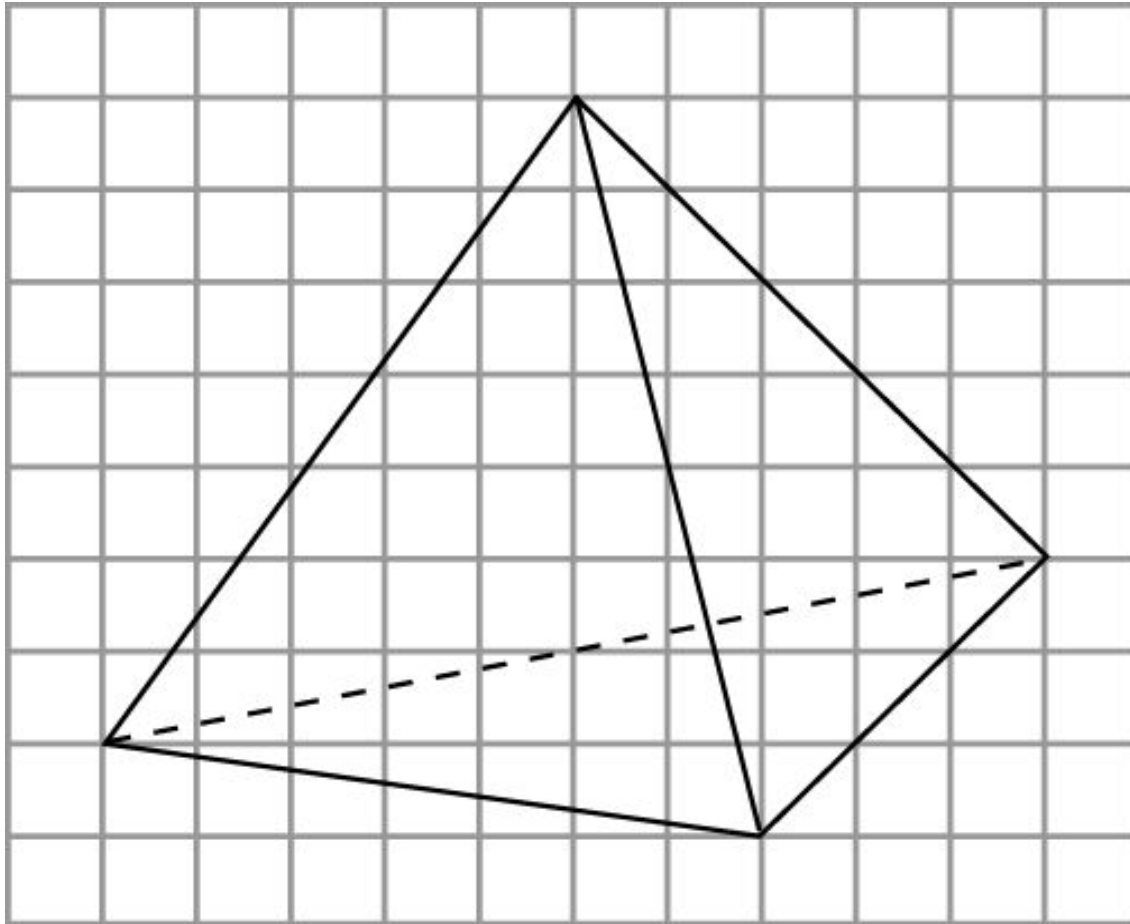
# ТЕТРАЭДР

Наиболее простым правильным многогранником является треугольная пирамида, грани которой правильные треугольники. В каждой ее вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также **тетраэдром**, что в переводе с греческого языка означает четырехгранник.



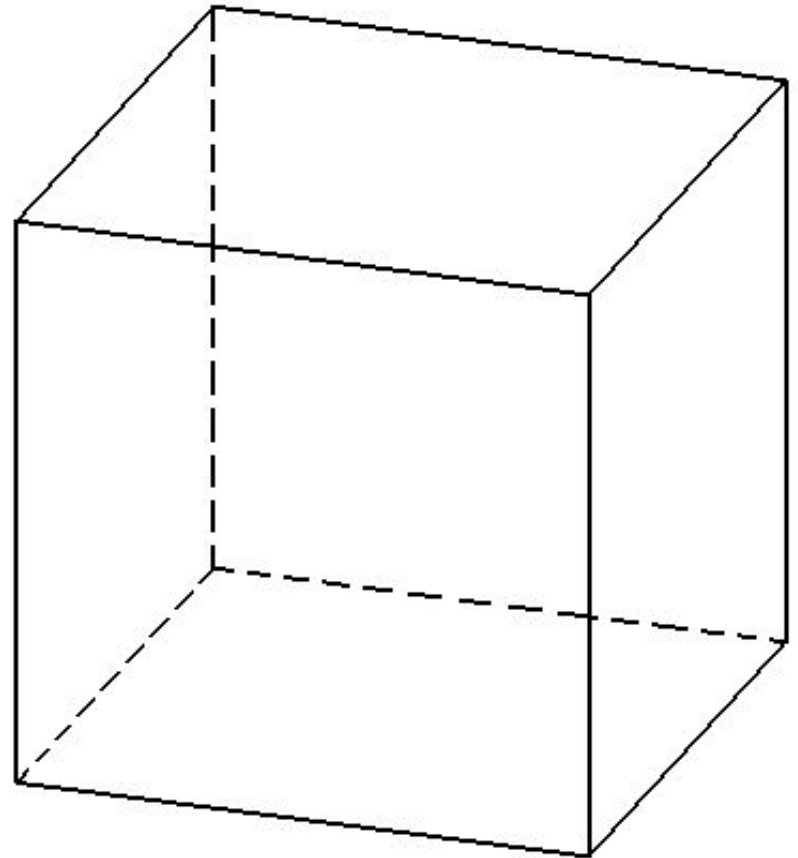
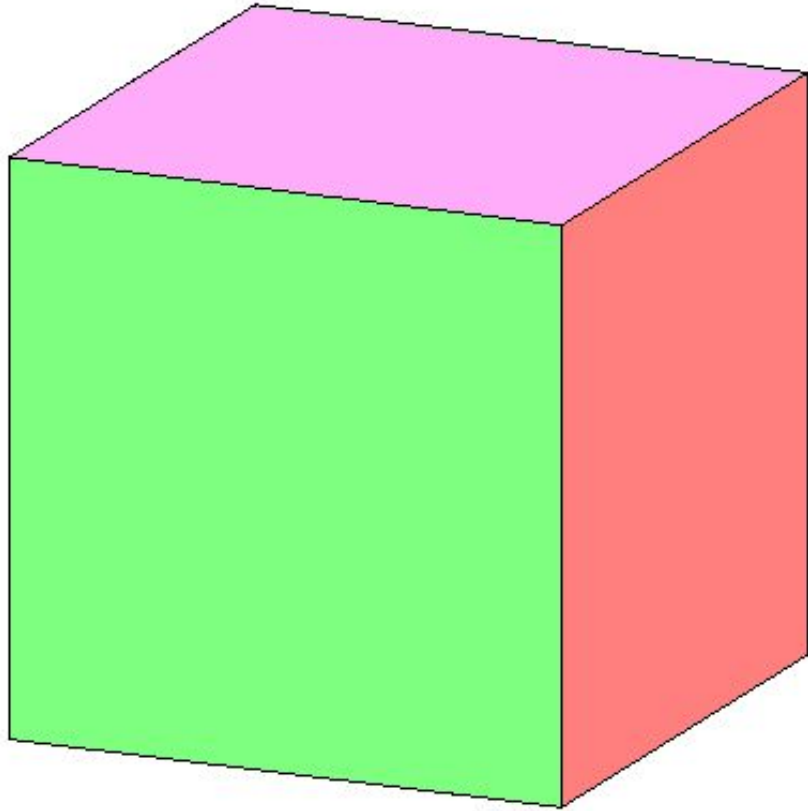
# Упражнение 1

На клетчатой бумаге изобразите тетраэдр, аналогично показанному на рисунке.



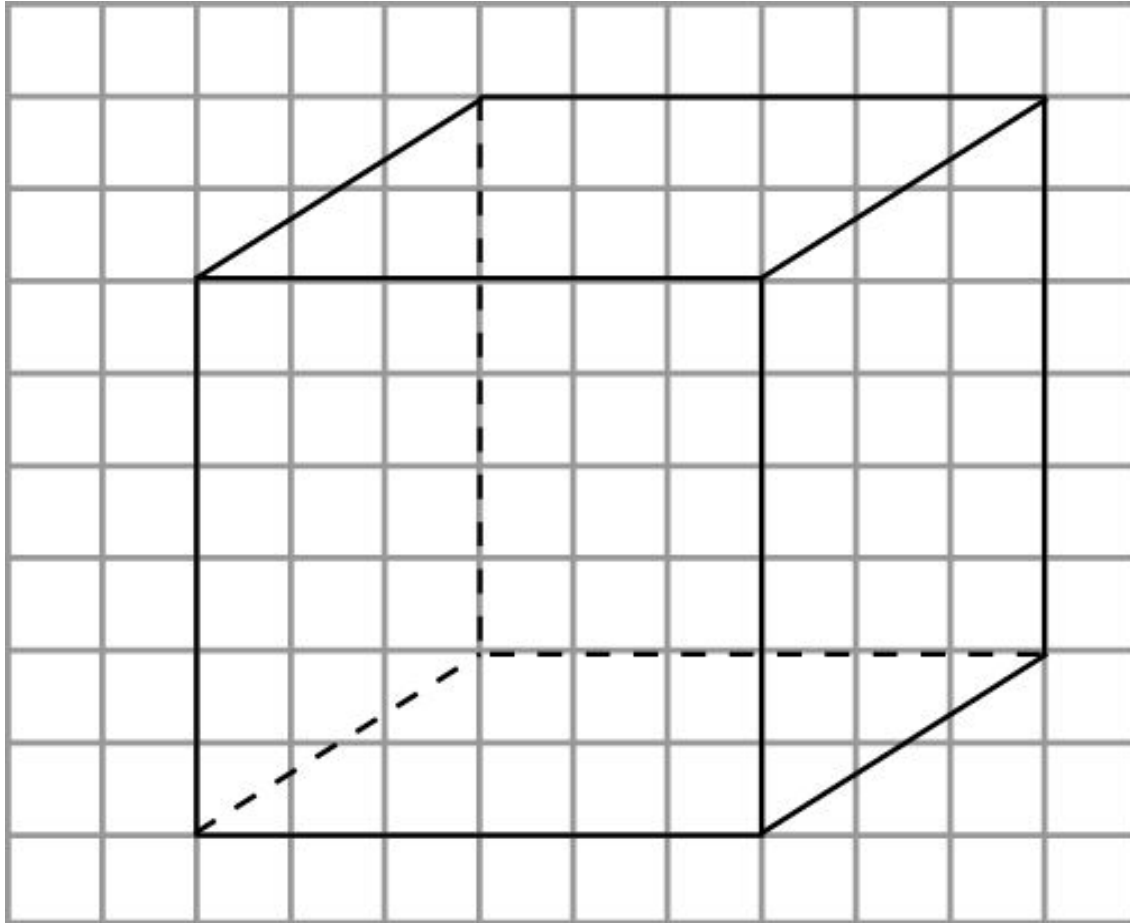
# КУБ (ГЕКСАЭДР)

Многогранник, гранями которого являются квадраты и в каждой вершине сходится три грани называется **кубом или гексаэдром**.



## Упражнение 2

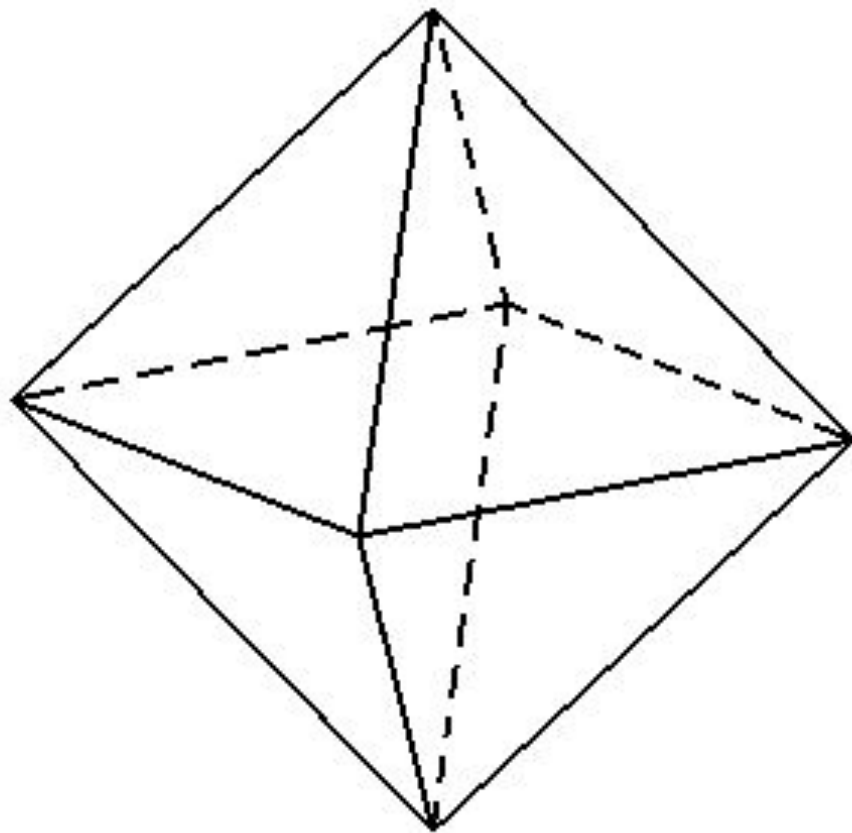
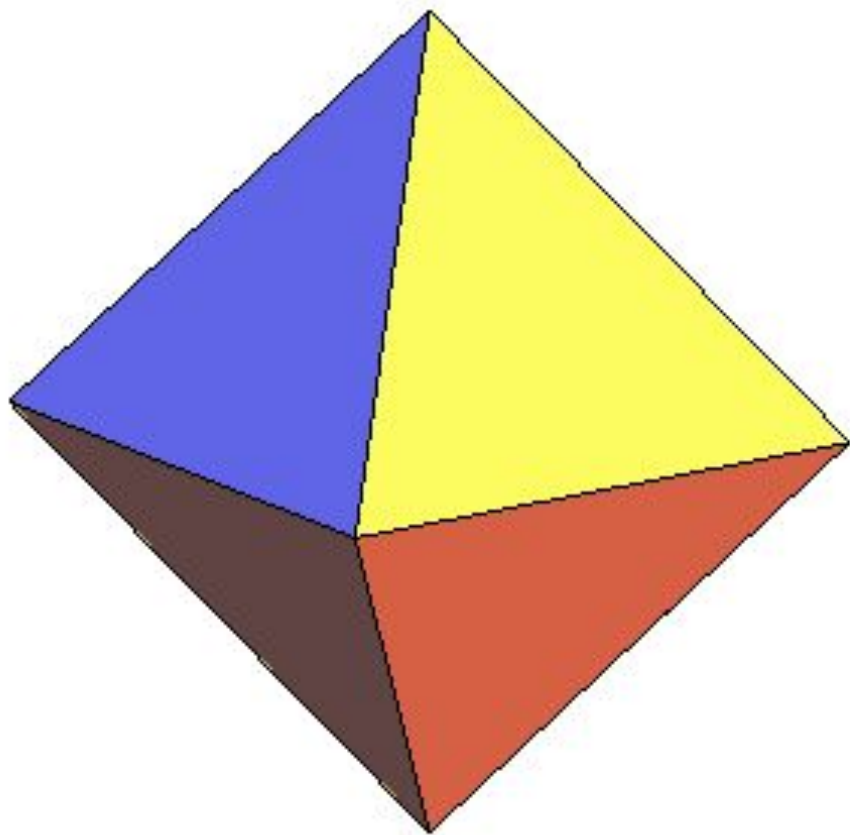
На клетчатой бумаге изобразите куб, аналогично показанному на рисунке.





# ОКТАЭДР

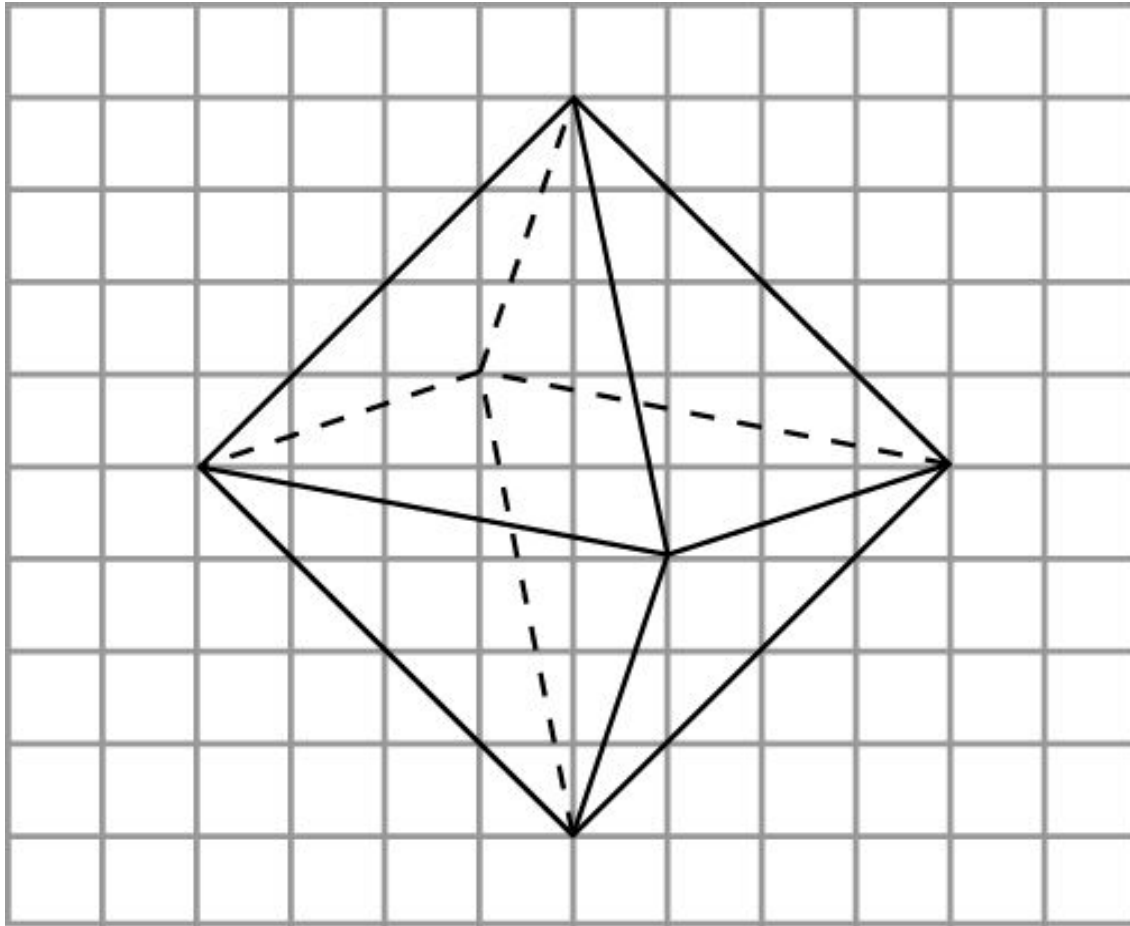
Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники и в каждой вершине сходится четыре грани называется **октаэдром**.





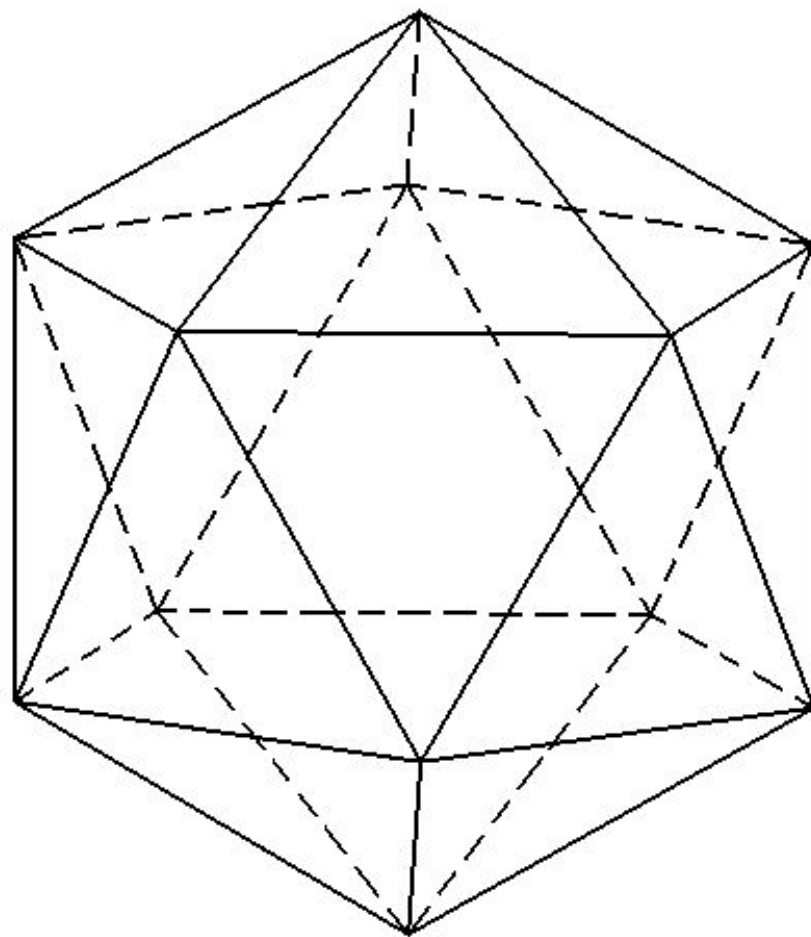
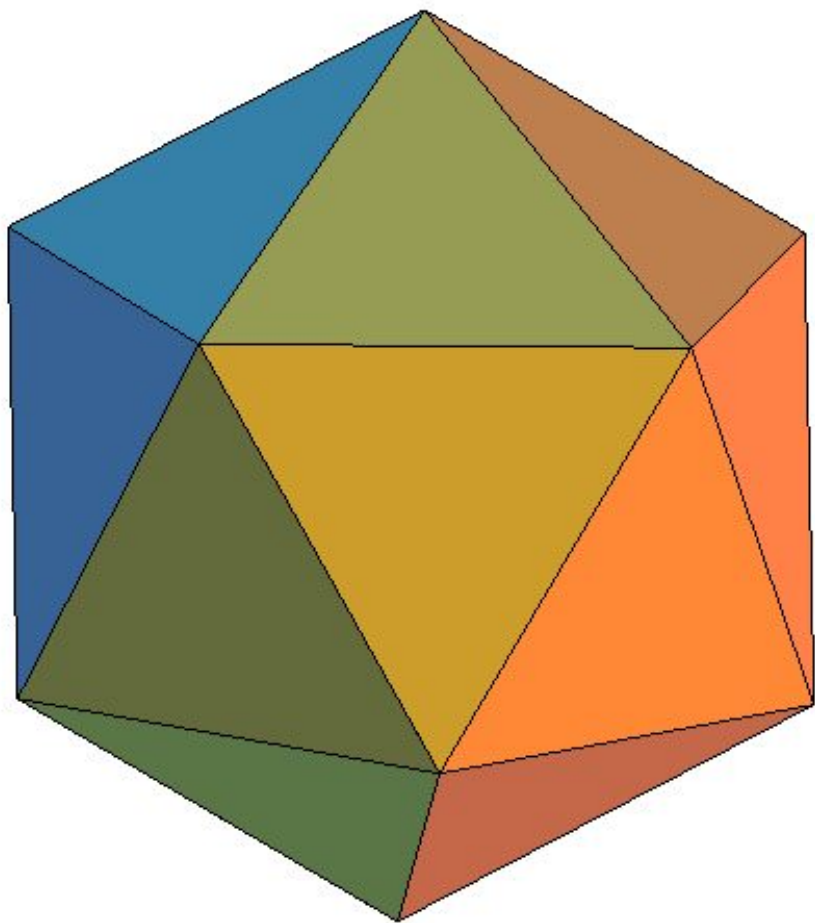
## Упражнение 3

На клетчатой бумаге изобразите октаэдр, аналогично показанному на рисунке.



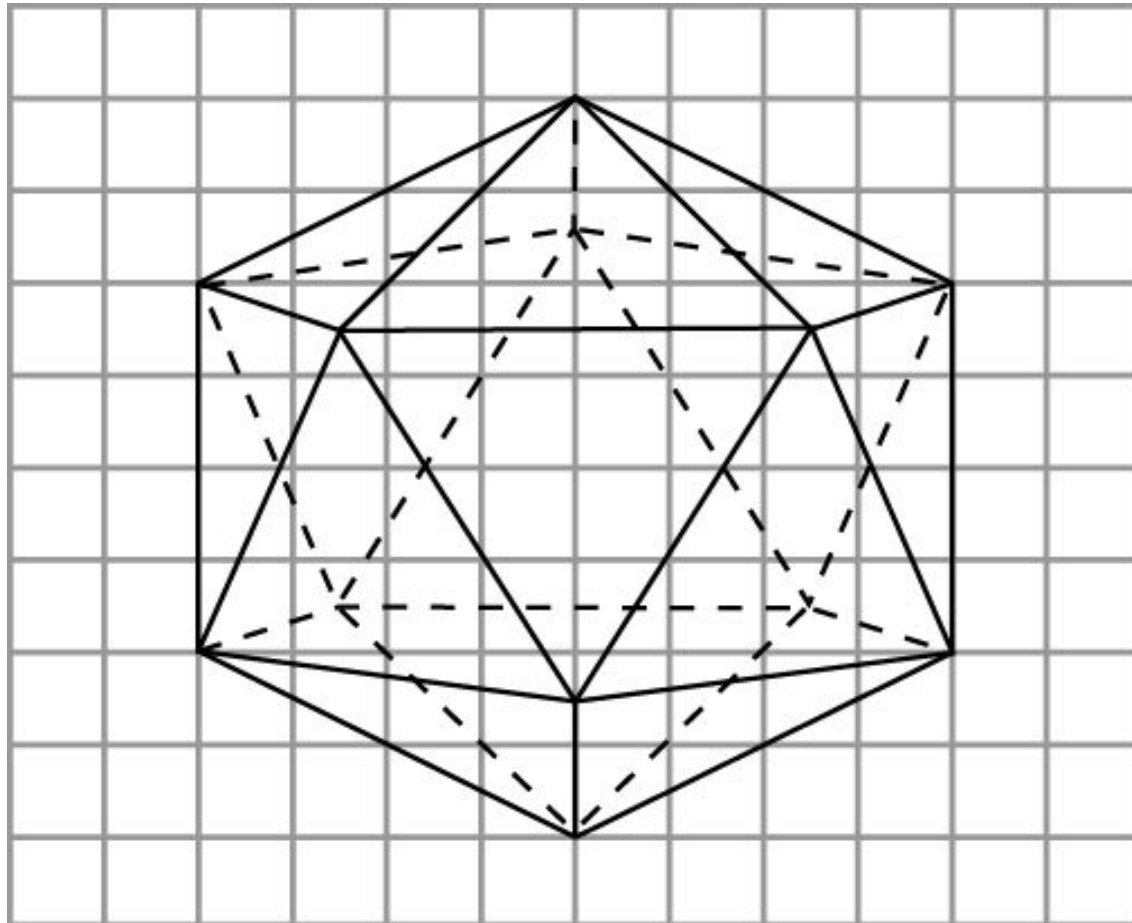
# ИКОСАЭДР

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников называется **икосаэдром**.



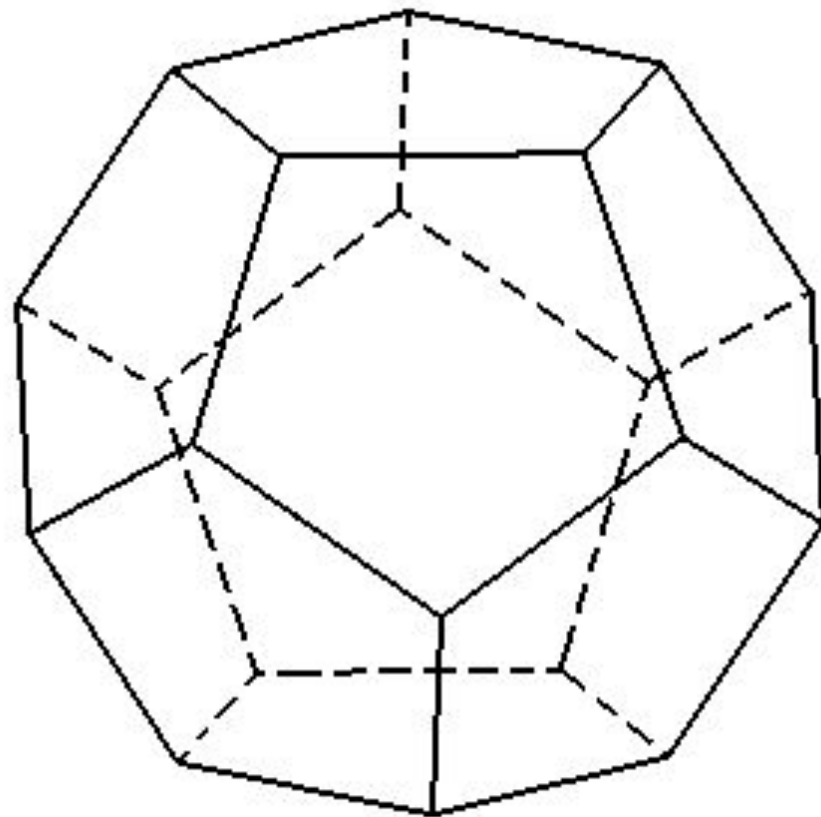
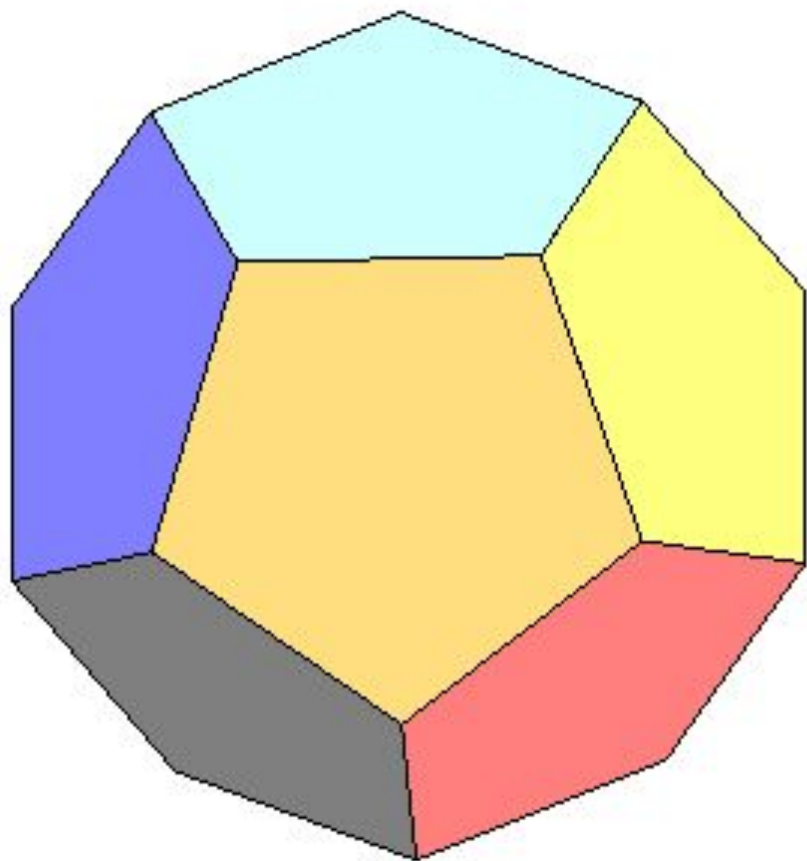
## Упражнение 4

На клетчатой бумаге изобразите икосаэдр, аналогично показанному на рисунке.



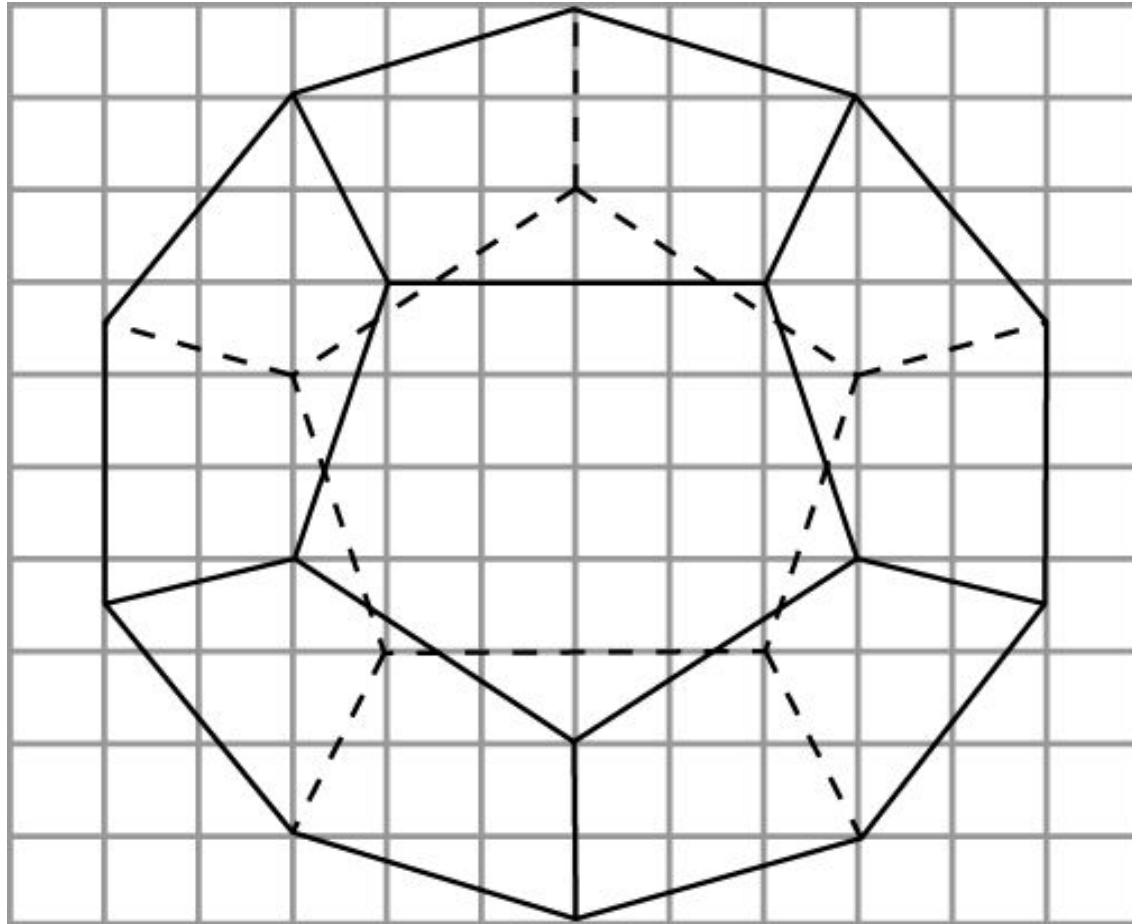
# ДОДЕКАЭДР

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники и в каждой вершине сходится три грани называется додекаэдром.



## Упражнение 5

На клетчатой бумаге изобразите додекаэдр, аналогично показанному на рисунке.



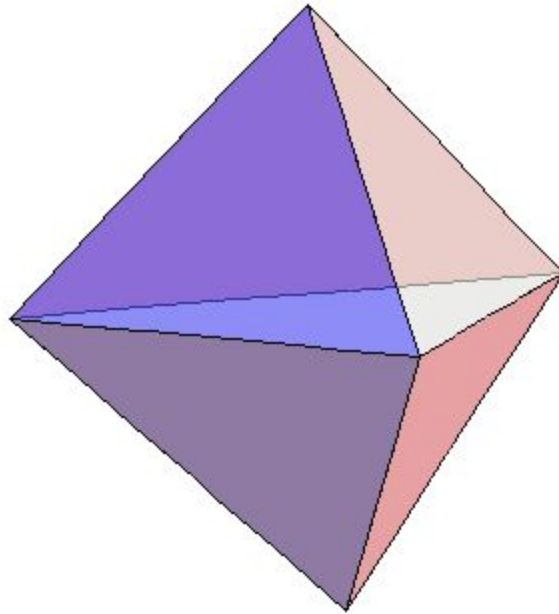
## Упражнение 6

Почему гранями правильного многогранника не могут быть правильные шестиугольники?

**Ответ:** Потому что в этом случае сумма плоских углов при вершинах будет больше или равна  $360^\circ$ .

## Упражнение 7

Представьте многогранник - бипирамиду, сложенную из двух равных правильных тетраэдров совмещением каких-нибудь их граней. Будет ли он правильным многогранником?

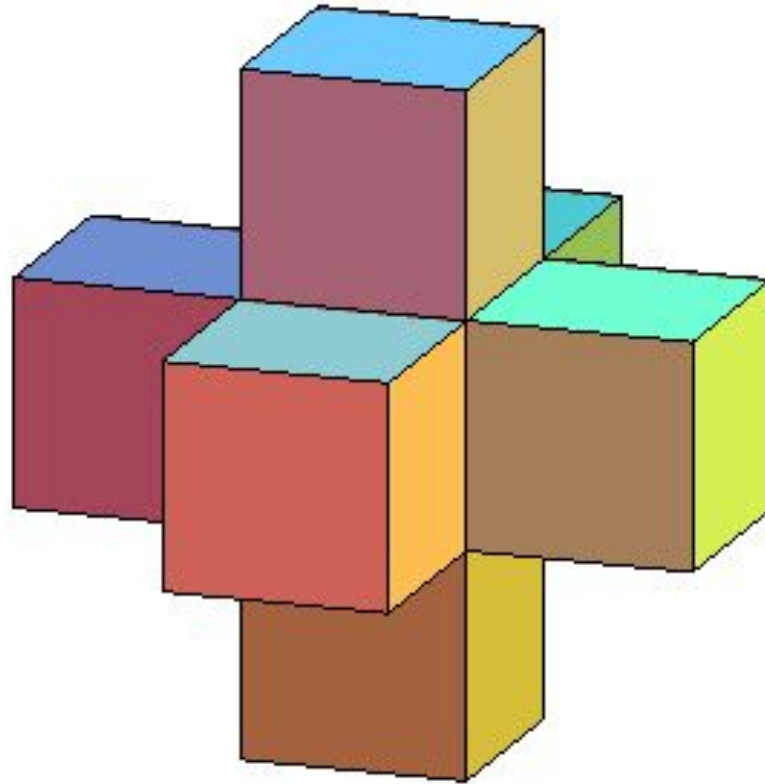


**Ответ:** Нет, в его вершинах сходится разное число граней.



## Упражнение 8

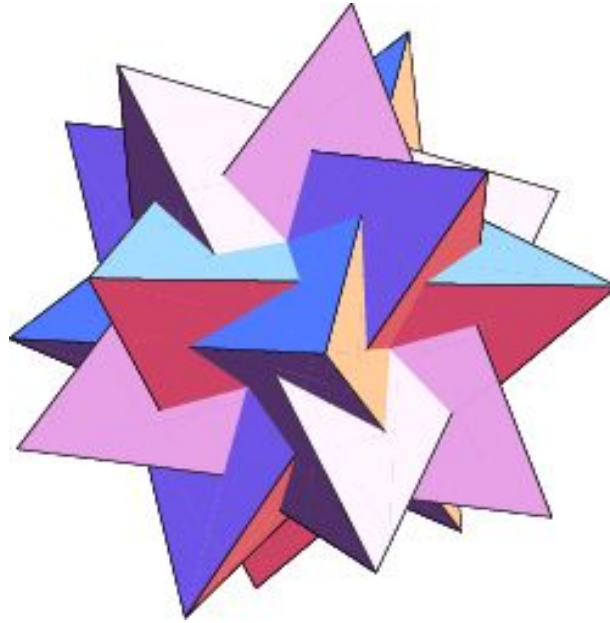
Является ли пространственный крест правильным многогранником?



Ответ: Нет.

## Упражнение 9

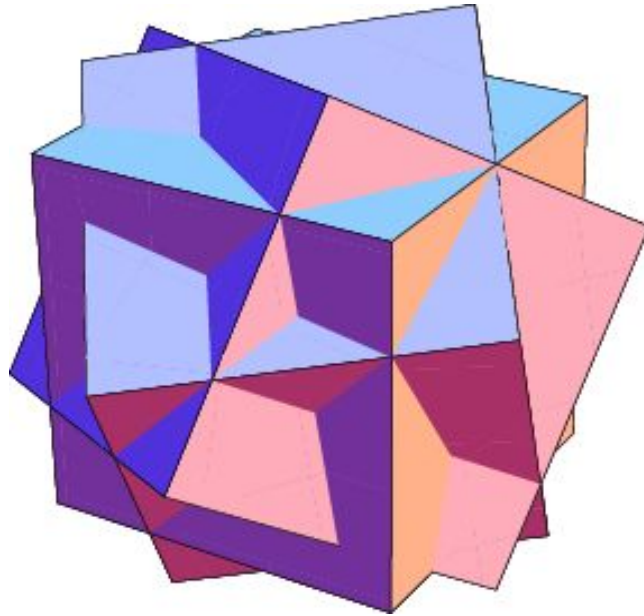
Сколько тетраэдров изображено на рисунке?



Ответ: Пять.

## Упражнение 10

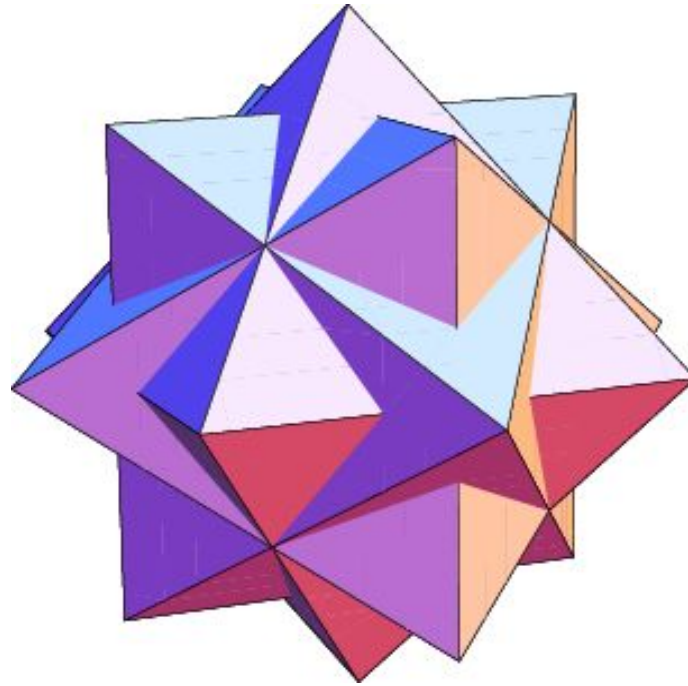
Сколько кубов изображено на рисунке?



Ответ: Три.

# Упражнение 11

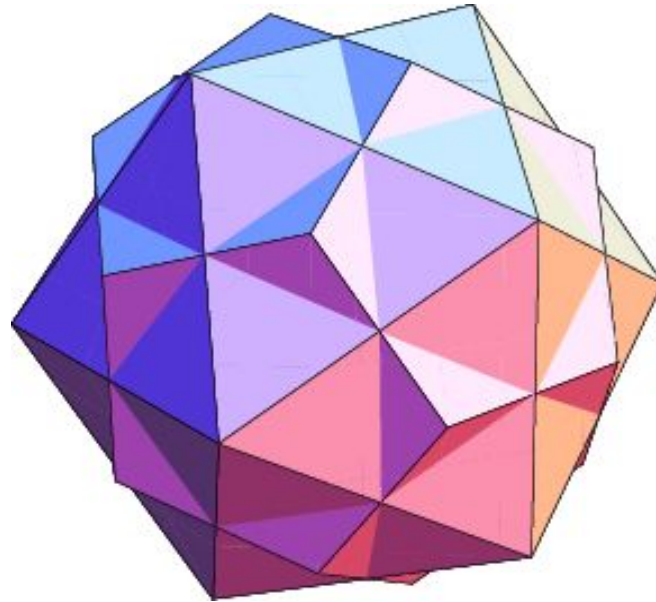
Сколько октаэдров изображено на рисунке?



Ответ: Три.

## Упражнение 12

Соединение каких двух многогранников изображено на рисунке?



**Ответ:** Икосаэдра и додекаэдра.

# Упражнение 13

Сколько вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) имеют:

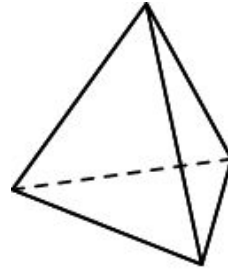
а) тетраэдр;

б) куб;

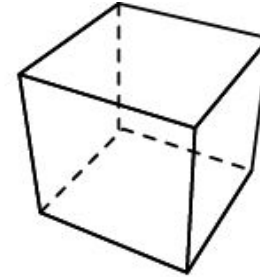
в) октаэдр;

г) икосаэдр;

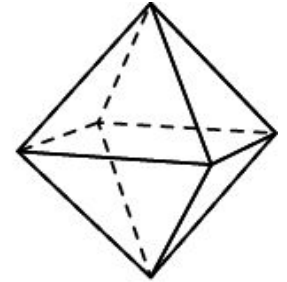
д) додекаэдр?



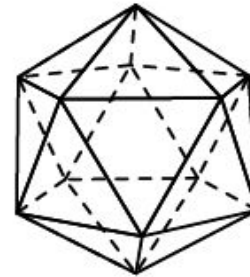
а)



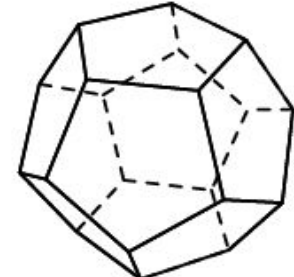
б)



в)



г)



д)

Ответ: а)  $V = 4$ ,  $P = 6$ ,  $\Gamma = 4$ ;

б)  $V = 8$ ,  $P = 12$ ,  $\Gamma = 6$ ;

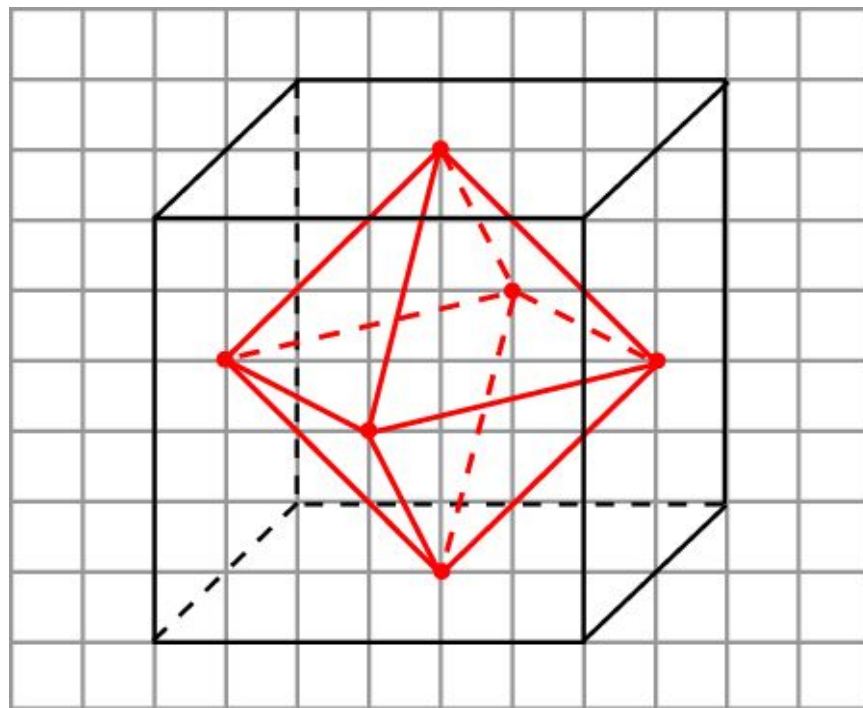
в)  $V = 6$ ,  $P = 12$ ,  $\Gamma = 8$ ;

г)  $V = 12$ ,  $P = 30$ ,  $\Gamma = 20$ ;

д)  $V = 20$ ,  $P = 30$ ,  $\Gamma = 12$ .

## Упражнение 14

Вершинами какого многогранника являются центры граней куба?

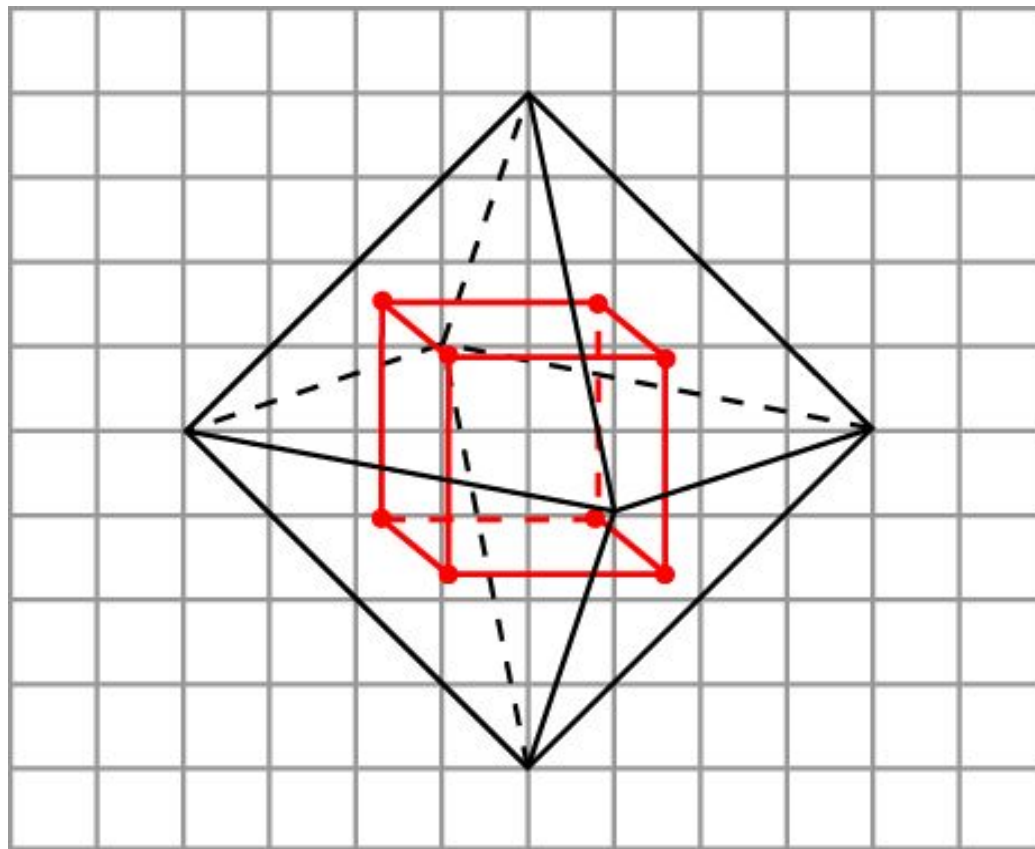


**Ответ:** Октаэдра.



## Упражнение 15

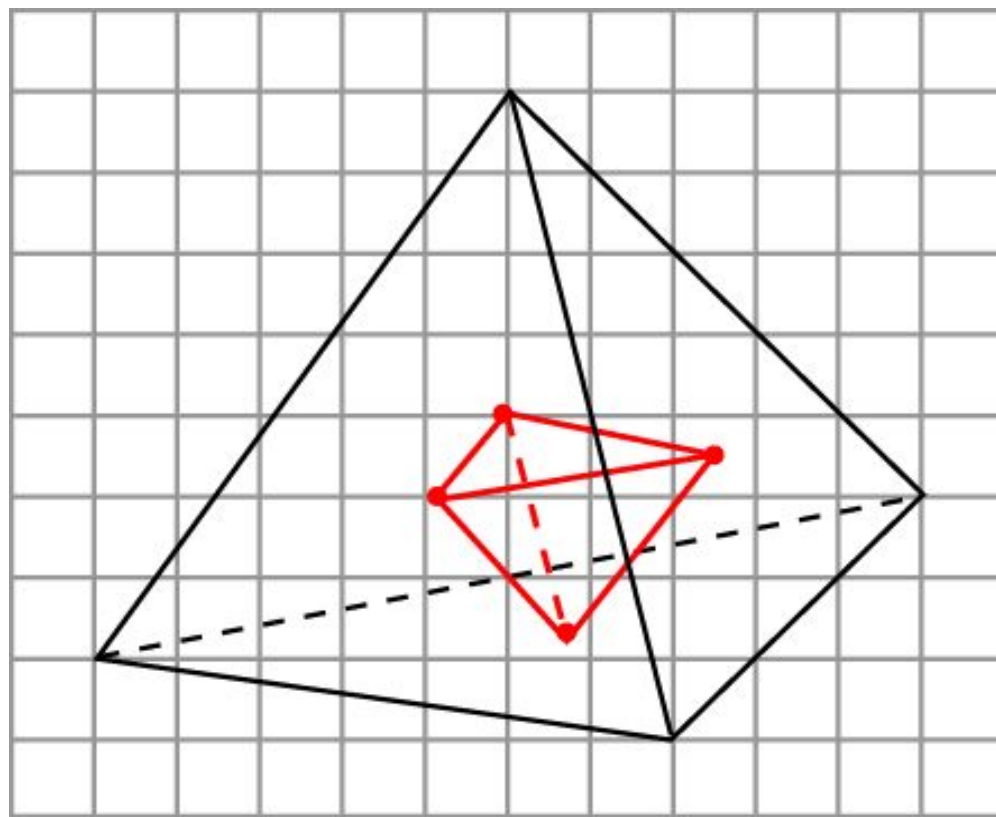
Вершинами какого многогранника являются центры граней октаэдра?



Ответ: Куба.

## Упражнение 16

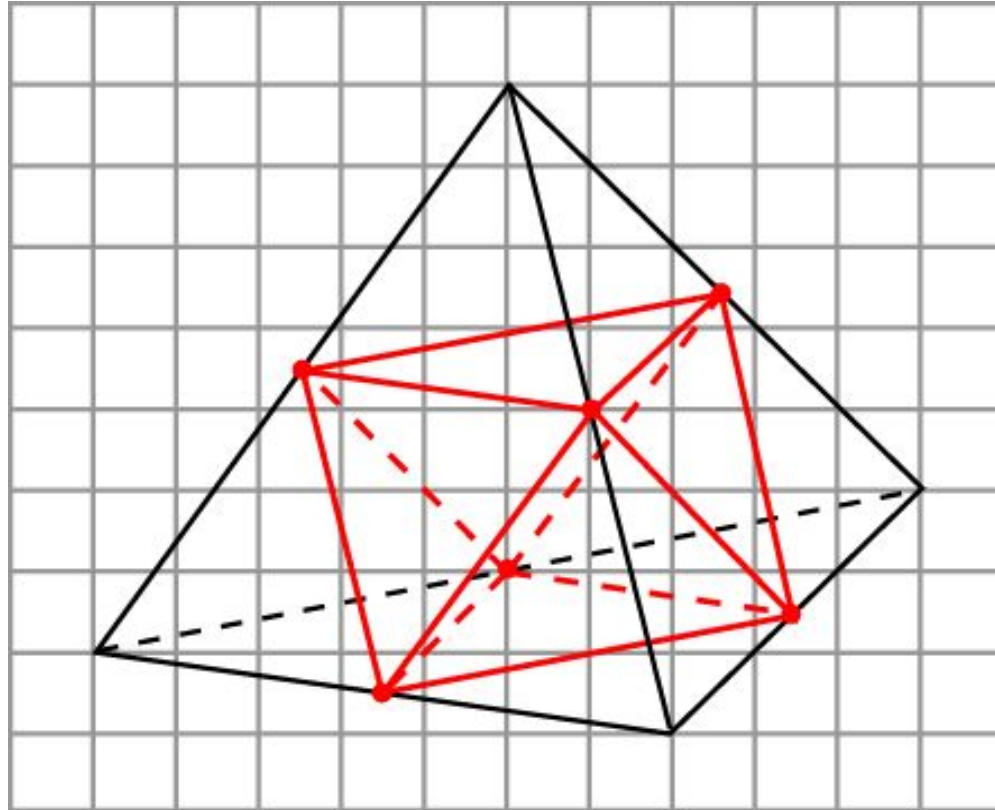
Вершинами какого многогранника являются центры граней тетраэдра?



Ответ: Тетраэдр.

## Упражнение 17

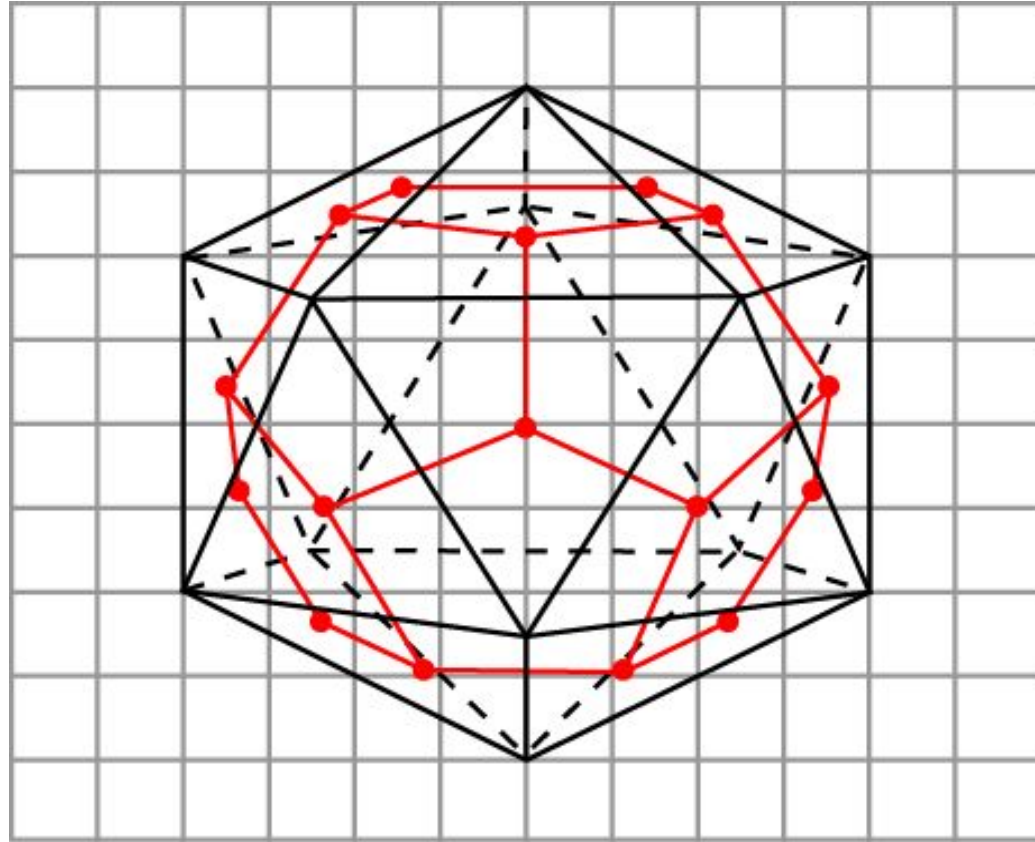
Вершинами какого многогранника являются середины ребер тетраэдра?



Ответ: Октаэдра.

## Упражнение 18

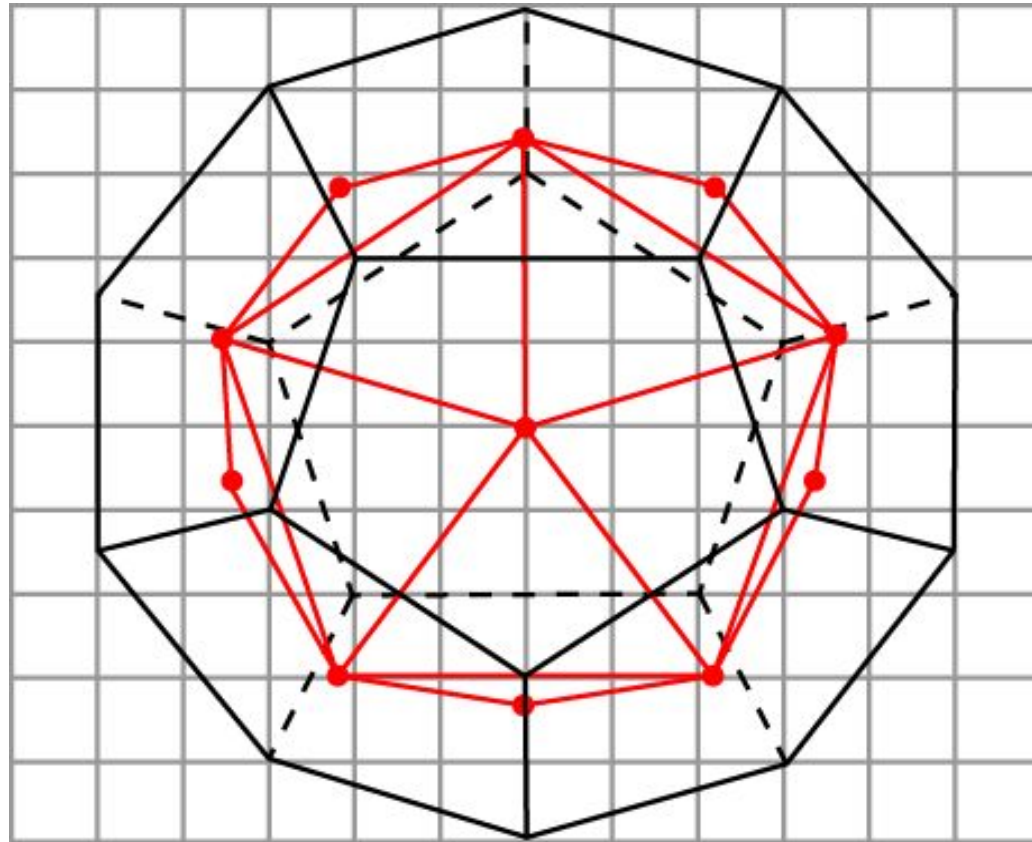
Вершинами какого многогранника являются центры граней икосаэдра?



**Ответ:** Додекаэдр.

## Упражнение 19

Вершинами какого многогранника являются центры граней додекаэдра?

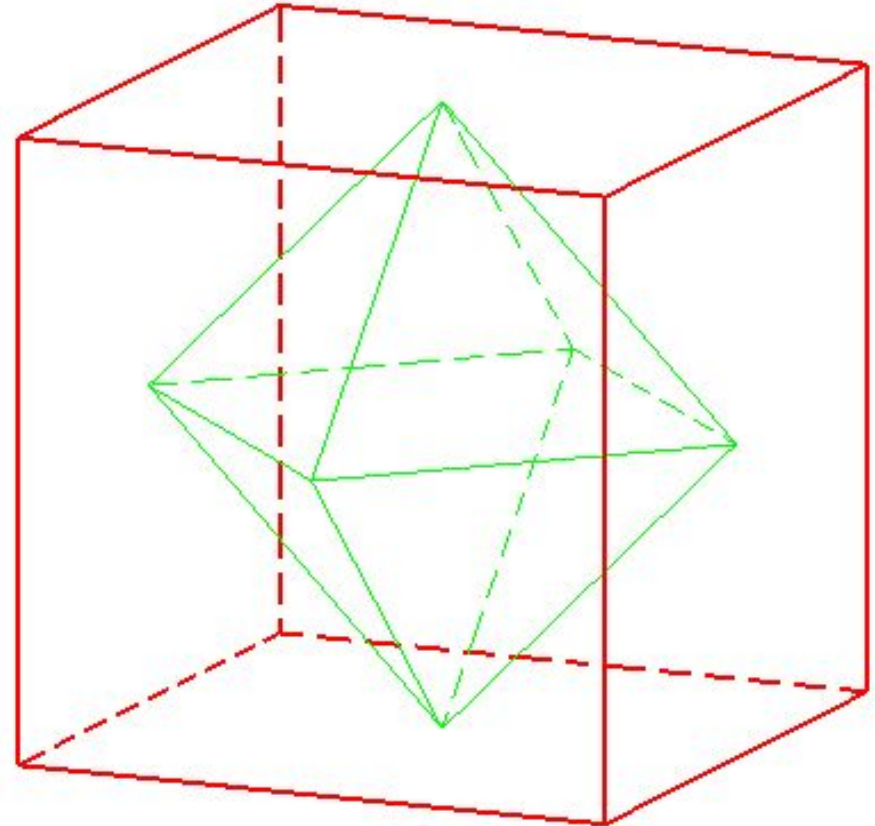
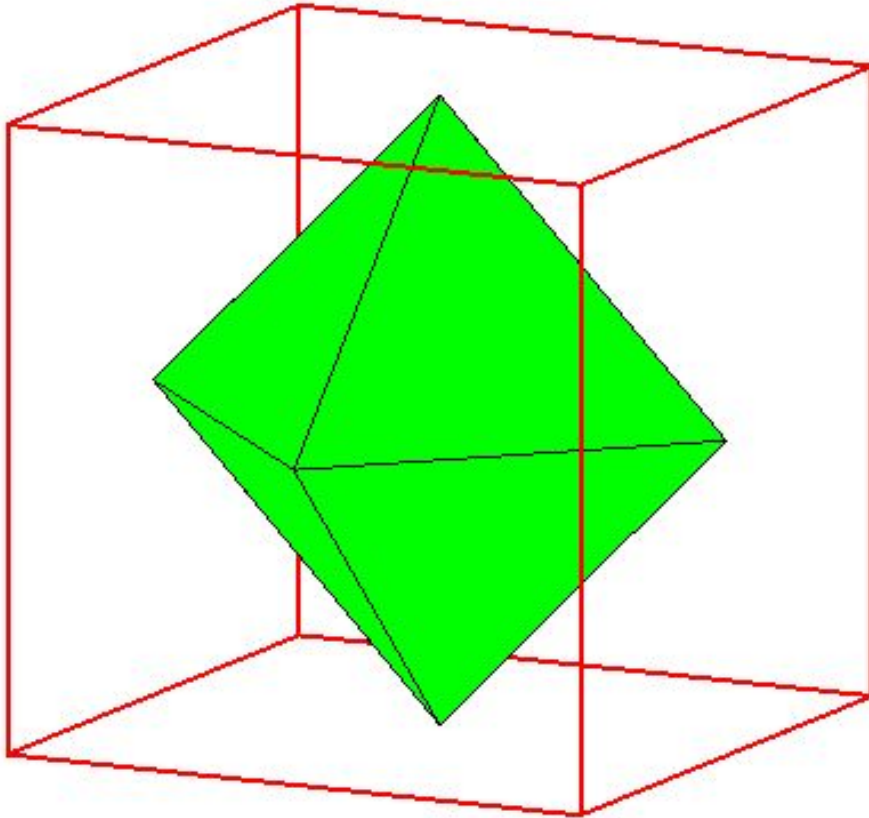


Ответ: Икосаэдр.

# Двойственные многогранники

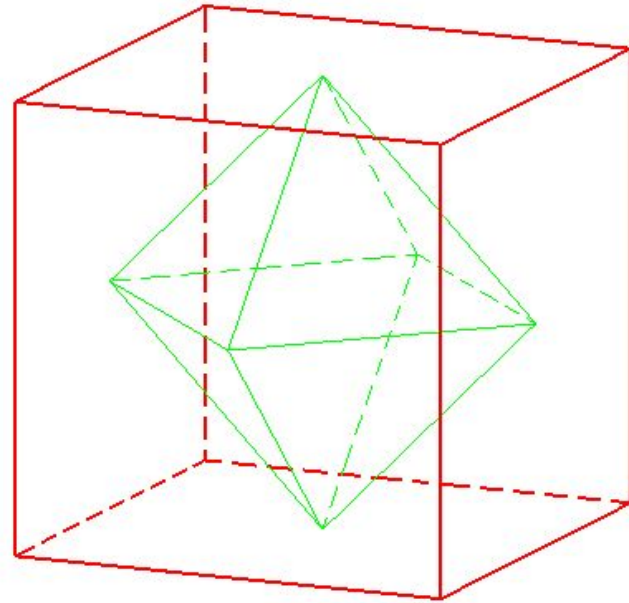
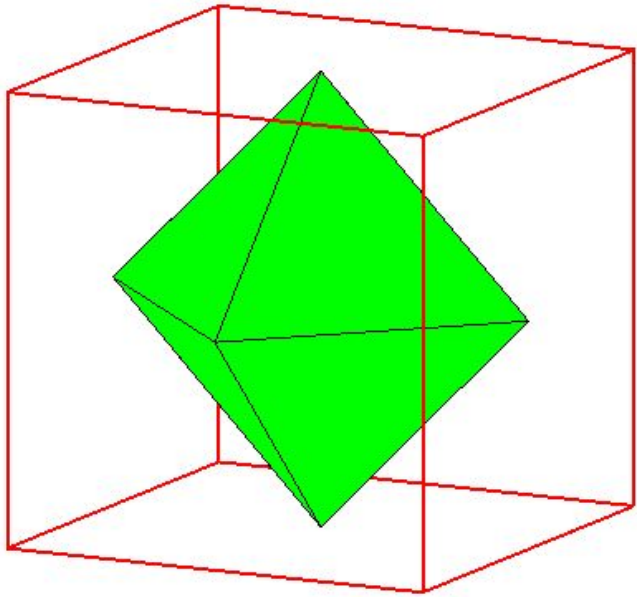
Два правильных многогранника называются **двойственными**, если центры граней одного из них являются вершинами другого.

Куб и октаэдр являются взаимно двойственными многогранниками. Центры граней куба являются вершинами октаэдра.



## Упражнение 20

Ребро куба равно 1. Найдите ребро двойственного октаэдра.

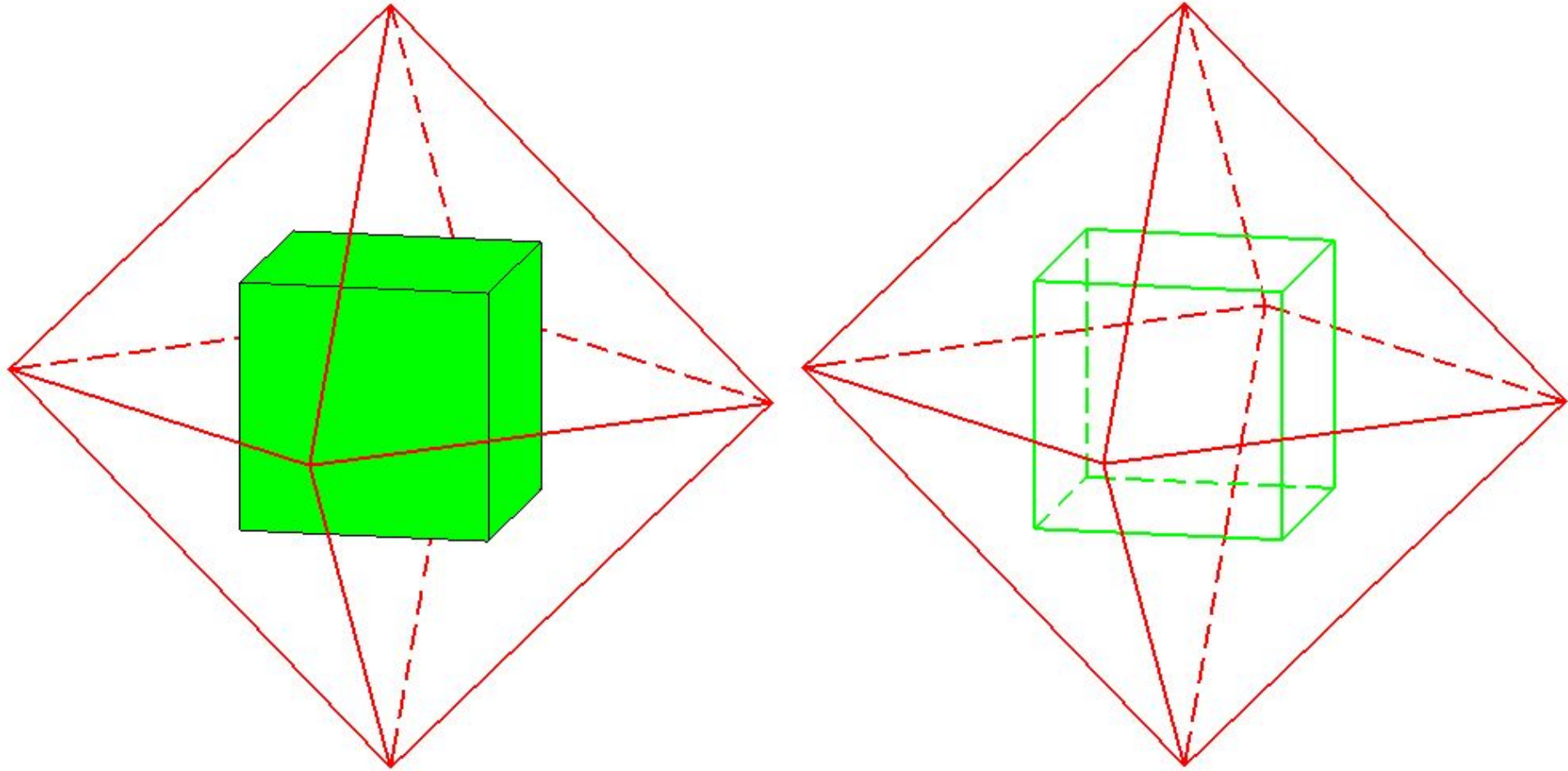


Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .



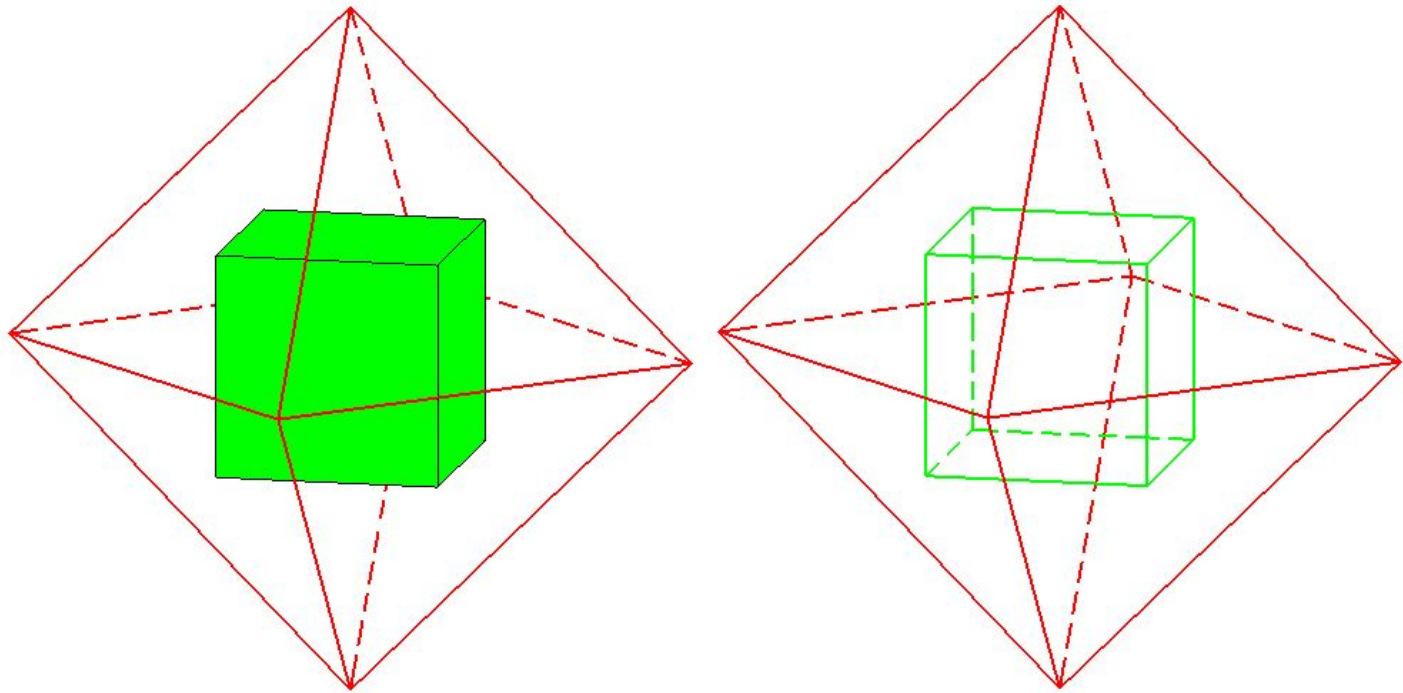
# Октаэдр и куб

Центры граней октаэдра являются вершинами куба.



## Упражнение 21

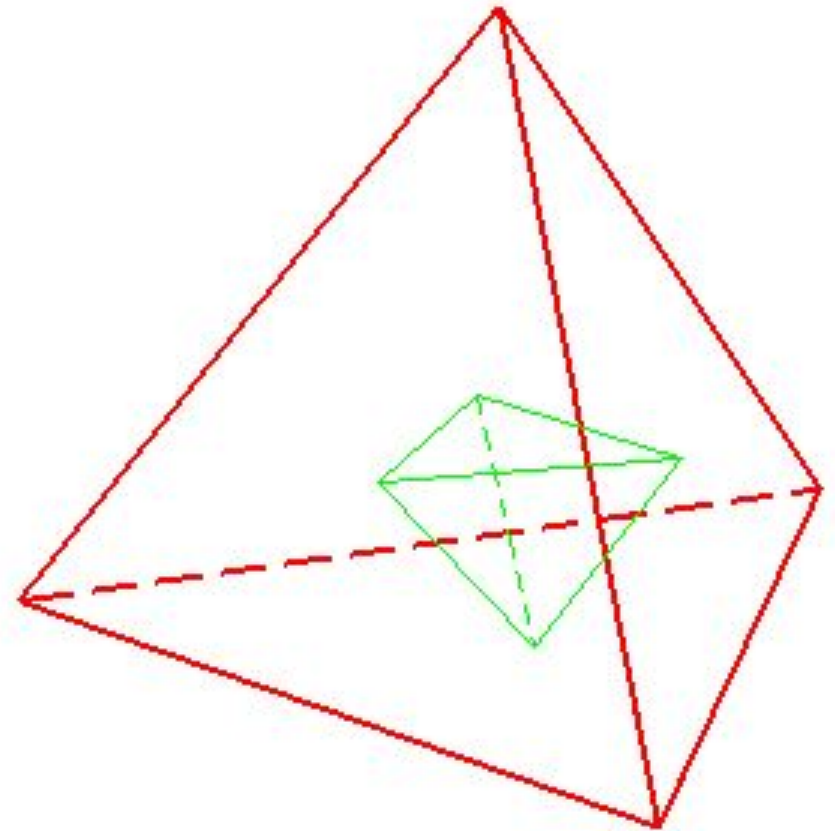
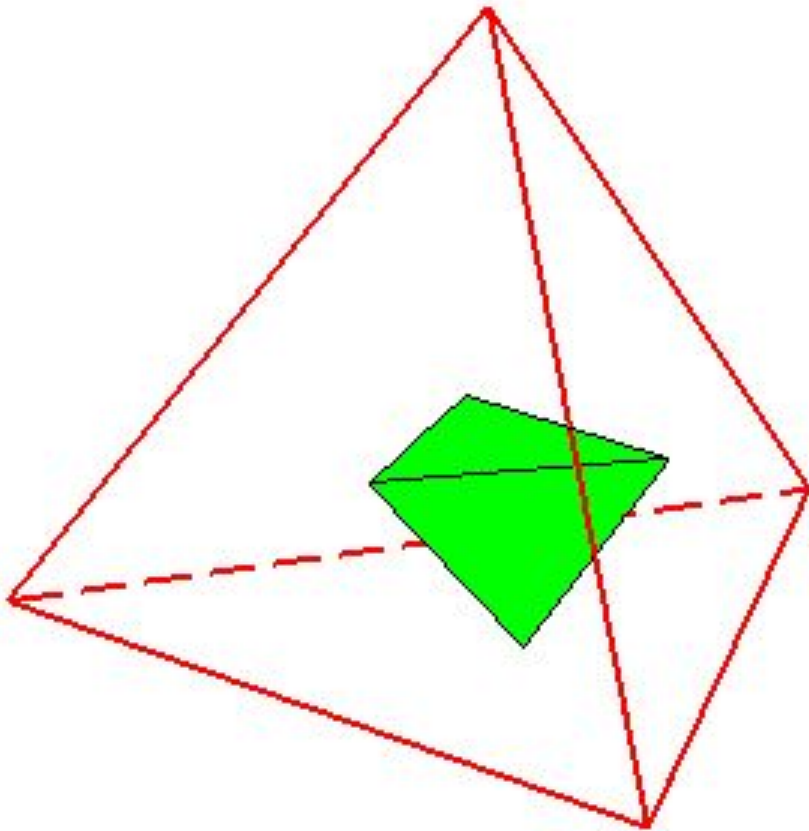
Ребро октаэдра равно 1. Найдите ребро двойственного куба.



Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

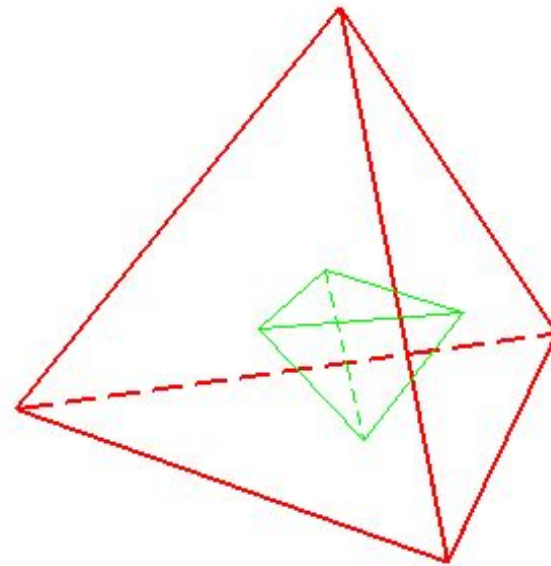
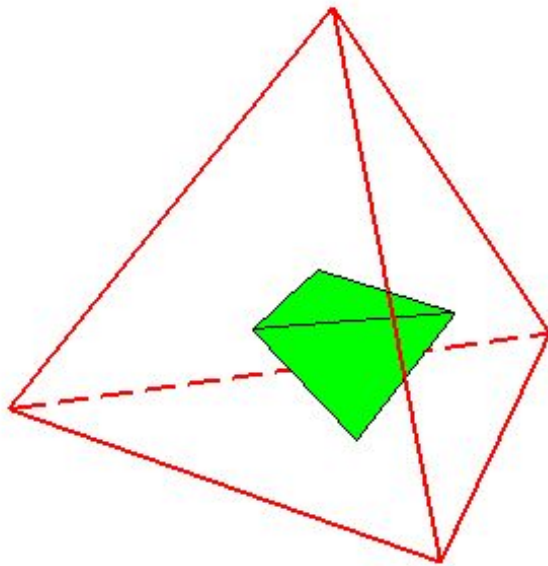
# Тетраэдр и тетраэдр

Тетраэдр двойственен сам себе. Центры его граней являются вершинами тетраэдра.



## Упражнение 22

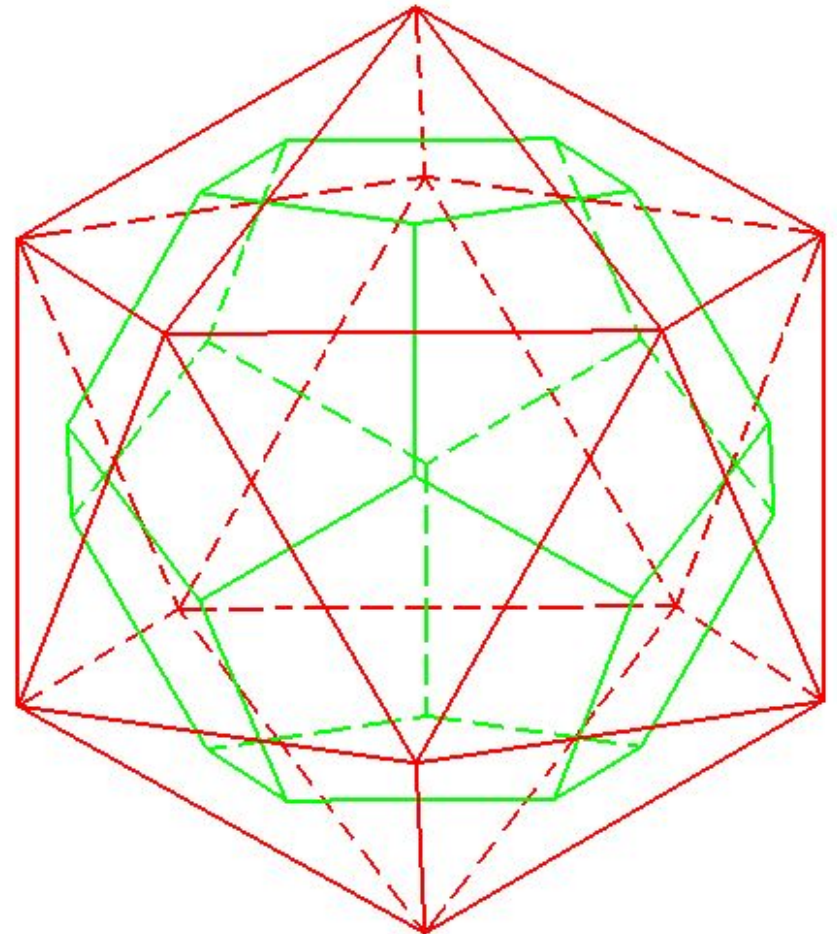
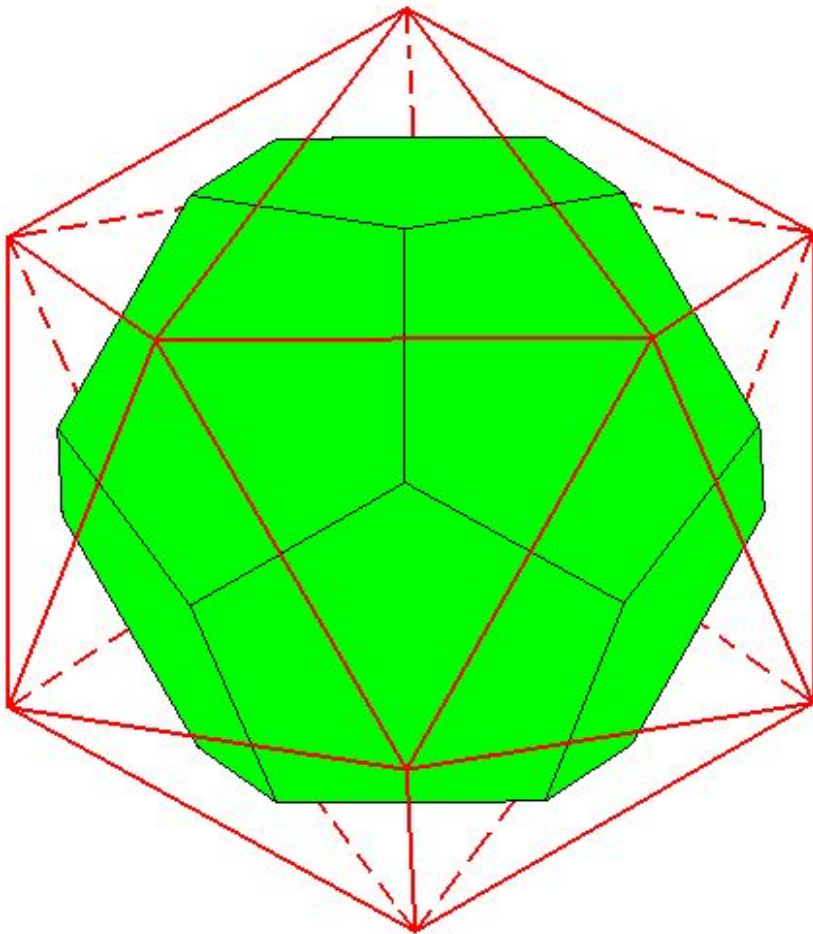
Ребро тетраэдра равно 1. Найдите ребро двойственного тетраэдра.



Ответ:  $\frac{1}{3}$ .

# Икосаэдр и додекаэдр

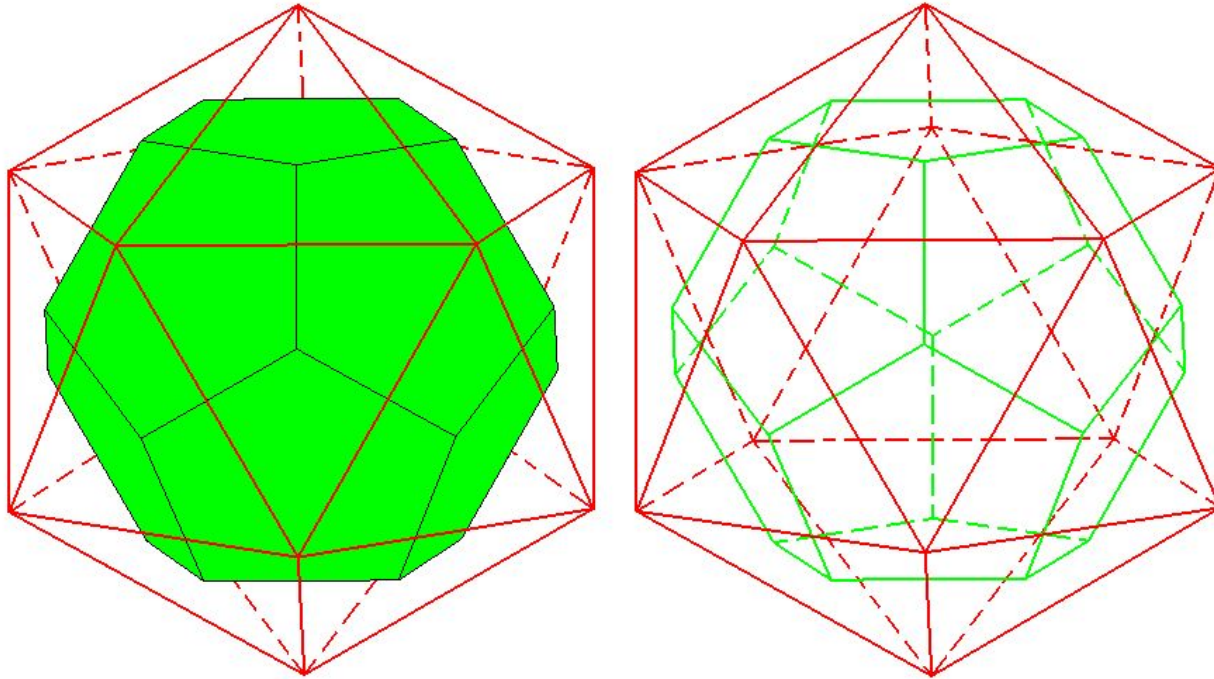
Икосаэдр и додекаэдр являются взаимно двойственными многогранниками. Центры граней икосаэдра являются вершинами додекаэдра.





## Упражнение 23

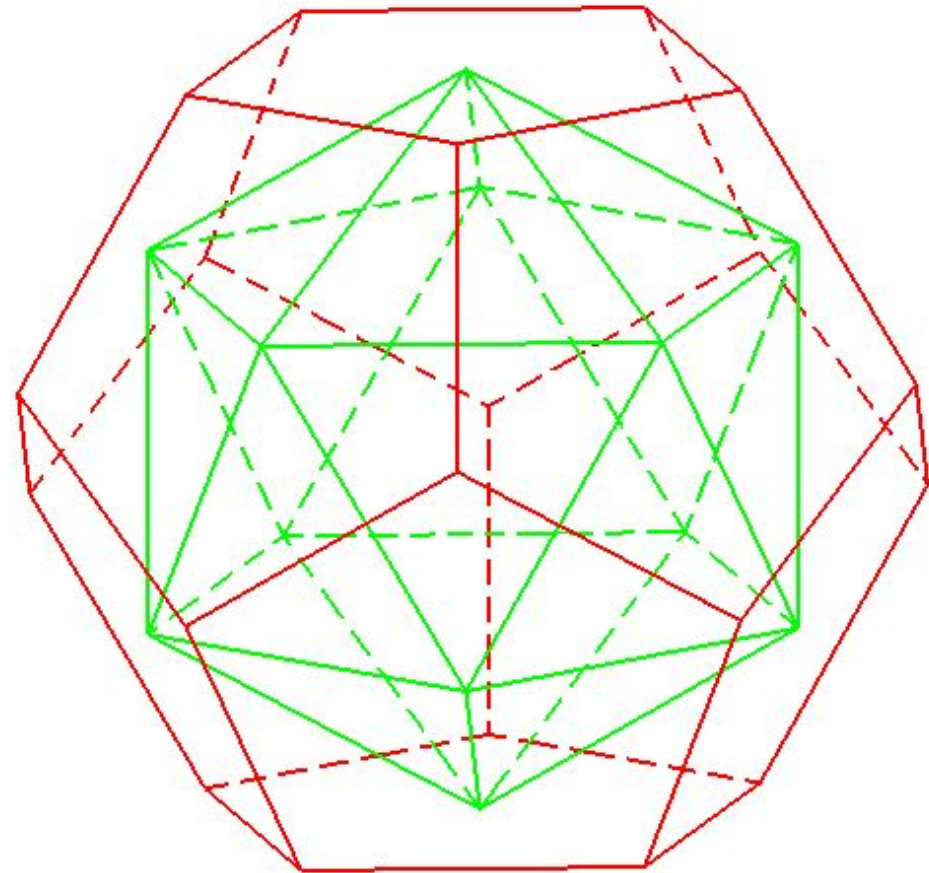
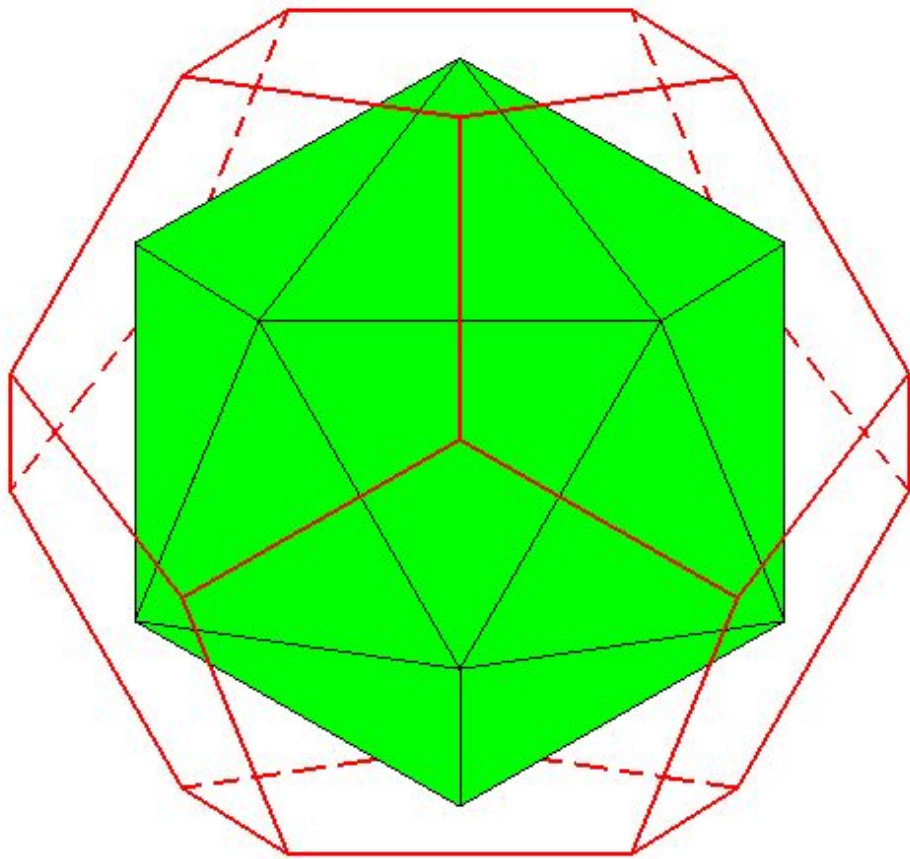
Ребро икосаэдра равно 1. Найдите ребро двойственного додекаэдра.



Ответ:  $\frac{1+\sqrt{5}}{6}$ .

# Додекаэдр и икосаэдр

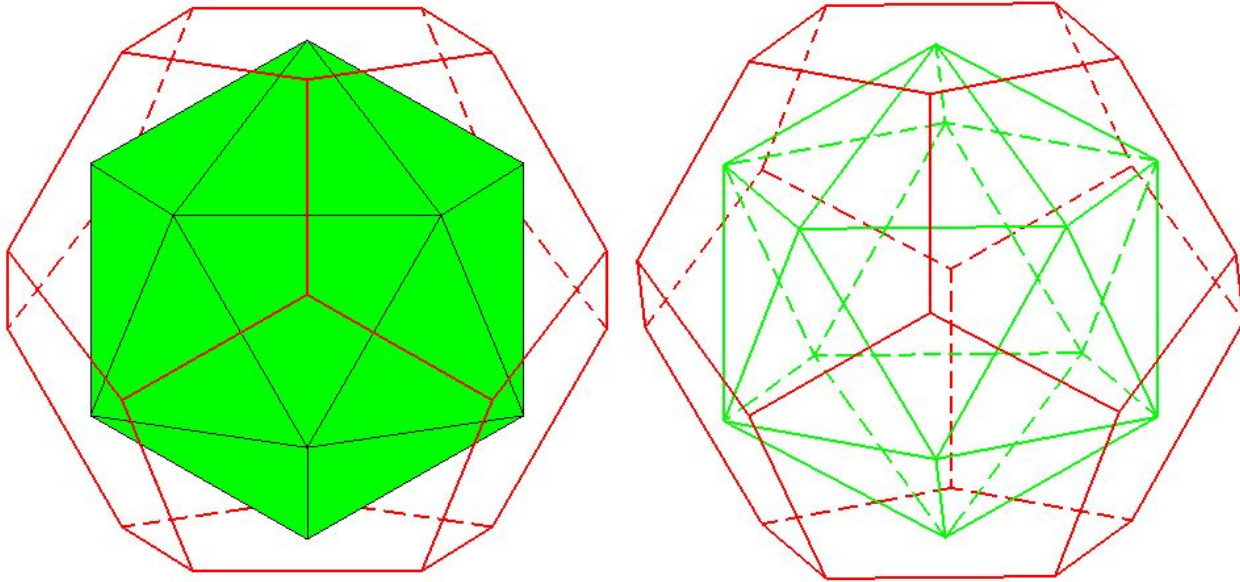
Центры граней додекаэдра являются вершинами икосаэдра.





## Упражнение 24

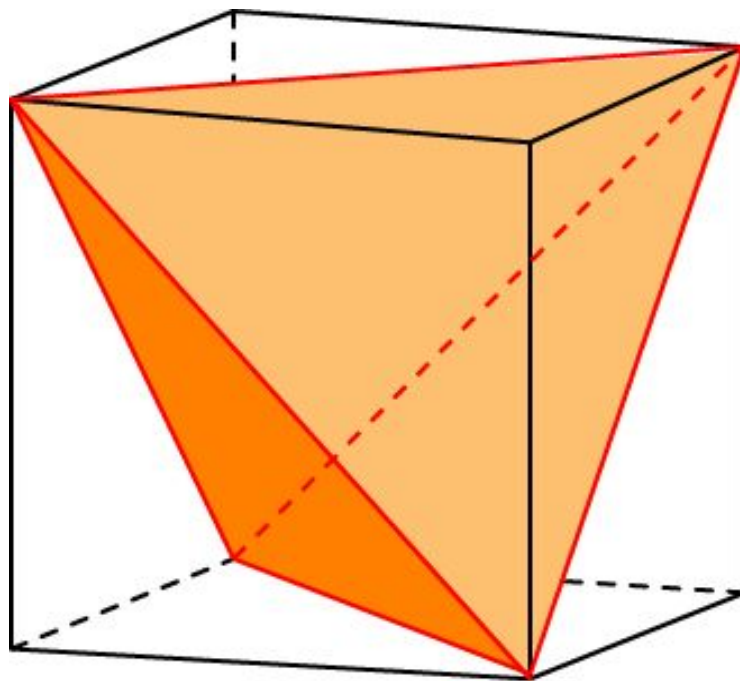
Ребро додекаэдра равно 1. Найдите ребро двойственного икосаэдра.



Ответ:  $\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$ .

## Упражнение 25

Через ребра правильного тетраэдра проведены плоскости параллельные противоположным ребрам. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?

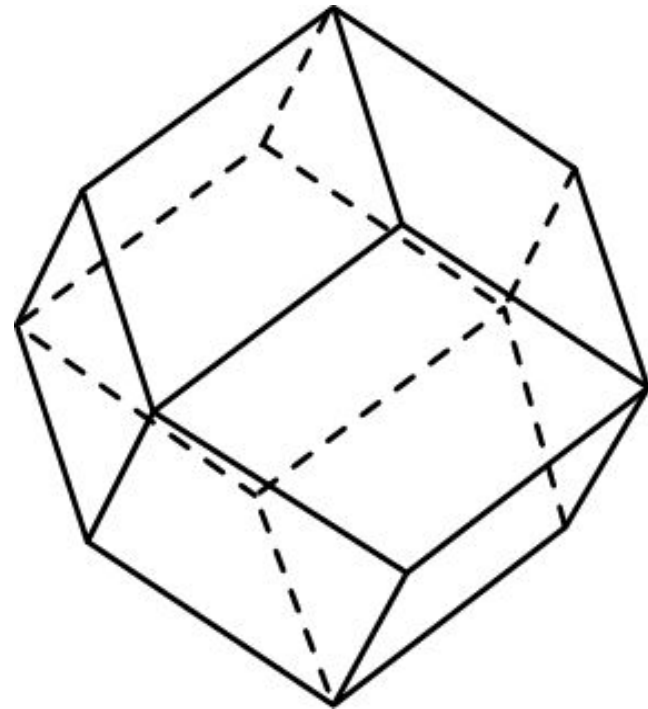


Ответ: Куб.

## Упражнение 26

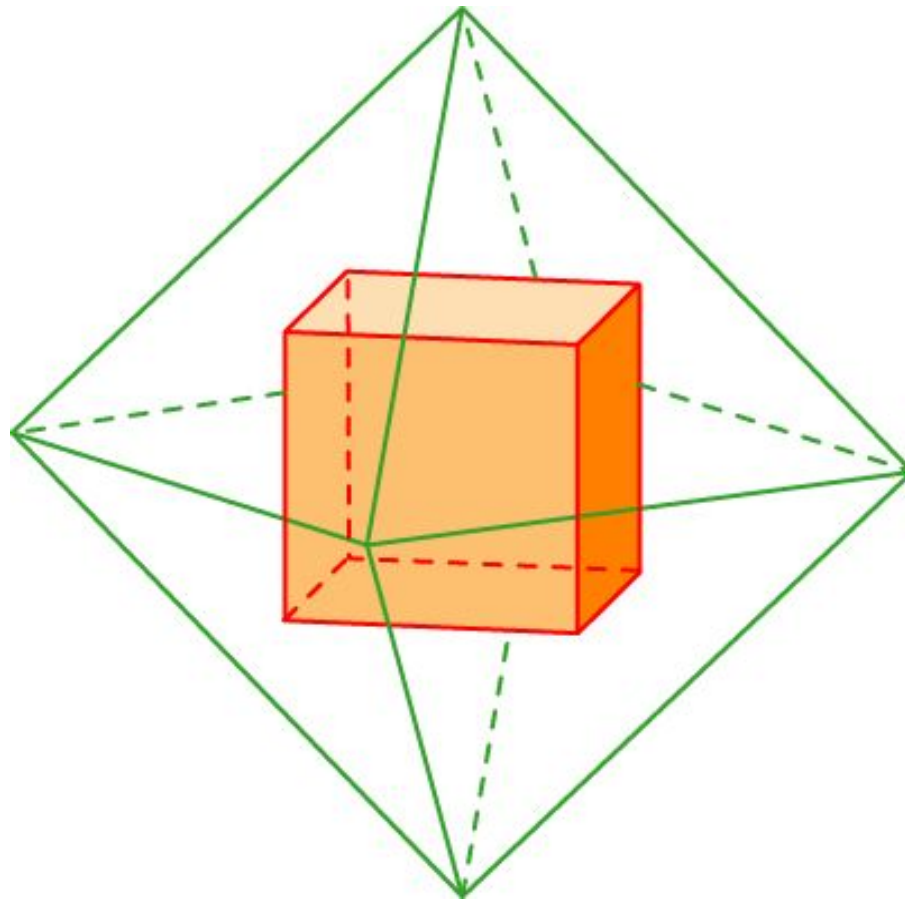
Через середины двух ребер куба, выходящих из одной вершины, параллельно третьему ребру, выходящему из той же вершины куба, проведено сечение, отсекающее от куба треугольную призму. Такие же сечения проведены через все возможные пары середин ребер, выходящих из вершин куба. Опишите многогранник, который останется от куба в результате этих отсечений. Сколько у него вершин, ребер и граней? Какую форму имеют грани? Нарисуйте этот многогранник.

**Ответ:** Полученный многогранник имеет 14 вершин, 24 ребра и 12 граней. Гранями являются равные ромбы.



## Упражнение 27

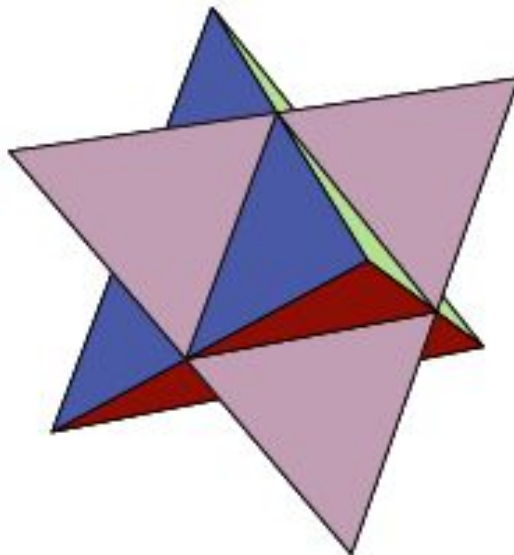
Через вершины куба, перпендикулярно его диагоналям, проходящим через эти вершины, проведены плоскости. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?



**Ответ:** Октаэдр.

## Упражнение 28

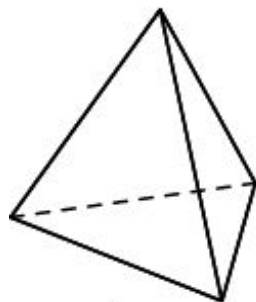
На рисунке изображен многогранник – звезда Кеплера, являющийся объединением двух тетраэдров. Какой многогранник является общей частью (пересечением) этих тетраэдров?



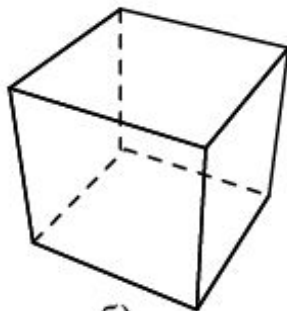
**Ответ:** Октаэдр.

## Упражнение 29

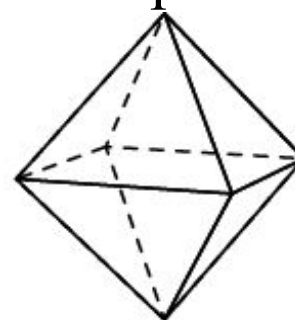
Окраска граней многогранника называется правильной, если соседние грани имеют разные цвета. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней:



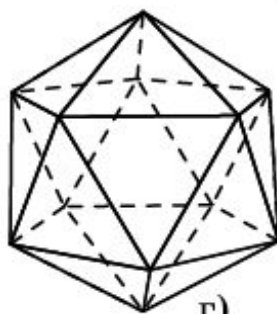
а)



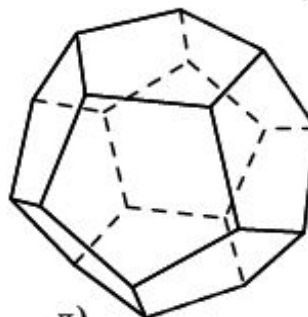
б)



в)



г)



д)

- а) тетраэдра;
- б) куба;
- в) октаэдра;
- г) икосаэдра;
- д) додекаэдра?

Ответ: 4.

Ответ: 3.

Ответ: 2.

Ответ: 3.

Ответ: 4.