

кафедры высшей математики-1 МИЭТ  
под руководством  
проф. Гончарова В.А., проф. Кожухова И.Б. и проф. Поспелова А.  
С.  
24 ноября, 2009 г.

# Правильные многогранники в четырехмерном пространстве

*«В огромном саду геометрии  
каждый найдет букет себе по*

*вкусу.»*

*Давид*

*Гильберт*

**Сергей Александрович Лавренченко  
(С. А. Л.)**

# Абстрактный Тороидальный

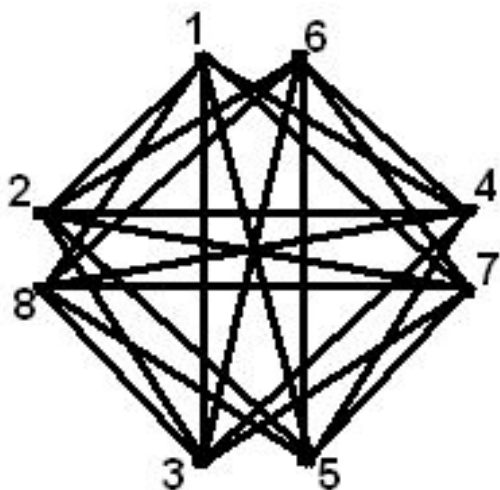
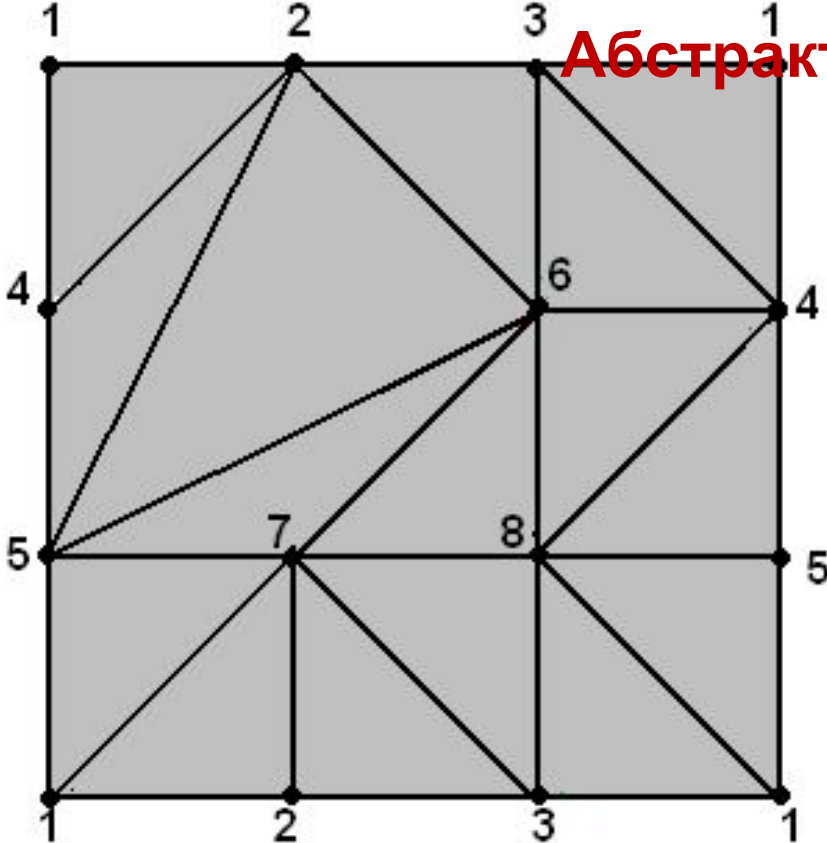
## Гексадекаэдр — это

комбинаторно-топологический объект — правильная триангуляция тора с 8 вершинами и 16 гранями.

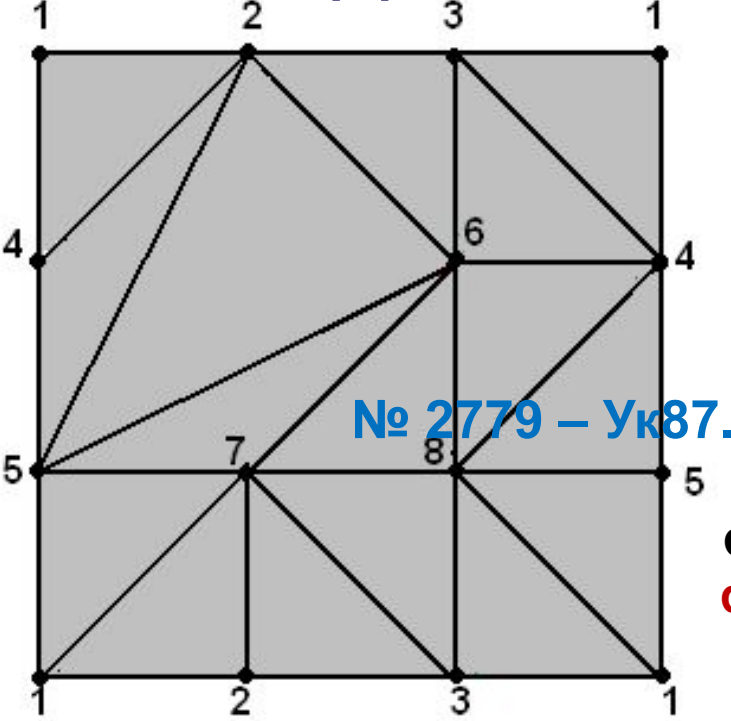
С. А. Л., Неприводимые триангуляции тора, Укр. геометр. сб. 30 (1987) 52–62.

■ АТГ — правильная карта на торе: каждая грань — треугольник и степень каждой вершины равна 6.

■ Ее граф изоморфен 1-скелету гексадекахорона, т.е. полному 4-дольному графу  $K_{\{2,2,2,2\}}$ .



Все ее автоморфизмы найдены при помощи компьютера:

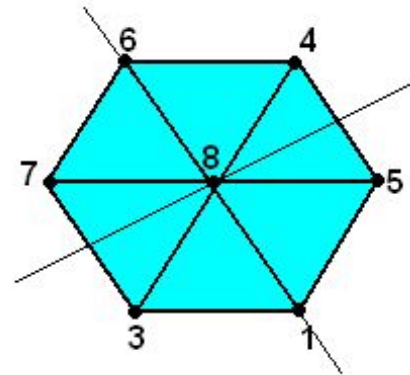
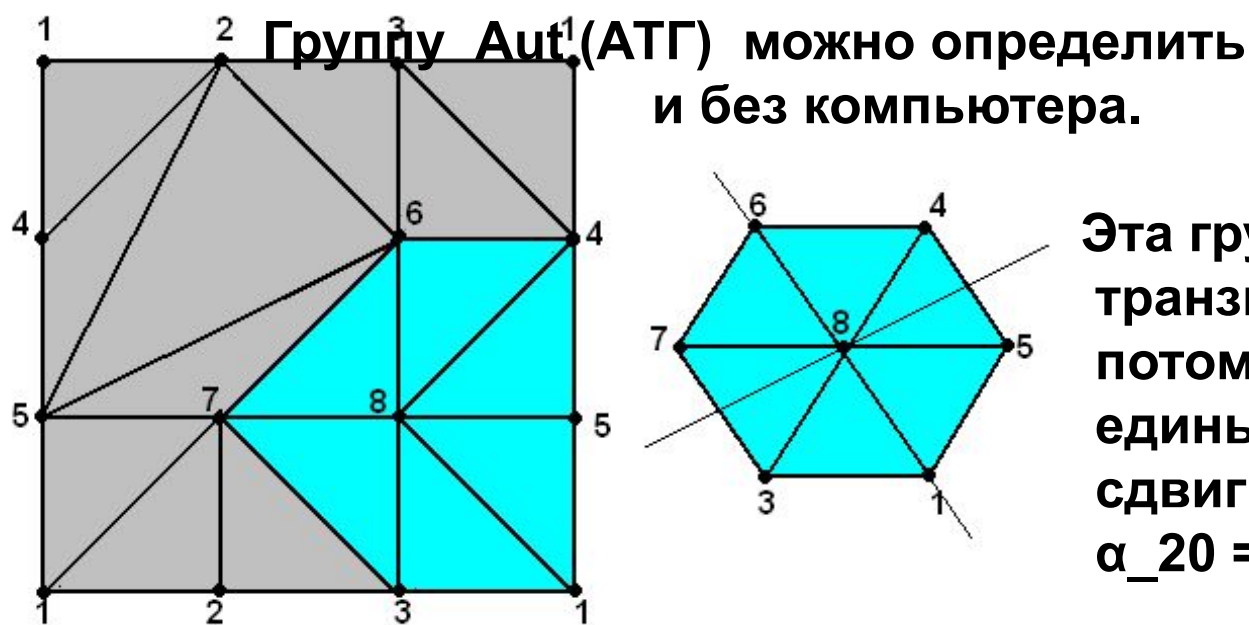


№ 2779 – Ук87.

С. А. Л., Перечисление в явном виде всех автоморфизмов неприводимых триангуляций тора и всех укладок на тор помеченных графов этих триангуляций. Харьков, 1987. – 57 с., Деп. в УкрНИИНТИ 01.10.87,

$\alpha_1 = \text{id}$  (тождественный)  
 $\alpha_2 = (35) (47)$     $\alpha_3 = (28) (34) (57)$

- $\alpha_4 = (28) (37) (45)$     $\alpha_5 = (12) (47) (68)$     $\alpha_6 = (12) (35) (68)$
- $\alpha_7 = (1268) (3457)$     $\alpha_8 = (1268) (3754)$     $\alpha_9 = (13246587)$
- $\alpha_{10} = (13876524)$     $\alpha_{11} = (13) (27) (48) (56)$     $\alpha_{12} = (1365) (2784)$
- $\alpha_{13} = (14) (23) (58) (67)$     $\alpha_{14} = (1467) (2385)$     $\alpha_{15} = (14256783)$
- $\alpha_{16} = (14836725)$     $\alpha_{17} = (1563) (2487)$     $\alpha_{18} = (15) (24) (36) (78)$
- $\alpha_{19} = (15846327)$     $\alpha_{20} = (15276384)$     $\alpha_{21} = (16) (34) (57)$
- $\alpha_{22} = (16) (37) (45)$     $\alpha_{23} = (16) (28)$     $\alpha_{24} = (16) (28) (35) (47)$
- $\alpha_{25} = (17856423)$     $\alpha_{26} = (17236485)$     $\alpha_{27} = (1764) (2583)$
- $\alpha_{28} = (17) (25) (38) (46)$     $\alpha_{29} = (1862) (3457)$     $\alpha_{30} = (1862) (3754)$
- $\alpha_{31} = (18) (26) (47)$     $\alpha_{32} = (18) (26) (35)$



Эта группа вершинно-транзитивная, потому что в ней есть единый циклический сдвиг всех вершин:  $\alpha_{20} = (15276384)$ .

Подгруппа  $\text{Shift} = \langle \alpha_{20} \rangle \approx \mathbb{Z}_8$ . Она ненормальна.

С другой стороны, стабилизатор каждой вершины есть подгруппа изоморфная  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , ненормальная.

Например, стабилизатор вершины 8, есть подгруппа

$\text{Stab} = \langle \alpha_2, \alpha_{22} \rangle \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ,

порожденная 2-мя инволюциями  $\alpha_2 = (35)(47)$  и  $\alpha_{22} = (16)(37)(45)$  (реализуемыми геометрически «симметриями относительно перпендикулярных прямых»). Эта подгруппа ненормальна.

Таким образом, группа  $\text{Aut}(\text{АТГ})$  может быть порождена так:

$$\begin{aligned}\text{Aut}(\text{АТГ}) &= \langle \alpha_2, \alpha_{22}, \alpha_{20} \rangle \\ &= (Z_2 \times Z_2) Z_8,\end{aligned}$$

где  $Z_2 \times Z_2$  и  $Z_8$  — как указаны на предыдущем слайде, причем произведение на  $Z_8$  не является прямым.

Таким образом,

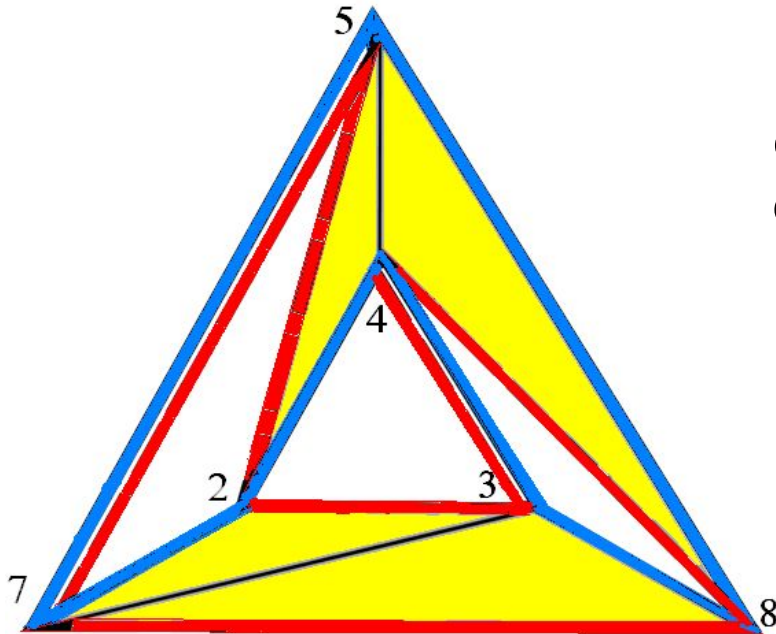
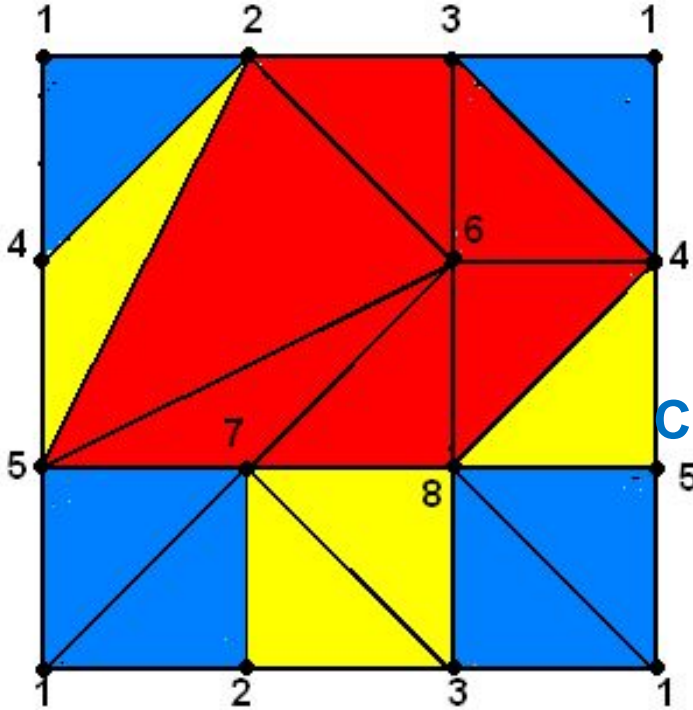
$$|\text{Aut}(\text{АТГ})| = |\text{Shift}| \cdot |\text{Stab}| : |\text{Shift} \cap \text{Stab}| = 8 \cdot 4 : 1 = 32.$$

# Бипирамидальный Торoidalный Гексадекаэдр (БТГ) —

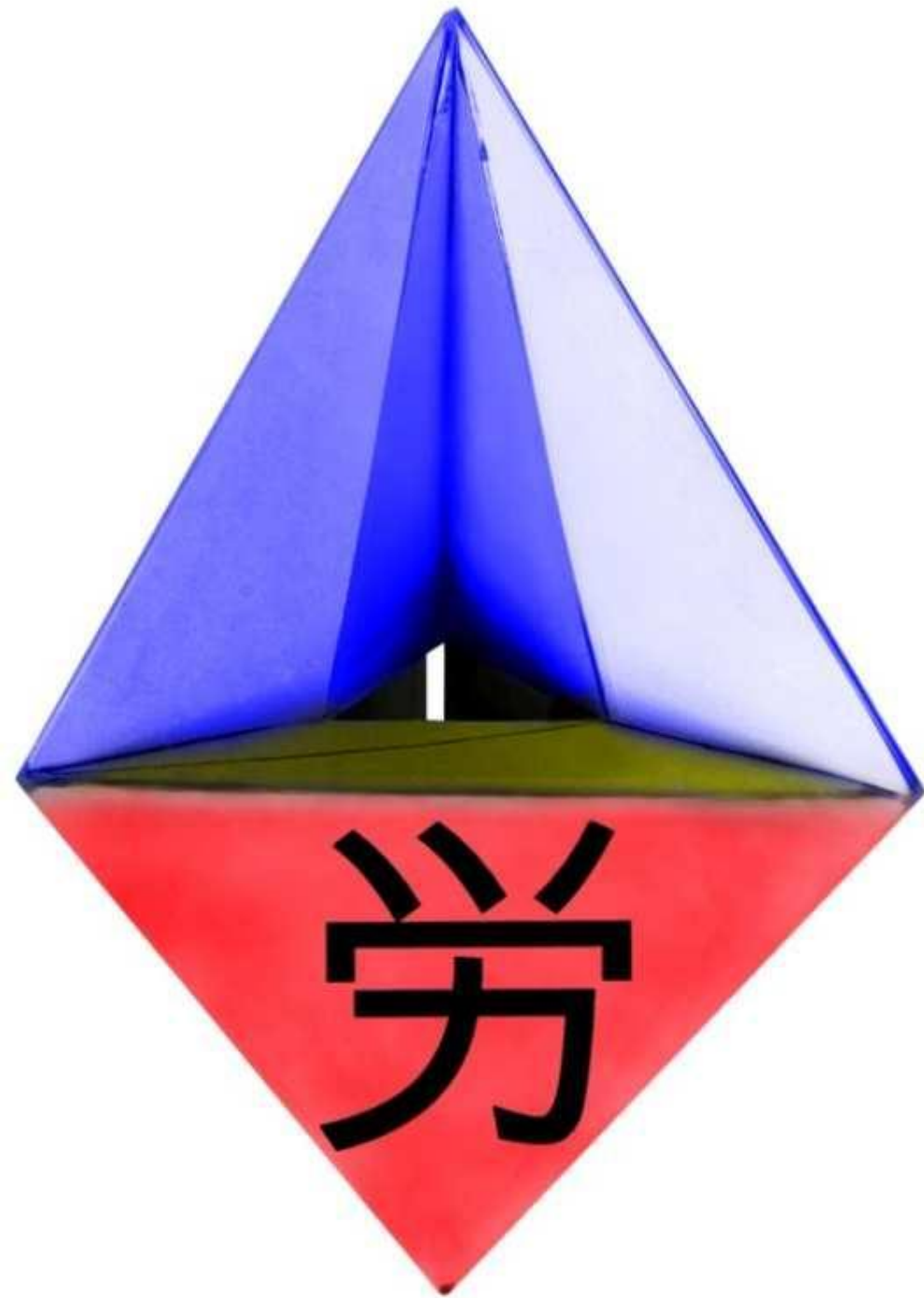
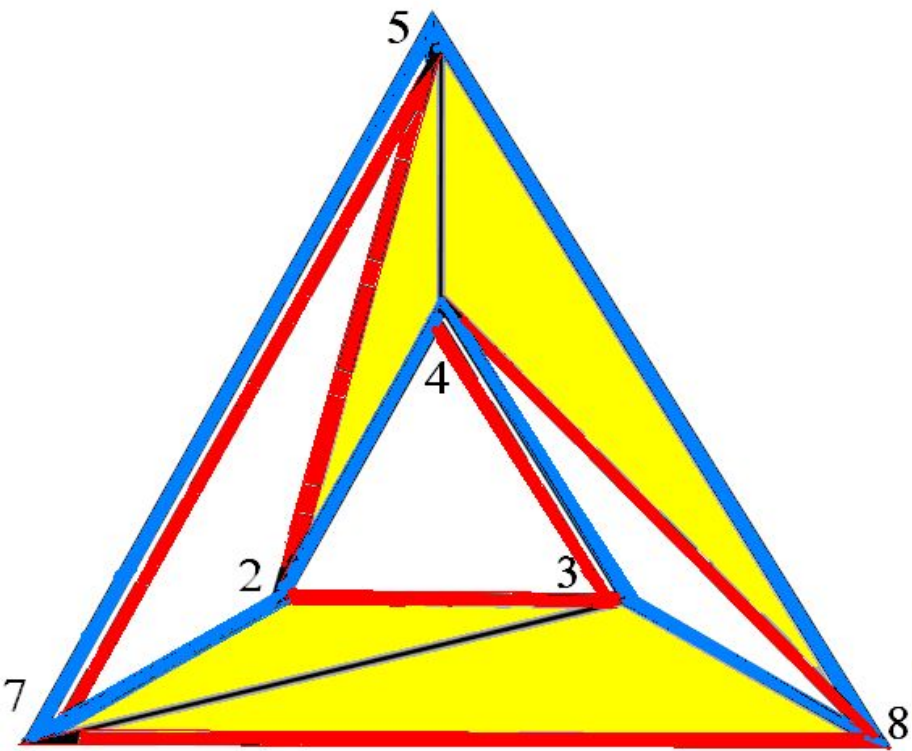
геометрическая модель АТГ

С. А. Л., Все неприводимые триангуляции тора реализуются в  $E^3$  в виде многогранников, манускрипт, Мехмат МГУ (1983).

Эта работа была выполнена под руководством профессора И. Х. Сабитова и заняла 2-е место в конкурсе научных студенческих работ за 1983 год, ежегодно проводимом Мехматом МГУ.



□ Экватор у БТГ





Мы делаем четкое различие между понятиями «автоморфизм» и «симметрия».

Далее, термин «симметрия» используется в широком смысле: для обозначения и настоящих симметрий, и вращений пространства.

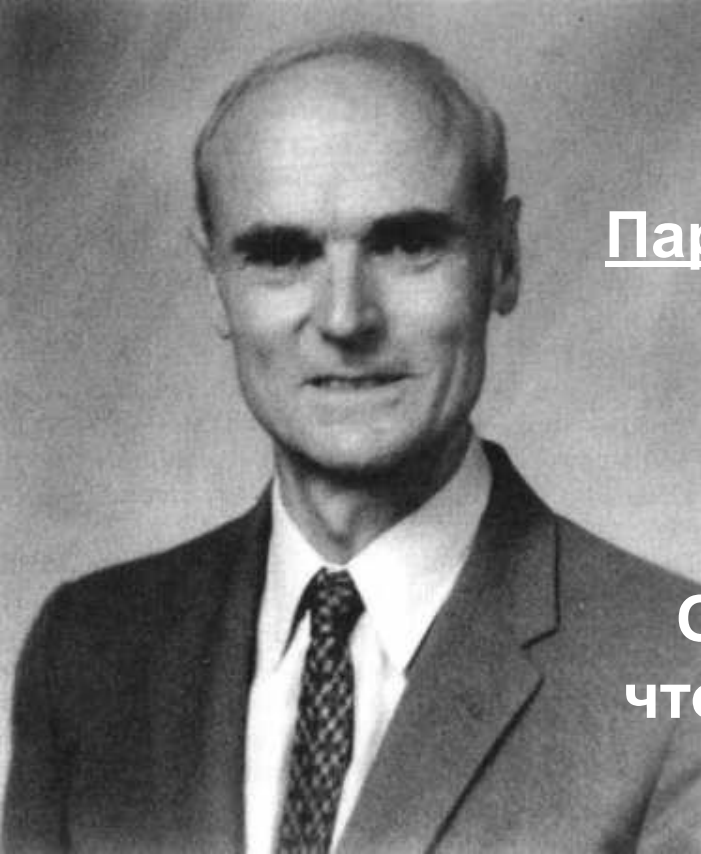
Ни один автоморфизм АТГ, кроме тождественного, не реализуется геометрически, т.е. движениями объемлющего 3-мерного пространства, переводящими БТГ в себя, поэтому  $\text{Sym}(\text{БТГ}) = \{ \text{id} \}$ .

Все автоморфизмы становятся скрытыми симметриями геометрической модели БТГ.





# Парадигма Кокстера



Парадигма Кокстера «групп и геометрии»

— это целостная система взглядов и положений по сближению и соединению алгебры с геометрией.

Одно из этих положений состоит в том, что **надо реализовывать геометрически не только сам комбинаторный или топологический объект, а также его автоморфизмы в виде геометрических симметрий его геометрической модели в пространстве.**

Хáролд Скoтт МакДóналд («Доналд») Кокстер (1907—2003).

- H.S.M. Coxeter, *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edit. 1991.
- H.S.M. Coxeter and W.O.J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer, Berlin 1980 (4th edit.)

# Борьба со скрытыми симметриями — путь претворения в жизнь парадигмы Кокстера.

Многогранные реализации групп правильных карт на 2-мерных поверхностях — вклад в развитие этой парадигмы.

Старая идея: Чтобы исключить скрытые симметрии, можно использовать модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. □



C. A. L., Plummer M.D., Zha X.: Isoperimetric constants of infinite plane graphs, *Discrete & Computational Geometry* 28 (3): 313-330 (2002)

**Борьба со скрытыми симметриями — путь претворения в жизнь парадигмы Кокстера.**

**Новая идея: Но что, если настаивать на том, чтобы оставаться в евклидовом пространстве? Это возможно! Но только, если достаточно увеличить размерность этого пространства.**

**(А не пытаться загнать объект в пространство заведомо меньшей размерности, как мы делали выше, строя БТГ.)**

Тор Клиффорда:  $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 = (x_3)^2 + (x_4)^2$ .

**Для 2-мерного тора более подходит евклидово 4-мерное пространство, чем 3-мерное.**

Например, АТГ не удастся вложить в 3-пространство без скрытых симметрий, а в 4-пространство уже можно.

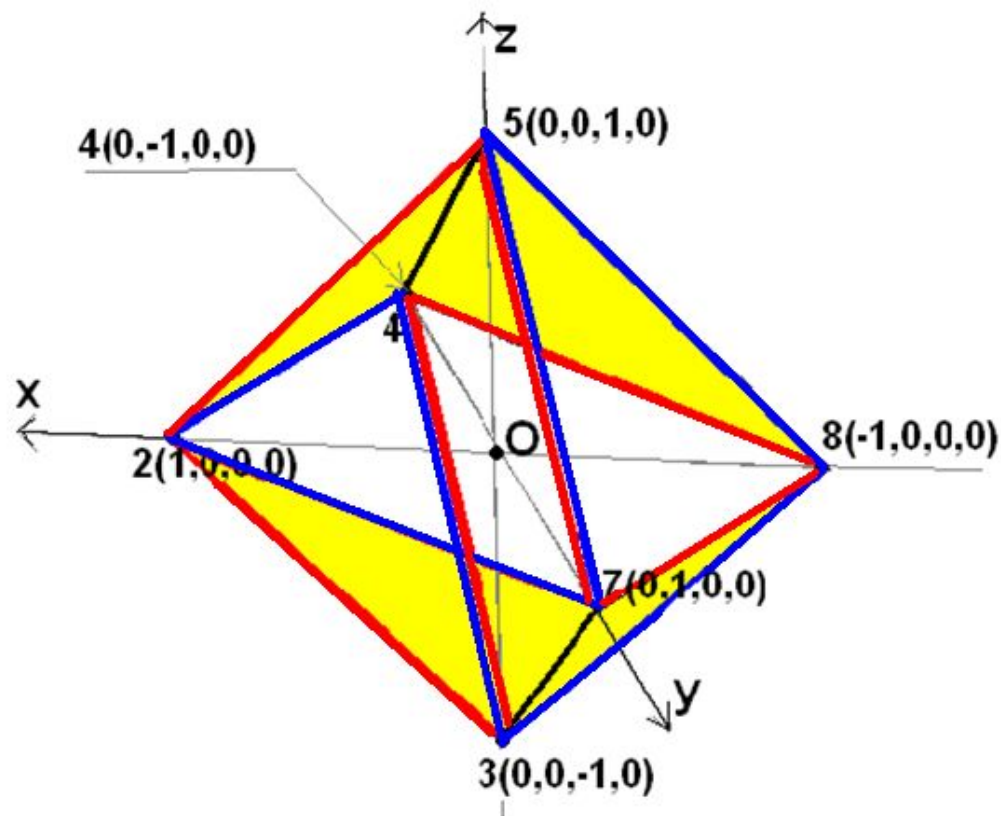
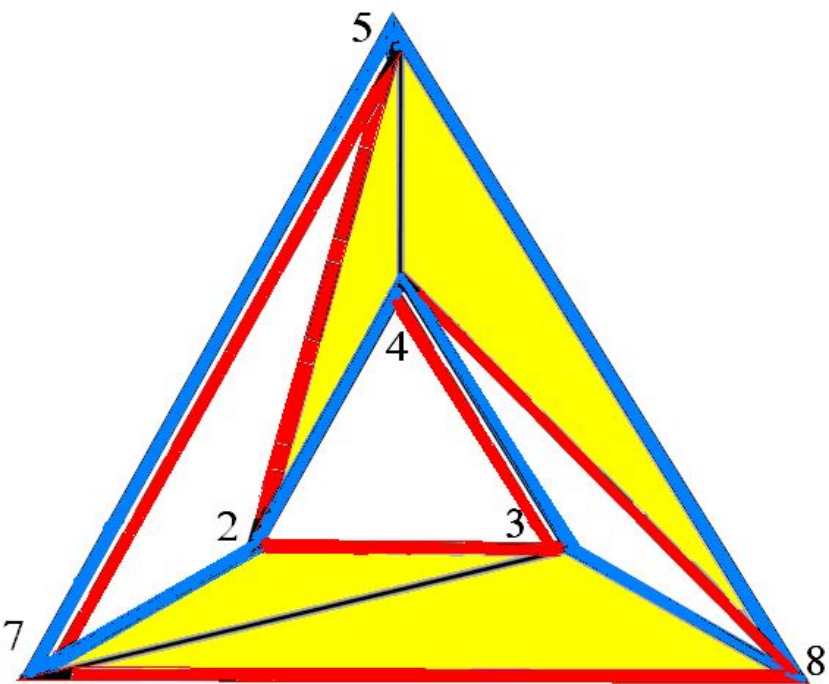
В 3-мерном пространстве тор переходит в себя только вращениями в направлении параллелей, а в 4-мерном пространстве также вращениями в направлении меридианов.

<http://alem3d.obidos.org/en/torusio/math>

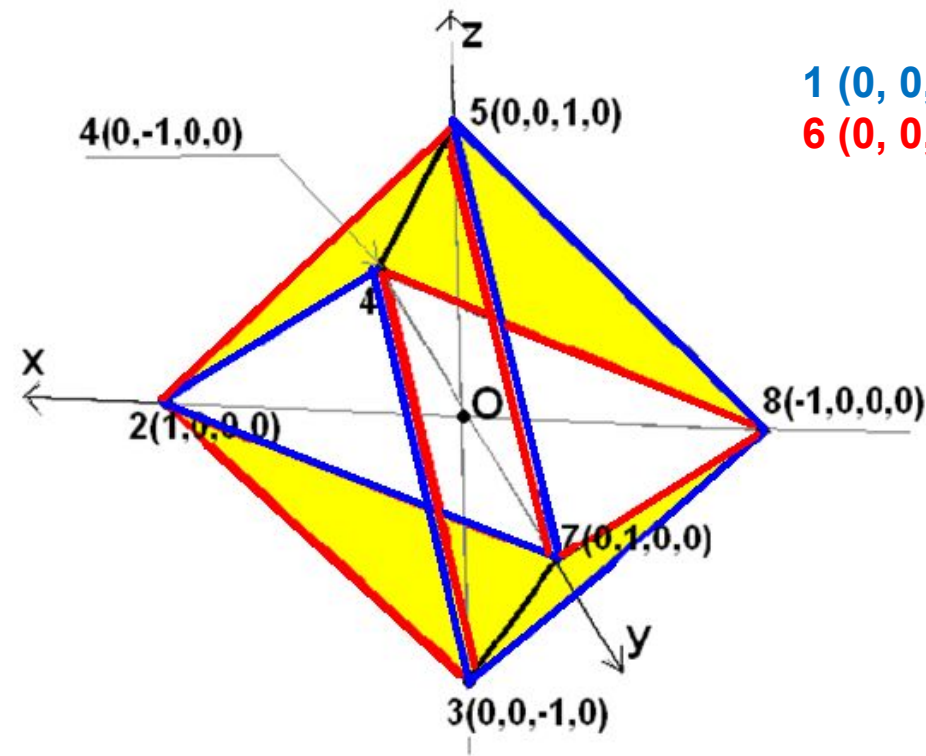
**С. А. Л., Polyhedral suspensions of arbitrary genus,  
Graphs & Combinatorics, 26 (2010), в печати.**

**Теорема (С. А. Л.): В евклидовом 4-мерном пространстве существует 2-мерный тороидальный многогранник с 8 вершинами и 16 треугольными гранями, имеющий следующие три свойства правильности. Этот многогранник будет называться **правильным тороидальным гексадекаэдром** и будет обозначаться **ПТГ**.**

- (1) Все грани ПТГ — равносторонние треугольники.**
  - (2) ПТГ не имеет скрытых симметрий в том смысле, что группа Aut (АТГ) точно представлена группой Sym (ПТГ) в 4-мерном пространстве.**
- ) Группа Sym (ПТГ) действует транзитивно на множестве вершин ПТГ.**



**Доказательство:** На рисунке справа — экватор БТГ переложен из 2-пространства в 3-пространство в геометрически симметричном виде, как 2-мерный подкомплекс октаэдра. Затем к координатам каждой вершины добавили четвертую координату  $w = 0$ , тем самым поместив экватор уже в 4-пространство. Две остающиеся вершины, **1** и **6**, располагаются на четвертой координатной оси  $Ow$  и имеют координаты  $(0, 0, 0, 1)$  и  $(0, 0, 0, -1)$ , соответственно.



1 (0, 0, 0, 1) — северный полюс  
 6 (0, 0, 0, -1) — южный полюс

АТГ реализуется как подкомплекс 2-мерного скелета **гексадекахорона** (или **4-мерного гипероктаэдра**) в 4-мерном пространстве.

Восемь вершин гексадекахорона:  
 $(\pm 1, 0, 0, 0), \quad (0, \pm 1, 0, 0),$   
 $(0, 0, \pm 1, 0), \quad (0, 0, 0, \pm 1).$

Все вершины соединены ребрами, кроме противоположащих пар. Значит все грани АТГ геометрически реализуются равносторонними треугольниками со стороной  $\sqrt{2}$ . Свойство (1) доказано.

Докажем свойство (2), что все 32 автоморфизма триангуляции АТГ реализуются геометрически в 4D модели в виде ПТГ.



1 (0, 0, 0, 1) и 6 (0, 0, 0, -1)

Вспомним, что Aut (АТГ) порождается тремя автоморфизмами:  
 $\alpha_2 = (35) (47)$ ,  $\alpha_{22} = (16) (37) (45)$ ,  
 $\alpha_{20} = (15276384)$

и соответственно  
 представима в 4-пространстве  
 дискретной группой движений,  
 порожденной следующими  
 ортогональными матрицами:

$A_2 =$

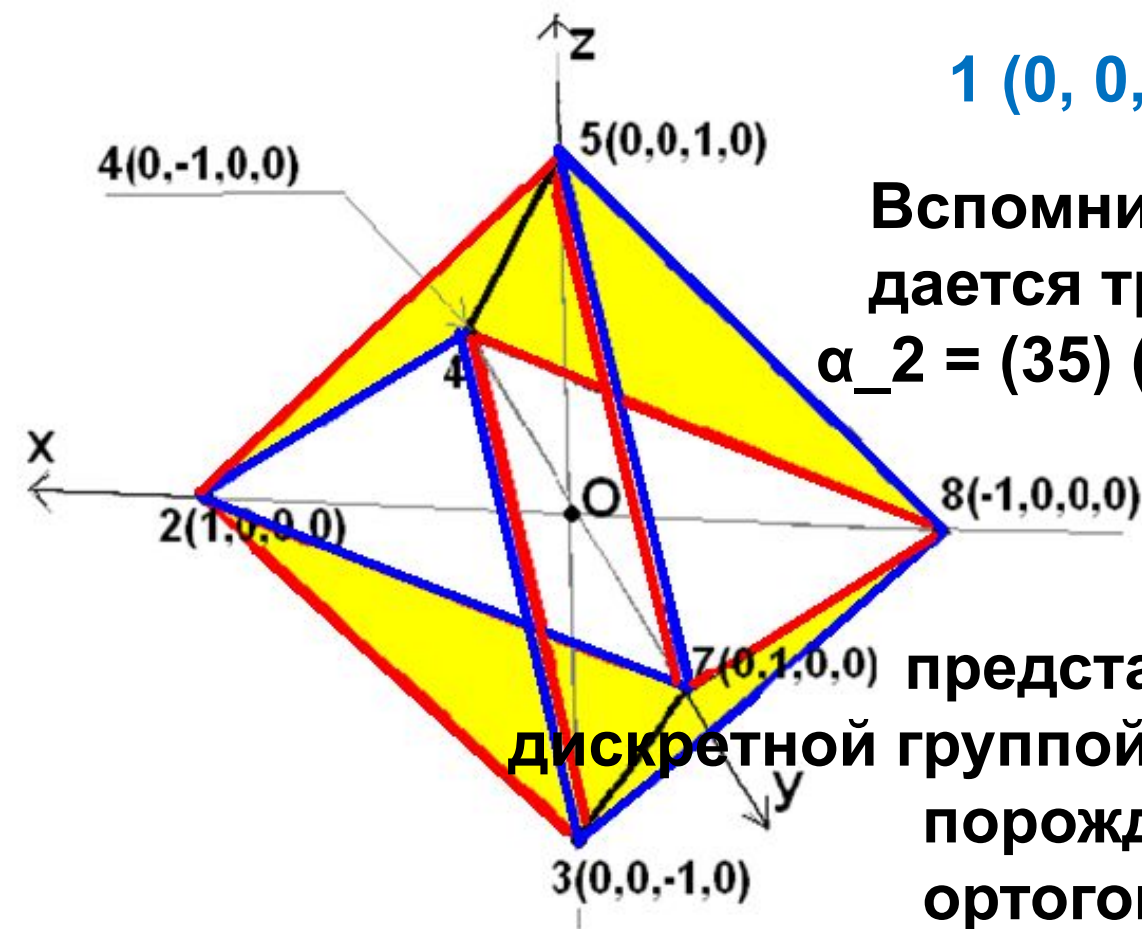
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{22} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A_{20} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

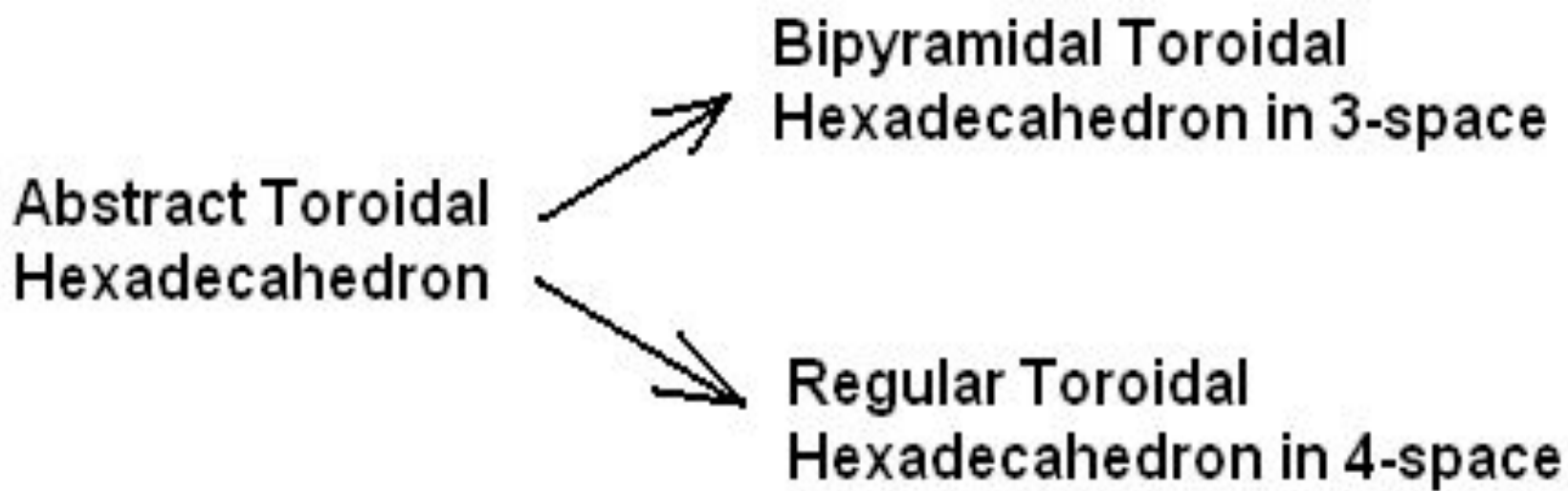


Таким образом, получено точное представление группы  $\text{Aut}(\text{АТГ})$  степени 4.

$$\text{Sym}(\text{ПТГ}) \subset \text{SO}(4) \subset \text{GL}(4)$$

Где  $\text{SO}(4)$  — специальная ортогональная группа степени 4, а  $\text{GL}(4)$  — полная линейная группа степени 4,

И, таким образом, все автоморфизмы реализуются **только вращениями** 4-мерного пространства. ■



**Резюмируя, многогранники БТГ и ПТГ — различные геометрические модели абстрактной триангуляции тора АТГ.**

**Первый — в трехмерном евклидовом пространстве, а второй — в четырехмерном.**

**В 3D модели БТГ все автоморфизмы, кроме тождественного, являются скрытыми симметриями.**

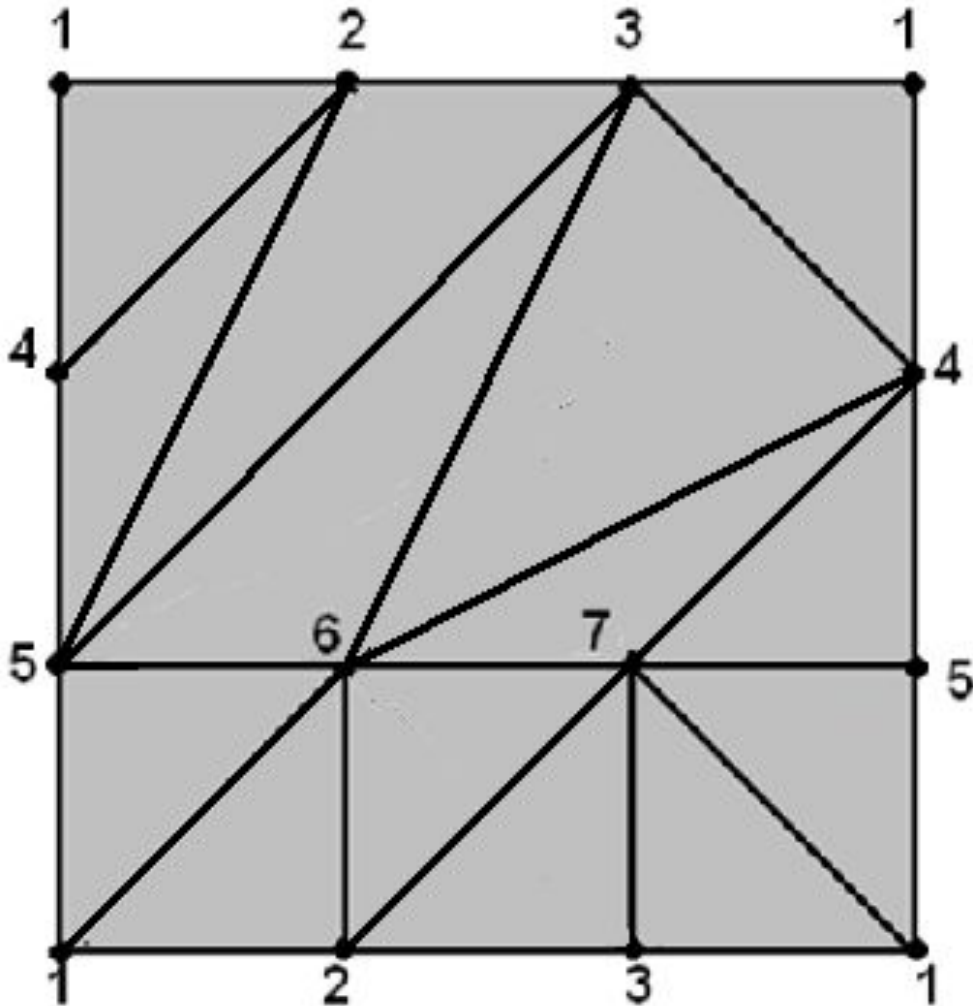
**Другими словами, индекс подгруппы симметрий в группе автоморфизмов = 32.**

**В 4D модели ПТГ же, наоборот, все до единого автоморфизмы реализуются геометрически, т.е. индекс подгруппы симметрий = 1.**

# Открытые вопросы

- Существуют ли другие правильные 2-мерные многогранники, кроме ПТГ, в (евклидовом) пространстве размерности 4 ?
- А в пространствах высших размерностей?
- Существуют ли в 3-мерном пространстве правильные многогранники топологических типов, отличных от сферы? *Гипотеза: Нет.*

**Существуют ли другие правильные 2-мерные многогранники, кроме ПТГ, в пространствах размерностей  $\geq 4$  ?**



**В частности, реализуется ли правильная триангуляция тора с полным графом  $K_7$  в виде правильного многогранника в евклидовом пространстве высшей размерности?**

## Теорема (Рингель и Янгс):

Для каждого целого положительного  $n$  такого, что  $(n-3)(n-4)$  делится нацело на 12, полный граф  $K_n$  триангулирует ориентируемую поверхность рода  $(n-3)(n-4)/12$ . ■

[Ringel G., Youngs J.W.T., Solution of the Heawood map-colouring problem Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 60 \(1968\), 438—445.](#)

Отправная лемма (С. А. Л.): Каждая такая триангуляция вкладывается в  $n$ -пространство так, что все грани реализуются изометричными равносторонними треугольниками.

Доказательство: Вложить  $K_n$  в 1-скелет  $n$ -мерного гипероктаэдра. Например  $K_7$  в 7-мерный гипероктаэдр. ■

# Реализуются ли при этом геометрически все автоморфизмы триангуляции?

Оказывается, будет вершинно-транзитивной группа автоморфизмов любой триангуляции тора, в которой степень каждой вершины = 6.

Datta B., Upadhyay A.K.: Degree-regular triangulations of torus and Klein bottle, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 115 (2005), 279–307.

Однако, это может быть легким следствием из результата Негами:  
Negami, S.: Uniqueness and faithfulness of embedding of toroidal graphs, Discrete Math. 44 (1983), 161-180.



# Итак, что же такое правильный многогранник??

Что касается 2-мерных многогранников в евклидовом  $n$ -мерном пространстве, тот заслуживает звания «правильный», который:

- правильный как абстрактная карта на 2-мерной поверхности,
- имеет транзитивную (здесь возможны варианты) группу автоморфизмов

и

- не имеет скрытых симметрий.

Такое определение правильного многогранника предполагает более широкий класс многогранников, чем в классическом смысле.

Исторически, когда ограничивались многогранниками в 3-мерном пространстве, нашли **пять Платоновых тел**.

Затем, допустив самопересечения, нашли еще **четыре правильных многогранника Кеплера-Пуансо**.

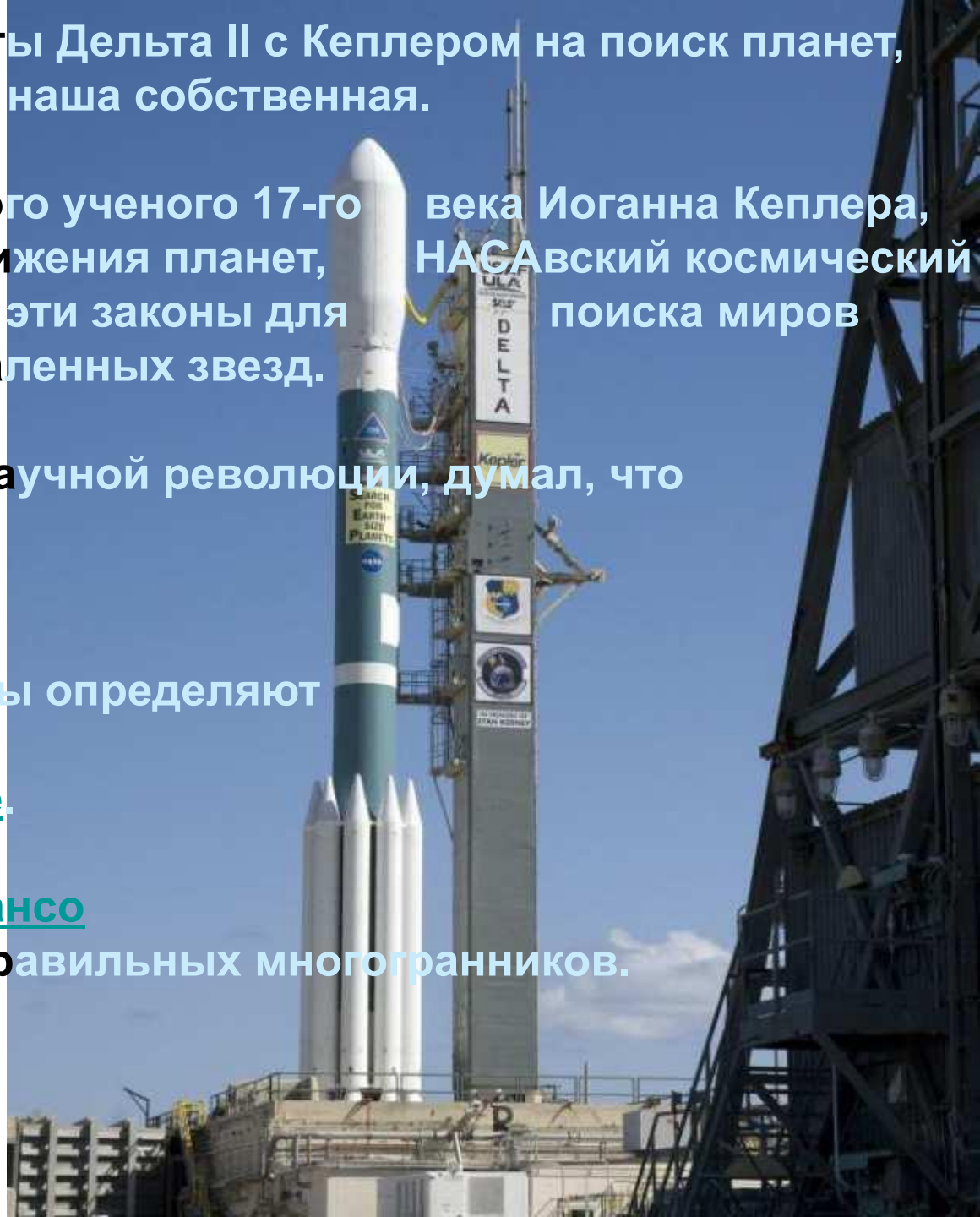
Как и у Платоновых тел,

- все их грани являются изометричными правильными многоугольниками,
- и
- все их вершины идентичны

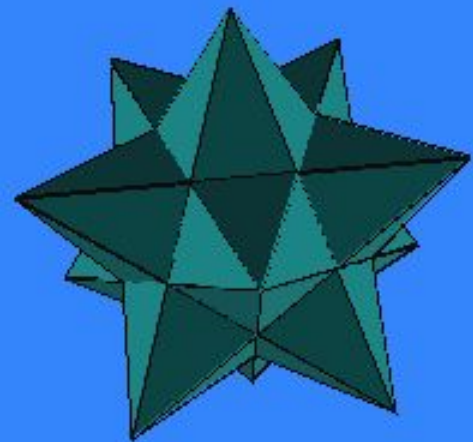
6 марта, 2009 г. Запуск ракеты Дельта II с Кеплером на поиск планет, в некотором отношении как наша собственная.

Названный в честь немецкого ученого 17-го века Иоганна Кеплера, НАСАвский космический аппарат Кеплер использует эти законы для поиска миров подобных Земле вокруг удаленных звезд.

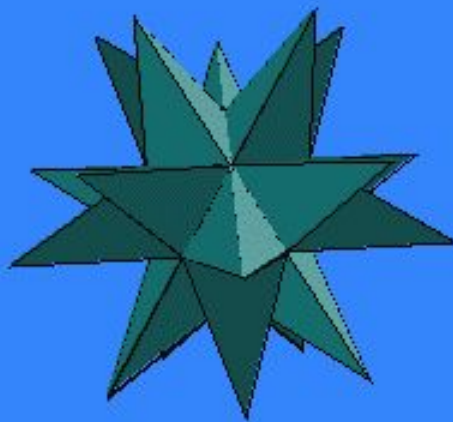
Кеплер, ключевая фигура научной революции, думал, что Вселенная состоит из вложенных друг в друга Платоновых тел, вписанные в которых сферы определяют планетарные орбиты в нашей солнечной системе. Вместе, Платоновы тела и многогранники Кеплера-Пуансо образуют множество 9-ти правильных многогранников.



# Многогранники Кеплера-Пуансо (не типа сферы!)



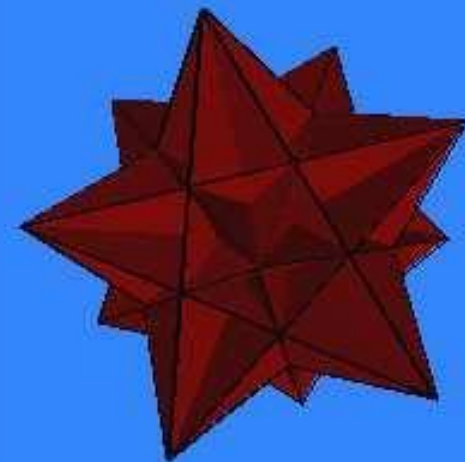
Малый  
звездчатый  
додекаэдр



Большой  
звездчатый  
додекаэдр



Большой  
додекаэдр

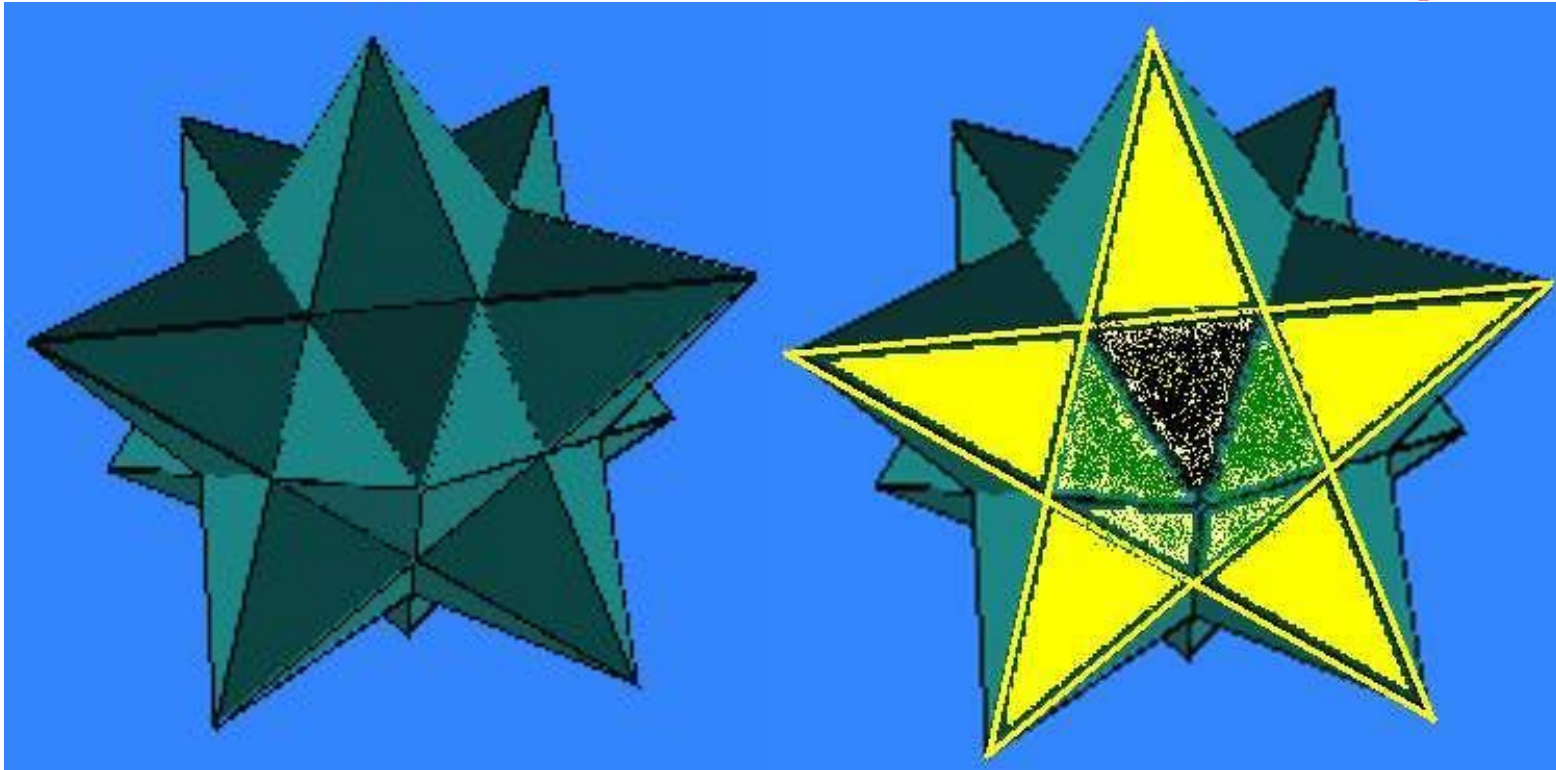


Большой  
икосаэдр

В 1813 г. (или 1812 ??) Коши доказал, что кроме пяти Платоновых тел и четырех многогранников Кеплера-Пуансо больше нет правильных многогранников. **Может быть Коши подразумевал «в трехмерном пространстве»?**

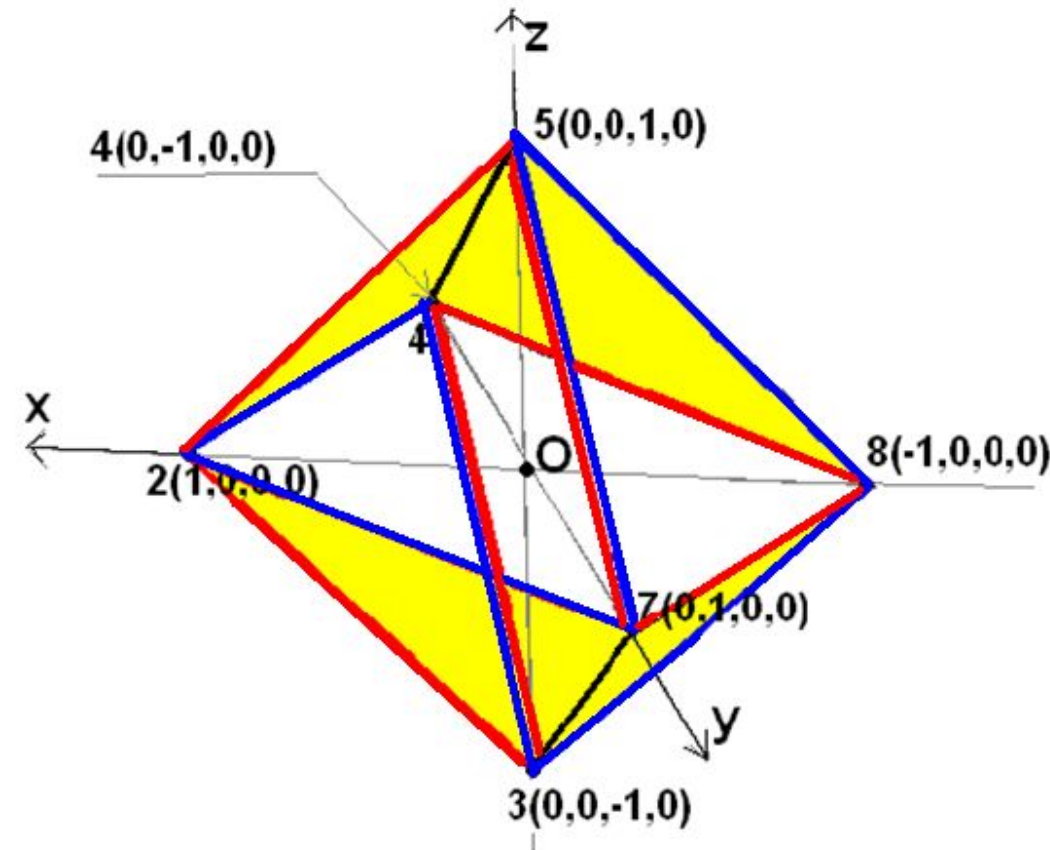
A. L. Cauchy, *Recherches sur les polyèdres; Premier mémoire*. J. École Polytech. 9 (1813), 68 – 98.

# Малый звездчатый додекаэдр



- Многогранник в 3-мерном пространстве **с самопересечениями**. (Сергей Петрович Новиков не признает многогранников с самопересечениями.)
- У него 12 вершин, 30 ребер и 12 граней. (Для сравнения, у додекаэдра 20 вершин, 30 ребер и 12 граней.)

Мы же обобщаем по другому направлению:  
 не допуская самопересечений,  
 увеличиваем размерность объемлющего пространства.  
 И находим еще один правильный многогранник —  
**правильный тороидальный гексадекаэдр, ПТГ**



На рисунке слева  
 изображено его сечение  
 экваториальной  
 гиперплоскостью  $Oxyz$   
 (с уравнением  $w = 0$ ).

Остается открытым вопрос  
 эм пред-  
 ставлении ПТГ картинкой.

**1 (0, 0, 0, 1) — северный полюс**  
**6 (0, 0, 0, -1) — южный полюс**

**Спасибо за внимание!**

**Вопросы?**