

Правильные многогранники



часть 1 - Платоновы тела

Выполнила ученица 5б класса Грязнова Татьяна

Виды правильных многогранников

Многогранник - геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками, называемыми гранями. Стороны граней называются ребрами многогранника, а концы ребер — вершинами многогранника.

Многогранник называется выпуклым, если он весь расположен по одну сторону от плоскости каждой из его граней.

Многогранник называется правильным, если:

1. он выпуклый
2. все его грани являются равными [правильными многоугольниками](#)
3. в каждой его вершине сходится [одинаковое число граней](#)
4. все его двугранные [углы равны](#)

Существует всего пять правильных многогранников:

Название каждого многогранника происходит от греческого наименования количества его граней и слова грань - эдра:

тетра – 4,

гекса – 6

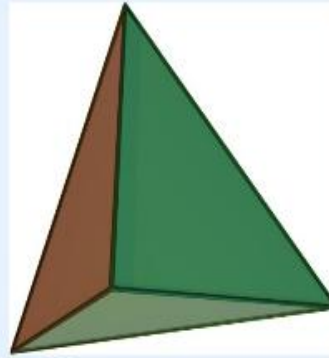
окто – 8

додек – 12

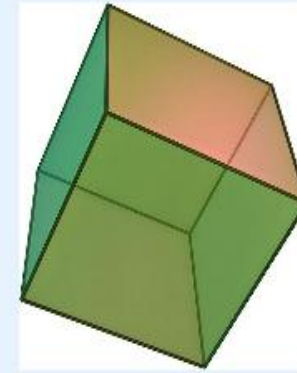
икоси - 20

Они имеют одинаковые свойства:

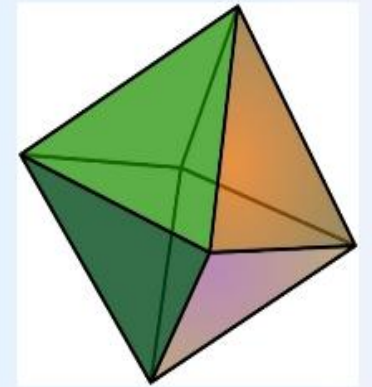
- Все грани имеют один и тот же размер
- Все ребра имеют одинаковую длину
- Все углы тела равны
- Все тела можно вписать в сферу



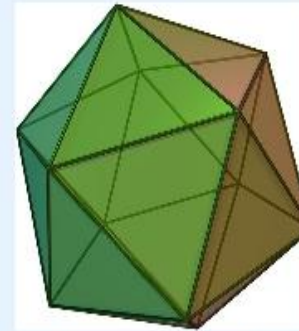
Тетраэдр



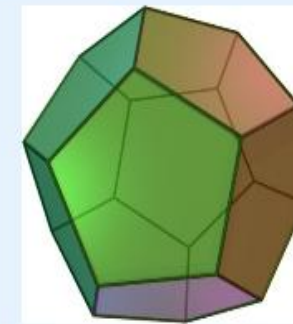
Гексаэдр или Куб



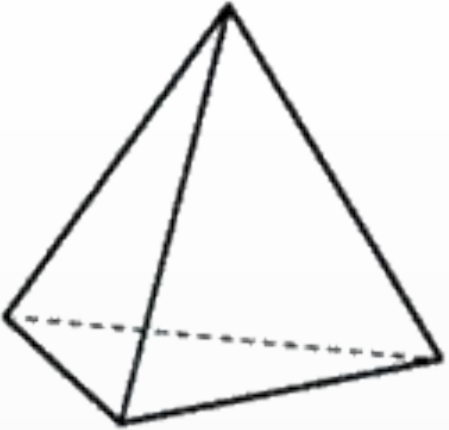
Октаэдр



Икосаэдр



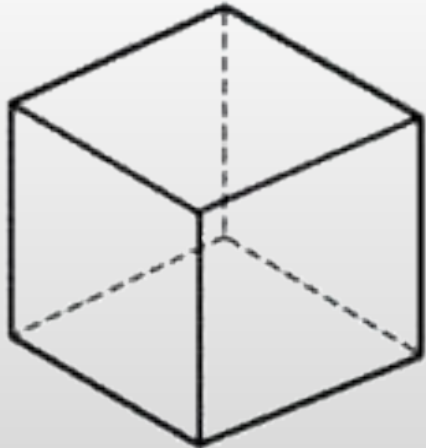
Додекаэдр



Тетраэдр

Тетраэдр

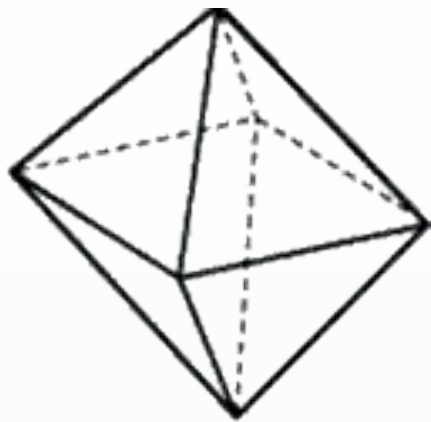
Простейшим среди правильных многогранников является тетраэдр.. Его четыре грани – равносторонние треугольники. Каждая его вершина является вершиной трех треугольников. Все многогранные углы тетраэдра равны между собой. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180° . Таким образом, тетраэдр имеет **4 грани, 4 вершины и 6 ребер**.



Куб

Гексаэдр

Гексаэдр или куб составлен из шести квадратов. Каждая его вершина является вершиной трех квадратов. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 270° . Таким образом, куб имеет **6 граней, 8 вершин и 12 ребер**

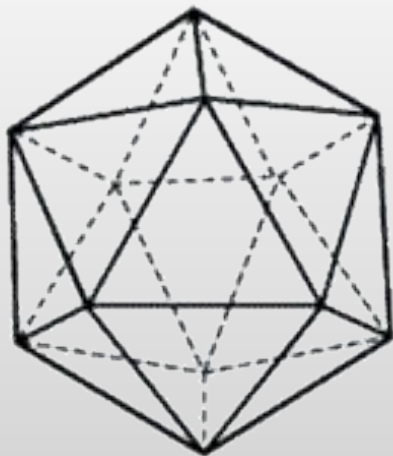


Октаэдр

Октаэдр

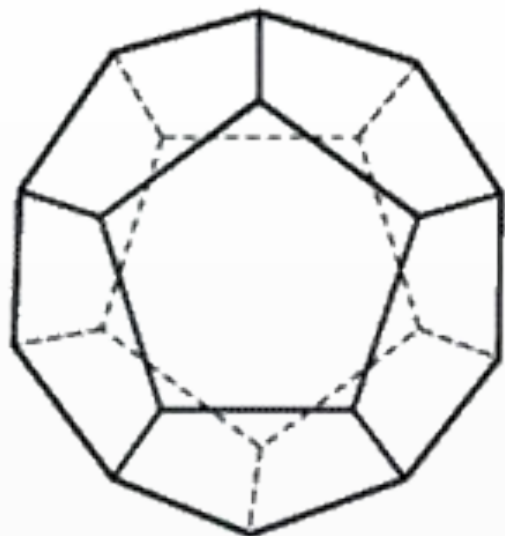
Октаэдр составлен из восьми равносторонних треугольников.. Каждая его вершина является вершиной четырех треугольников. Противоположные грани лежат в параллельных плоскостях. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 240° . Таким образом, октаэдр имеет **8 граней, 6 вершин и 12 ребер**.

Икосаэдр



Икосаэдр

Икосаэдр – одно из пяти платоновых тел, по простоте следующее за тетраэдром и октаэдром. Икосаэдр составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной пяти треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 300° . Таким образом, икосаэдр имеет **20 граней, 12 вершин и 30 ребер**.



Додекаэдр

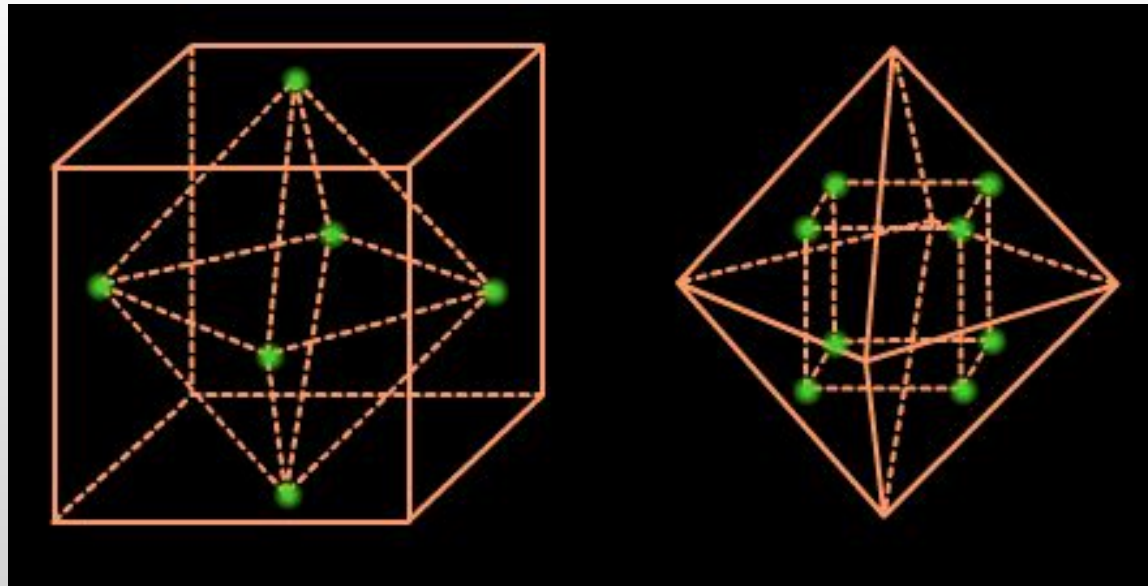
Додекаэдр

Додекаэдр составлен из двенадцати равносторонних пятиугольников. Каждая его вершина является вершиной трех пятиугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 324° . Таким образом, додекаэдр имеет **12 граней, 20 вершин и 30 ребер.**

| Изображение | Название | Число сторон у грани | Число рёбер, примыкающих к вершине | Общее число вершин | Общее число рёбер | Общее число граней |
|---|-------------------------|----------------------|------------------------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
|  | <u>Тетраэдр</u> | 3 | 3 | 4 | 6 | 4 |
|  | Гексаэдр или <u>куб</u> | 4 | 3 | 8 | 12 | 6 |
|  | <u>Октаэдр</u> | 3 | 4 | 6 | 12 | 8 |
|  | <u>Додекаэдр</u> | 5 | 3 | 20 | 30 | 12 |
|  | <u>Икосаэдр</u> | 3 | 5 | 12 | 30 | 20 |

Свойство взаимности Платоновых тел

Октаэдр тесно связан с **кубом** так называемым свойством взаимности: центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра, а центры граней правильного октаэдра являются вершинами куба. Если соединять отрезками центры соседних граней куба, то эти отрезки станут ребрами октаэдра; если проделать ту же операцию с октаэдром, получится куб. Число вершин октаэдра равно числу граней куба, и наоборот; более того, количества ребер у них совпадают.



Так же свойством взаимности связаны **додекаэдр** и **икосаэдр**: центры граней **додекаэдра** являются вершинами **икосаэдра**, а центры граней **икосаэдра** – вершинами **додекаэдра**.

Особняком стоит **тетраэдр**: если соединить отрезками центры его граней, то вновь получится **тетраэдр**.

Куб и **октаэдр**, **додекаэдр** и **икосаэдр** – это две пары **двойственных** многогранников. У них одинаковое число рёбер (12 – у куба и октаэдра; 30 – у додекаэдра и икосаэдра), а числа вершин и граней переставлены.

Тetraэдр двойствен сам себе.

Немного истории

Правильные многогранники известны с древнейших времён. Они уже были известны людям неолита, по крайней мере, за 1000 лет до Платона. Найдены древние сферические камни, которые покрыты геометрически точными фигурами куба, тетраэдра, октаэдра, икосаэдра и додекаэдра.

Но почему они называются Платоновыми телами?

Эти правильные многогранники получили такое название по имени древнегреческого философа **Платона** (428-348 до н э.), который придавал им мистический смысл.

Он считал, что вся Вселенная имеет форму додекаэдра, а материя состоит из атомов, которые имеют форму тетраэдров, кубов, октаэдров и икосаэдров.

Для возникновения данных ассоциаций были следующие причины:

Тетраэдр - олицетворял огонь, поскольку его вершина устремлена вверх, как у разгоревшегося пламени, жар огня ощущается чётко и остро (как маленькие тетраэдры).

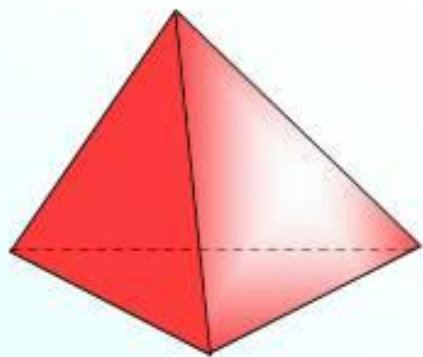
Икосаэдр - как самый обтекаемый – воду, вода выливается, если её взять в руку, как будто она сделана из множества маленьких шариков (к которым ближе всего икосаэдры).

Гексаэдр - самая устойчивая из фигур - землю.

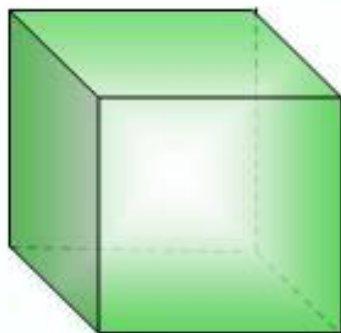
Октаэдр – воздух, его мельчайшие компоненты настолько гладкие, что их с трудом можно почувствовать; .

Додекаэдр отождествлялся со всей Вселенной и почитался главнейшим.

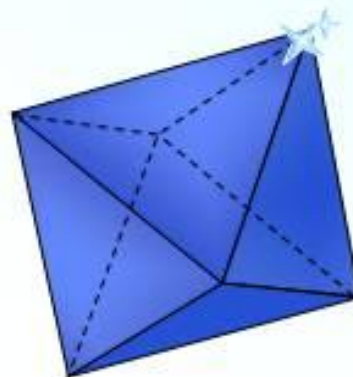
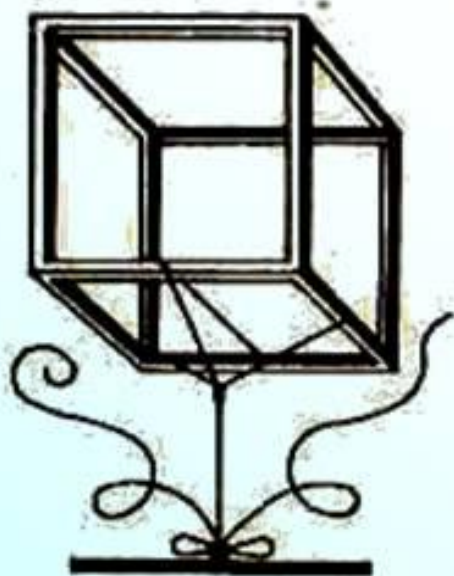
Примечательно, что все пять Платоновых тел в разные времена использовались в качестве игральные костей.



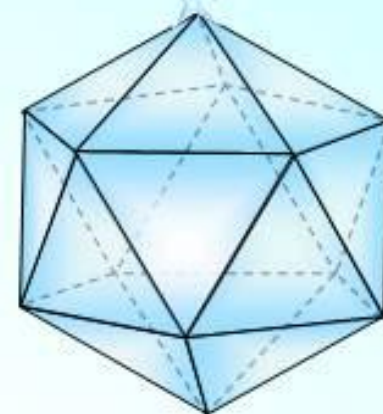
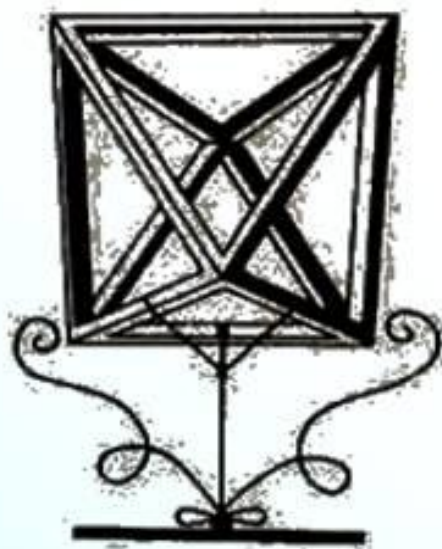
ОГОНЬ



земля



ВОЗДУХ



ВОДА



Следующий серьезный шаг в науке о многогранниках был сделан в XVIII веке Леонардом Эйлером, который «проверил алгеброй гармонию».

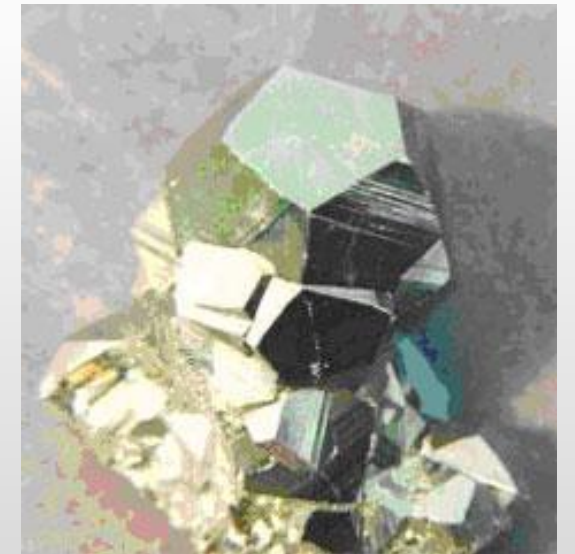
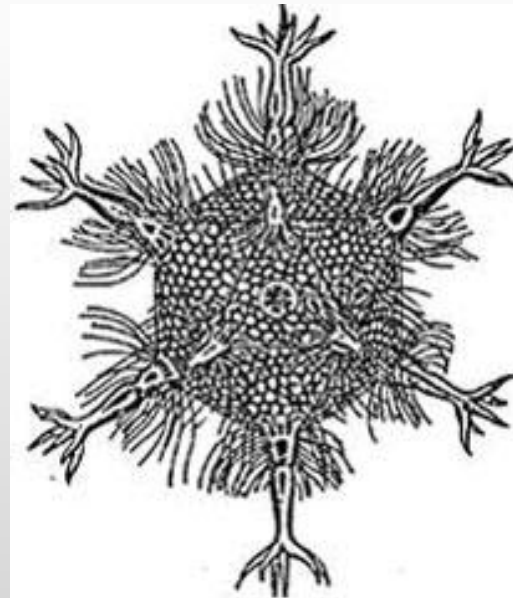
Теорема Эйлера о соотношении между числом вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, навела математический порядок в мире многогранников.

$$\mathbf{Вершины + Грань - Рёбра = 2.}$$

Эта формула верна для любого многогранника.

Правильные многогранники встречаются в живой природе. Например, скелет одноклеточного организма феоцитарии по форме напоминает **икосаэдр**.

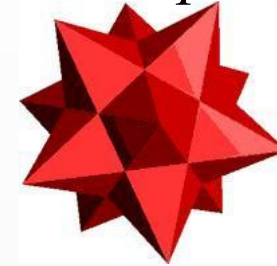
Кристалл пирита (сернистого колчедана,) имеет форму **додекаэдра**.



Часть 2 - Тела Кеплера - Пуансо

Иоганн Кеплер, для которого правильные многогранники были любимым предметом изучения, развил учение о *двух* видах *выпуклых звездчатых многогранников*.

В 1619 году им были открыты [малый звёздчатый додекаэдр](#)



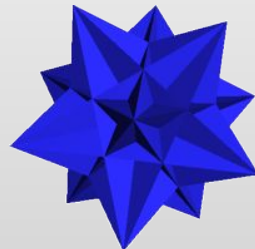
и [большой звёздчатый додекаэдр](#)



И только почти 200 лет спустя другой ученый Луи Пуансо открыл [большой додекаэдр](#)



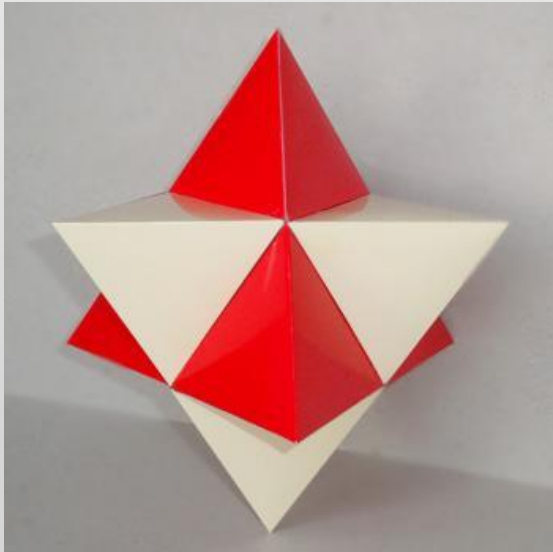
и [большой икосаэдр](#).



Эти 4 многогранника получаются из Платоновых тел **додекаэдра и икосаэдра** продлением их граней до пересечения друг с другом, и потому называются звездчатыми.

Куб и **тетраэдр** не дают новых тел - грани их, сколько ни продолжай, не пересекаются.

Звёздчатый октаэдр.



Его не относят к телам Кеплера – Пуансо, так как дальнейшее продление граней октаэдра не приводит к созданию **нового** многогранника. Октаэдр имеет только одну звездчатую форму.

Можно рассматривать как соединение двух пересекающихся тетраэдров, центры которых совпадают с центром исходного октаэдра.

Такой звездчатый многогранник открыл еще Леонардо да Винчи, затем спустя почти 100 лет описал **Кеплер** и назвал его **восьмиугольная звезда** .