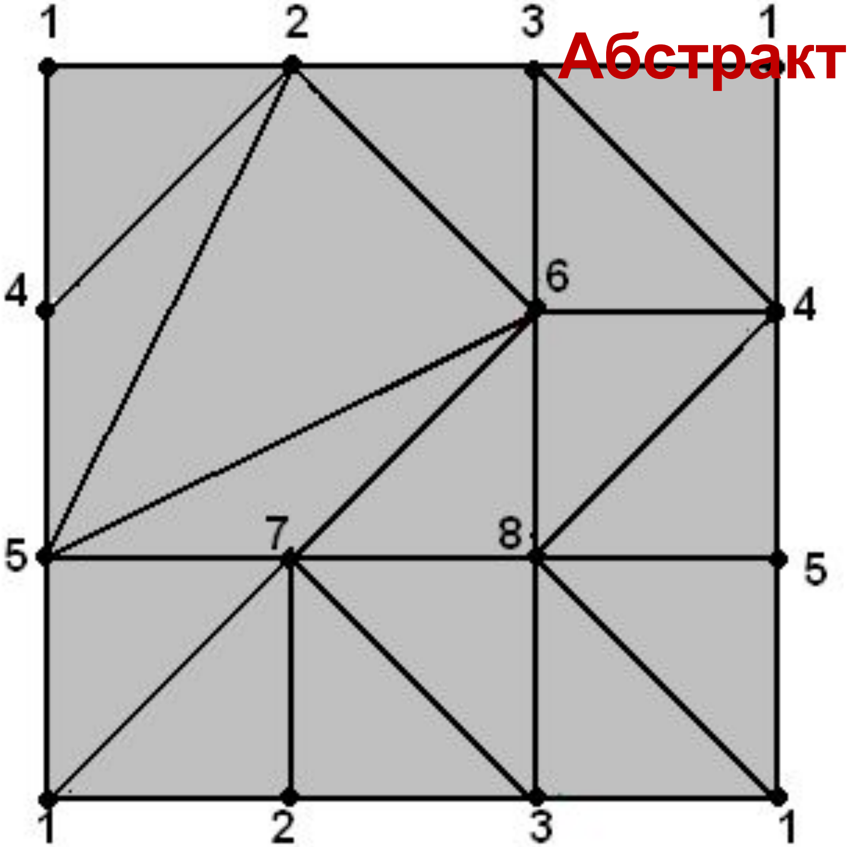
кафедры высшей математики-1 МИЭТ
под руководством
проф. Гончарова В.А., проф. Кожухова И.Б. и проф. Поспелова А. С.
24 ноября, 2009 г.

Правильные многогранники в четырехмерном пространстве

«В огромном саду геометрии каждый найдет букет себе по вкусу.»

Давид Гильберт

Сергей Александрович Лавренченко (С. А. Л.)

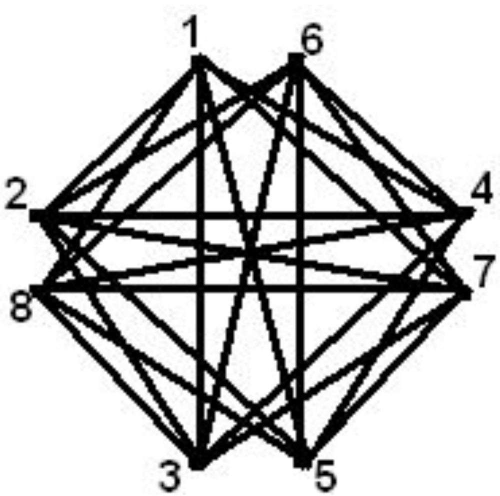


Абстрактный Тороидальный Гексадекаэдр — это комбинаторно-топологический объект — правильная триангуляция тора с 8 вершинами и 16 гранями.

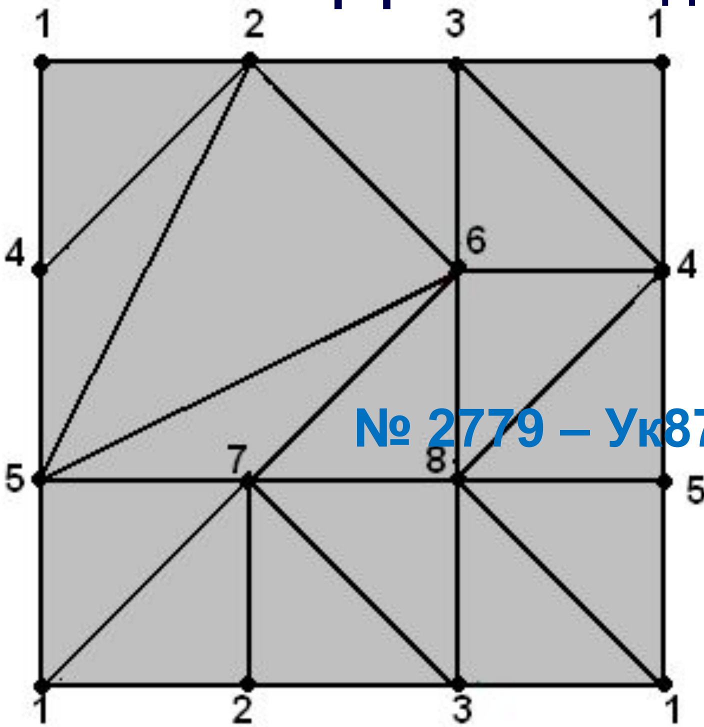
С. А. Л., Неприводимые триангу-ляции тора, Укр. геометр. сб. 30 (1987) 52–62.

- АТГ — правильная карта на торе: каждая грань — треугольник и степень каждой вершины равна 6.

- Ее граф изоморфен 1-скелету гексадекахорона, т.е. полному 4-дольному графу K_{2,2,2,2}.



Все ее автоморфизмы найдены при помощи компьютера:



С. А. Л., Перечисление в явном виде всех автоморфизмов неприводимых триангуляций тора и всех укладок на тор помеченных графов этих триангуляций. Харьков, 1987. – 57 с., Деп. в УкрНИИНТИ 01.10.87, № 2779 – Ук87.

α_1 = id (тождественный)

α_2 = (35) (47) α_3 = (28) (34) (57)

α_4 = (28) (37) (45) α_5 = (12) (47) (68) α_6 = (12) (35) (68)

α_7 = (1268) (3457) α_8 = (1268) (3754) α_9 = (13246587)

α_10 = (13876524) α_11 = (13) (27) (48) (56) α_12 = (1365) (2784)

α_13 = (14) (23) (58) (67) α_14 = (1467) (2385) α_15 = (14256783)

α_16 = (14836725) α_17 = (1563) (2487) α_18 = (15) (24) (36) (78)

α_19 = (15846327) α_20 = (15276384) α_21 = (16) (34) (57)

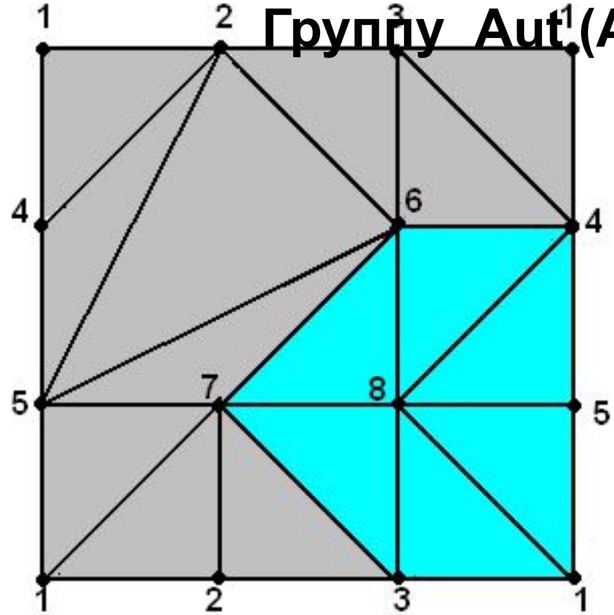
α_22 = (16) (37) (45) α_23 = (16) (28) α_24 = (16) (28) (35) (47)

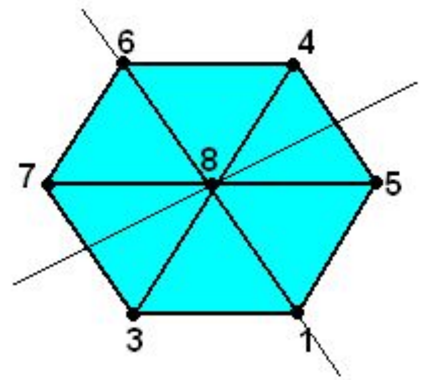
α_25 = (17856423) α_26 = (17236485) α_27 = (1764) (2583)

α_28 = (17) (25) (38) (46) α_29 = (1862) (3457) α_30 = (1862) (3754)

α_31 = (18) (26) (47) α_32 = (18) (26) (35)

Группу Aut(АТГ) можно определить и без компьютера.





Эта группа вершинно-транзитивная, потому что в ней есть единый циклический сдвиг всех вершин: α_20 = (15276384).

Подгруппа Shift = <α_20> ≈ Z_8. Она ненормальна.

С другой стороны, стабилизатор каждой вершины есть подгруппа изоморфная Z_2 × Z_2, ненормальная.
Например, стабилизатор вершины 8, есть подгруппа

Stab = <α_2, α_22> ≈ Z_2 × Z_2,

порожденная 2-мя инволюциями α_2 = (35)(47) и α_22 = (16)(37)(45) (реализуемыми геометрически «симметриями относительно перпендикулярных прямых»). Эта подгруппа ненормальна.

Таким образом, группа Aut (АТГ) может быть порождена так:

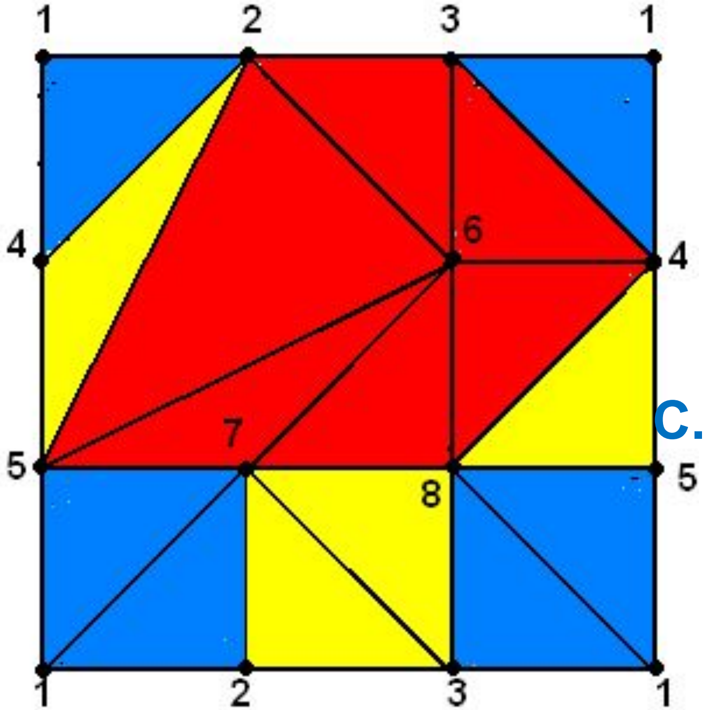
Aut (АТГ) = $\langle \alpha_2, \alpha_{22}, \alpha_{20} \rangle$

$= (Z_2 \times Z_2)\ Z_8$,

где $Z_2 \times Z_2$ и Z_8 — как указаны на предыдущем слайде, причем произведение на Z_8 не является прямым.

Таким образом,

|Aut (АТГ)| = |Shift| · |Stab| : |Shift ∩ Stab| = 8 · 4 : 1 = 32.

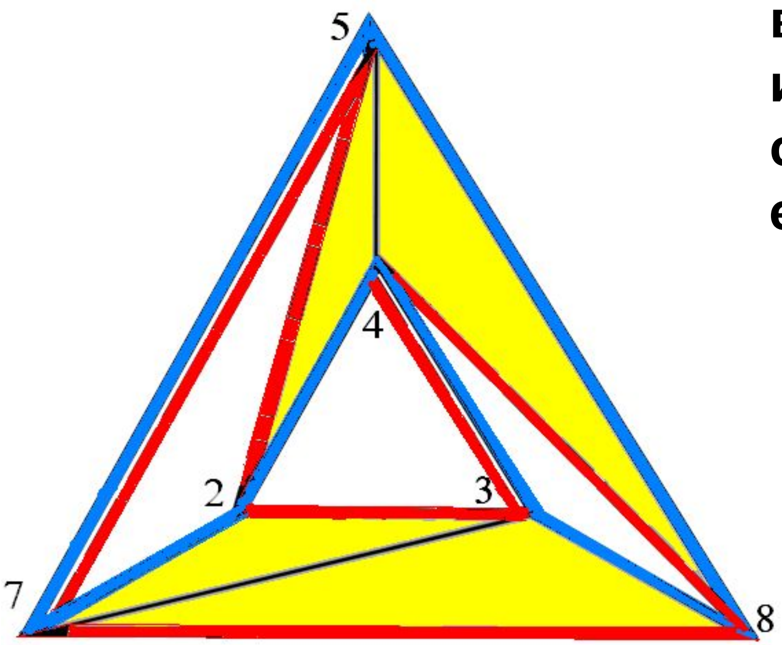


Бипирамидальный Тороидальный Гексадекаэдр (БТГ) —

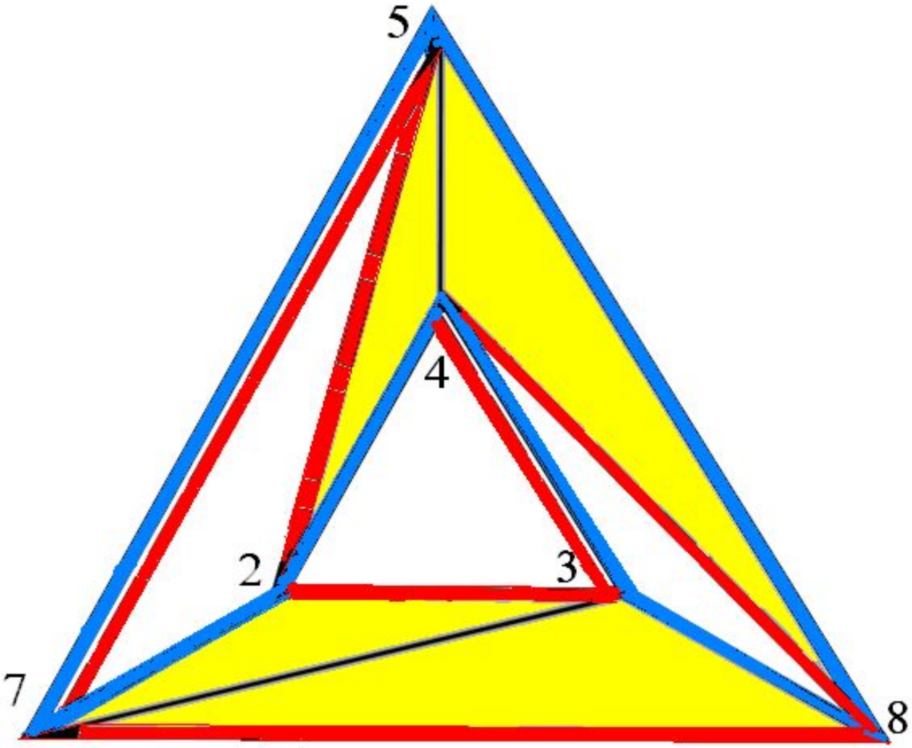
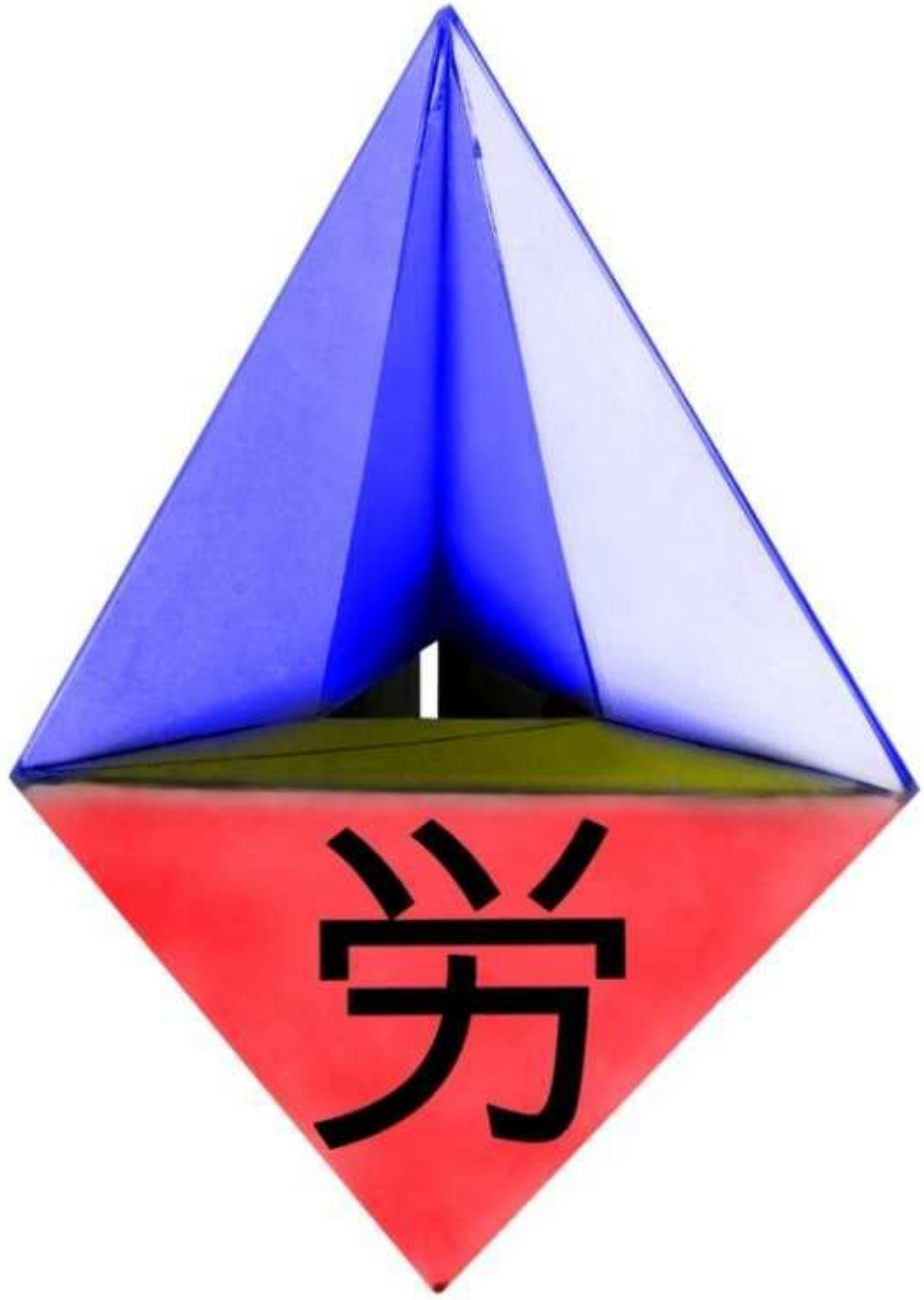
геометрическая модель АТГ

С. А. Л., Все неприводимые триангуляции тора реализуются в E^3 в виде многогранников, манускрипт, Мехмат МГУ (1983).

Эта работа была выполнена под руководством профессора И. Х. Сабитова и заняла 2-е место в конкурсе научных студенческих работ за 1983 год, ежегодно проводимом Мехматом МГУ.



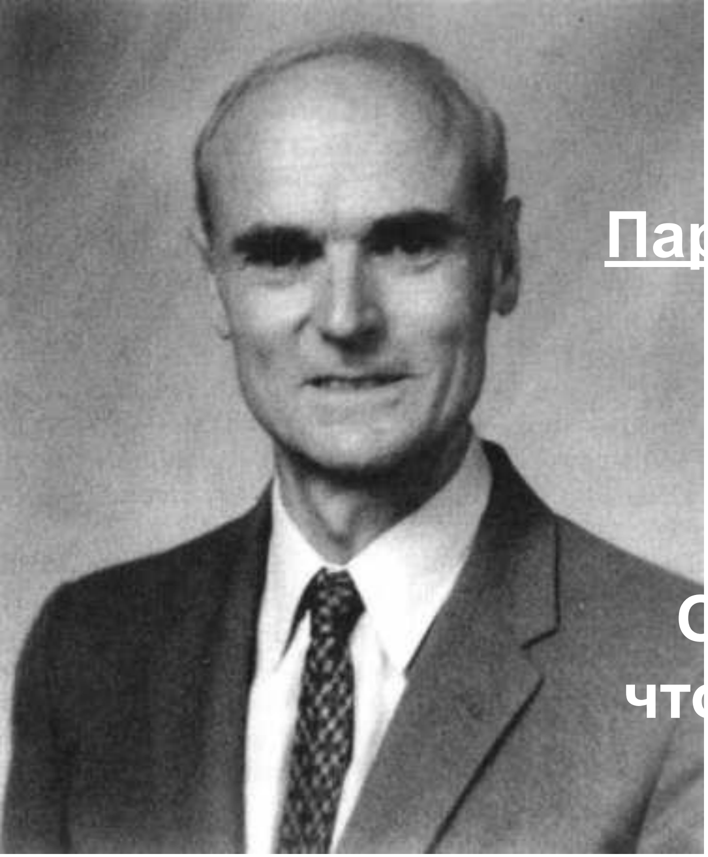
- **Экватор у БТГ**


5
4
2
3
7
8

劳

Мы делаем четкое различие между понятиями «автоморфизм» и «симметрия».
Далее, термин «симметрия» используется в широком смысле: для обозначения и настоящих симметрий, и вращений пространства.

Ни один автоморфизм АТГ, кроме тождественного, не реализуется геометрически, т.е. движениями объемлющего 3-мерного пространства, переводящими БТГ в себя, поэтому Sym (БТГ) = { id }.

Все автоморфизмы становятся <u>скрытыми симметриями</u> геометрической модели БТГ.



Ха́ролд Скотт МакДо́налд («Доналд») Кокстер (1907—2003).

Парадигма Кокстера

Парадигма Кокстера «групп и геометрии» — это целостная система взглядов и положений по сближению и соединению алгебры с геометрией.

Одно из этих положений состоит в том, что надо реализовывать геометрически не только сам комбинаторный или топологический объект, а также его автоморфизмы в виде геометрических симметрий его геометрической модели в пространстве.

- H.S.M. Coxeter, Regular Complex Polytopes, Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edit. 1991.
- H.S.M. Coxeter and W.O.J. Moser, Generators and Relations for Discrete Groups, Springer, Berlin 1980 (4th edit.)

Борьба со скрытыми симметриями — путь претворения в жизнь парадигмы Коксетера.

Многогранные реализации групп правильных карт на 2-мерных поверхностях — вклад в развитие этой парадигмы.

<u>Старая идея:</u> Чтобы исключить скрытые симметрии, можно использовать модель Пуанкаре плоскости Лобачевского.

С. А. Л., Plummer M.D., Zha X.: Isoperimetric constants of infinite plane graphs, Discrete & Computational Geometry 28 (3): 313-330 (2002)

Борьба со скрытыми симметриями — путь претворения в жизнь парадигмы Кокстера.

<u>Новая идея:</u> **Но что, если настаивать на том, чтобы оставаться в евклидовом пространстве? Это возможно! Но только, если достаточно увеличить размерность этого пространства.**

(А не пытаться загнать объект в пространство заведомо меньшей размерности, как мы делали выше, строя БТГ.)

Тор Клиффорда: $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 = (x_3)^2 + (x_4)^2$.

Для 2-мерного тора более подходит евклидово 4-мерное пространство, чем 3-мерное.

Например, АТГ не удается вложить в 3-пространство без скрытых симметрий, а в 4-пространство уже можно.

В 3-мерном пространстве тор переходит в себя только вращениями в направлении параллелей, а в 4-мерном пространстве также вращениями в направлении меридианов.

http://alem3d.obidos.org/en/torusio/math

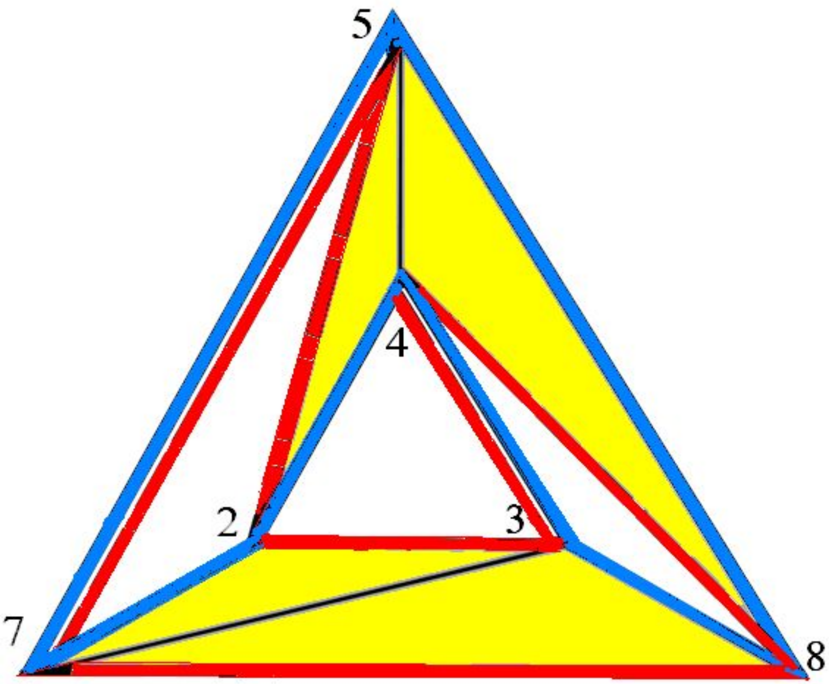
С. А. Л., Polyhedral suspensions of arbitrary genus, Graphs & Combinatorics, 26 (2010), в печати.

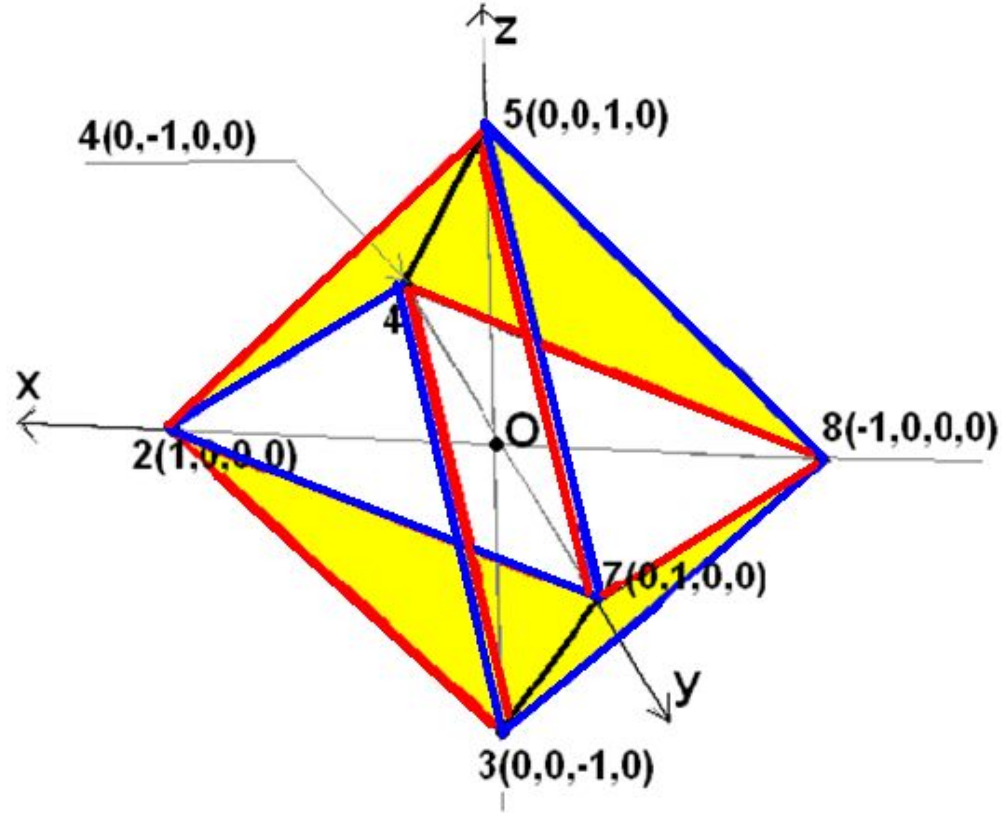
Теорема (С. А. Л.): В евклидовом 4-мерном пространстве существует 2-мерный тороидальный многогранник с 8 вершинами и 16 треугольными гранями, имеющий следующие три свойства правильности. Этот многогранник будет называться правильным тороидальным гексадекаэдром и будет обозначаться ПТГ.

(1) Все грани ПТГ— равносторонние треугольники.

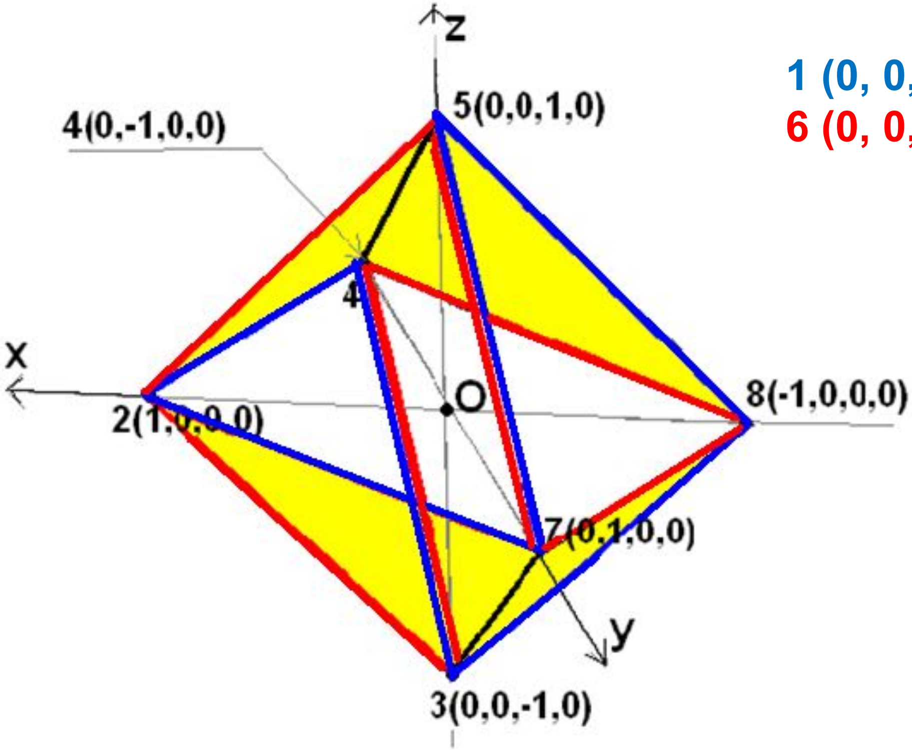
(2) ПТГ не имеет скрытых симметрий в том смысле, что группа Aut (АТГ) точно представлена группой Sym (ПТГ) в 4-мерном пространстве.

) Группа Sym (ПТГ) действует транзитивно на множестве вершин ПТГ.





Доказательство: На рисунке справа — экватор БТГ переложен из 2-пространства в 3-пространство в геометрически симметричном виде, как 2-мерный подкомплекс октаэдра. Затем к координатам каждой вершины добавили четвертую координату *w* = 0, тем самым поместив экватор уже в 4-пространство. Две остающиеся вершины, 1 и 6, располагаются на четвертой координатной оси *Ow* и имеют координаты (0, 0, 0, 1) и (0, 0, 0, -1), соответственно.



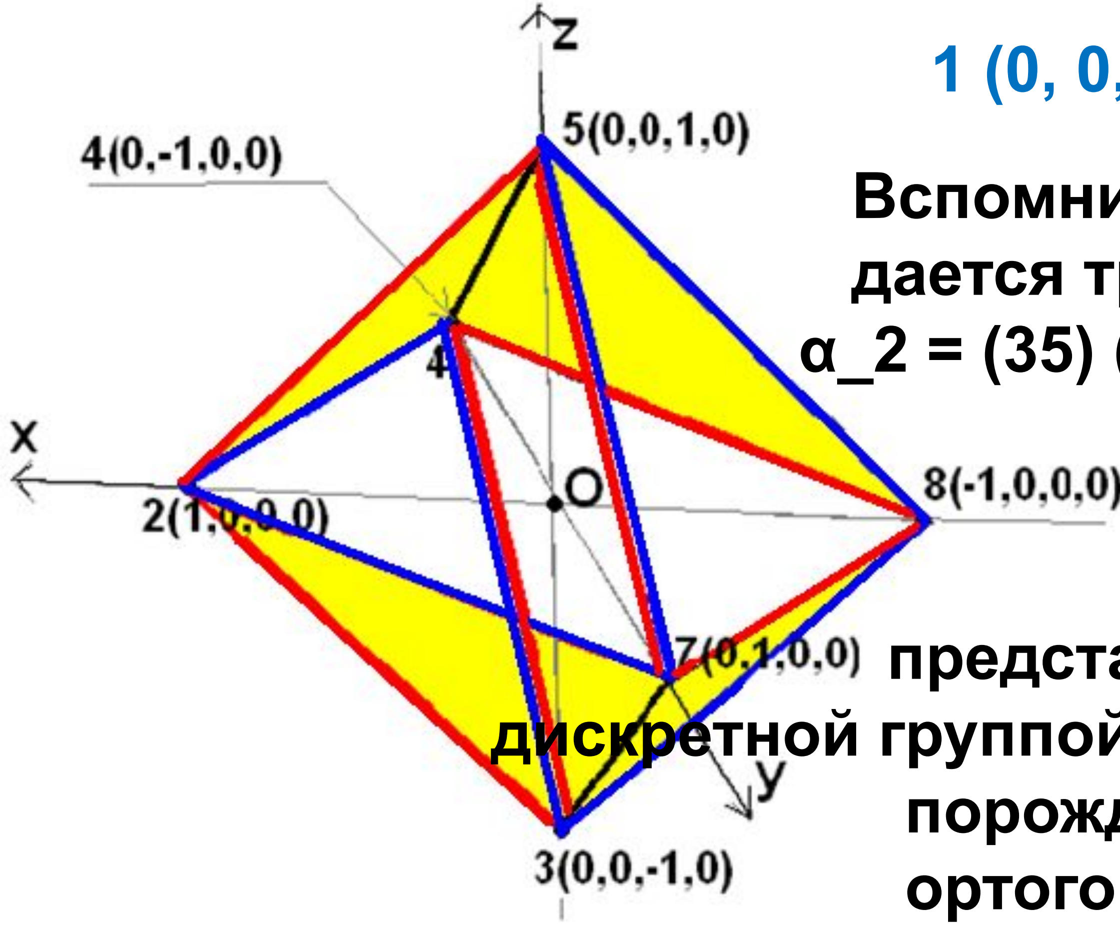
1 (0, 0, 0, 1) — северный полюс
6 (0, 0, 0, -1) — южный полюс

АТГ реализовывается как подкомплекс 2-мерного скелета гексадекахорона (или 4-мерного гипероктаэдра) в 4-мерном пространстве.

Восемь вершин гексадекахорона:
(±1, 0, 0, 0), (0, ±1, 0, 0),
(0, 0, ±1, 0), (0, 0, 0, ±1).

Все вершины соединены ребрами, кроме противолежащих пар. Значит все грани АТГ геометрически реализуются равносторонними треугольниками со стороной √2. Свойство (1) доказано.

Докажем свойство (2), что все 32 автоморфизма триангуляции АТГ реализуются геометрически в 4D модели в виде ПТГ.



1 (0, 0, 0, 1) и **6 (0, 0, 0, -1)**

Вспомним, что Aut (АТГ) порождается тремя автоморфизмами:
α_2 = (35) (47), α_22 = (16) (37) (45),
α_20 = (15276384)

и соответственно представима в 4-пространстве дискретной группой движений, порожденной следующими ортогональными матрицами:

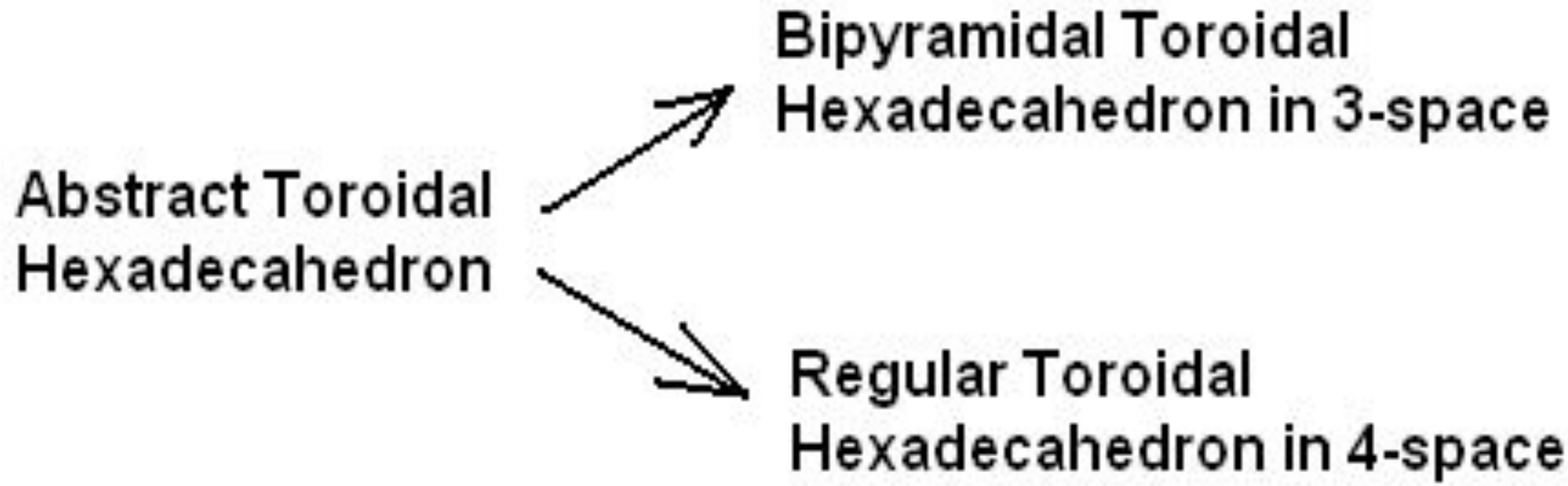
A_2 = $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ **A_22 =** $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$ **A_20 =** $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

Таким образом, получено точное представление группы Aut (АТГ) степени 4.

$$\mathrm{Sym}(\text{ПТГ}) \subset SO(4) \subset GL(4)$$

Где $SO(4)$ —специальная ортогональная группа степени 4, а $GL(4)$— полная линейная группа степени 4,

И, таким образом, все автоморфизмы реализуются только вращениями 4-мерного пространства. ■



Резюмируя, многогранники БТГ и ПТГ — различные геометрические модели абстрактной триангуляции тора АТГ.

**Первый — в трехмерном евклидовом пространстве,
а второй — в четырехмерном.**

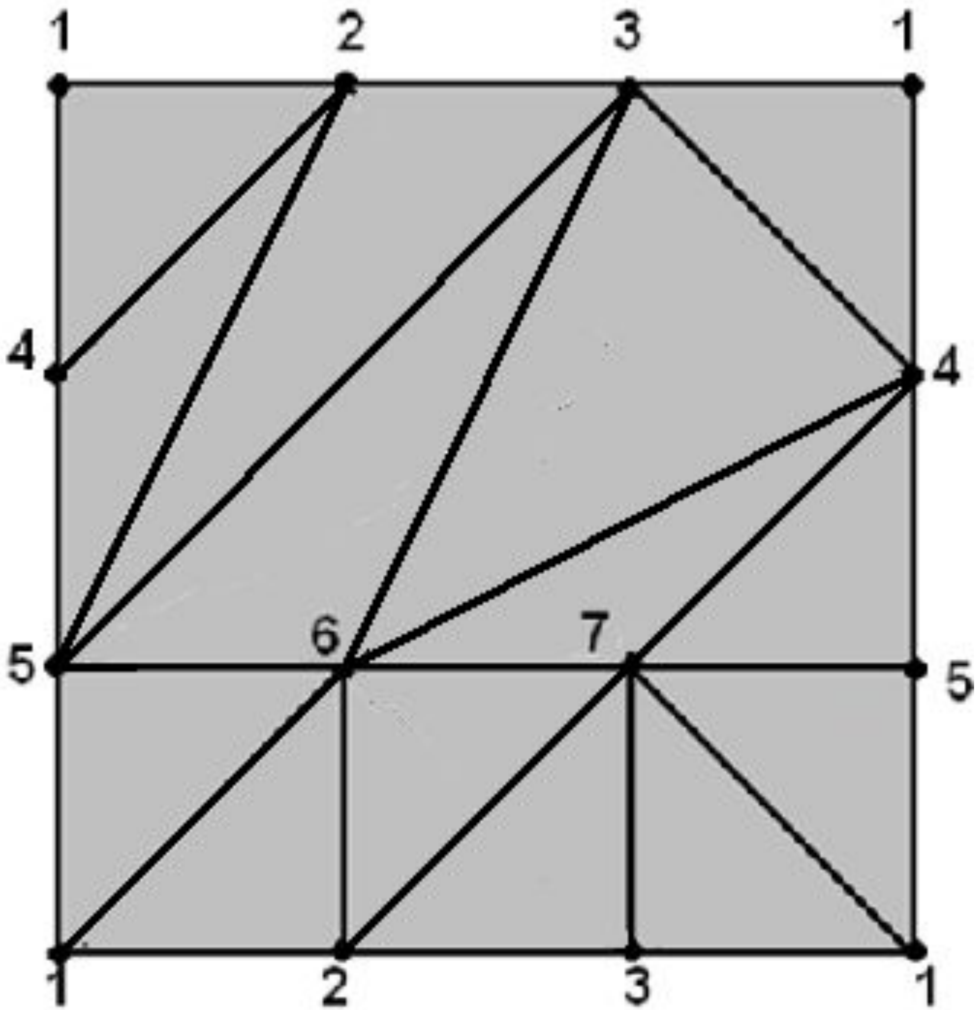
**В 3D модели БТГ все автоморфизмы, кроме тождественного, являются скрытыми симметриями.
Другими словами, индекс подгруппы симметрий
в группе автоморфизмов = 32.**

В 4D модели ПТГ же, наоборот, все до единого автоморфизмы реализуются геометрически, т.е. индекс подгруппы симметрий = 1.

Открытые вопросы

- **Существуют ли другие правильные 2-мерные многогранники, кроме ПТГ, в (евклидовом) пространстве размерности 4 ?**
- **А в пространствах высших размерностей?**
- **Существуют ли в 3-мерном пространстве правильные многогранники топологических типов, отличных от сферы? *Гипотеза:* Нет.**

Существуют ли другие правильные 2-мерные многогранники, кроме ПТГ, в пространствах размерностей ≥ 4 ?



В частности, реализуется ли правильная триангуляция тора с полным графом K_7 в виде правильного многогранника в евклидовом пространстве высшей размерности?

Теорема (Рингель и Янгс):
Для каждого целого положительного n такого, что (n–3)(n–4) делится нацело на 12, полный граф K_n триангулирует ориентируемую поверхность рода (n–3)(n–4)/12. ■

Ringel G., Youngs J.W.T., Solution of the Heawood map-colouring problem
Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 60 (1968), 438—445.

Отправная лемма (С. А. Л.): Каждая такая триангуляция вкладывается в n-пространство так, что все грани реализуются изометричными равносторонними треугольниками.

Доказательство: Вложить K_n в 1-скелет n-мерного гипероктаэдра.
Например K_7 в 7-мерный гипероктаэдр. ■

Реализуются ли при этом геометрически все автоморфизмы триангуляции?

Оказывается, будет вершинно-транзитивной группа автоморфизмов любой триангуляции тора, в которой степень каждой вершины = 6.

Datta B., Upadhyay A.K.: Degree-regular triangulations of torus and Klein bottle, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 115 (2005), 279–307.

Однако, это может быть легким следствием из результата Негами:
Negami, S.: Uniqueness and faithfulness of embedding of toroidal graphs, Discrete Math. 44 (1983), 161-180.

Итак, что же такое правильный многогранник??

Что касается 2-мерных многогранников
в евклидовом n-мерном пространстве,
тот заслуживает звания «правильный», который:

- правильный как абстрактная карта
  на 2-мерной поверхности,

- имеет транзитивную (здесь возможны варианты)
  группу автоморфизмов

  и

- не имеет скрытых симметрий.

Такое определение правильного многогранника предполагает более широкий класс многогранников, чем в классическом смысле.

Исторически, когда ограничивались многогранниками <u>в 3-мерном пространстве</u>, нашли пять Платоновых тел.

Затем, <u>допустив самопересечения</u>, нашли еще четыре правильных многогранника Кеплера-Пуансо.

Как и у Платоновых тел,

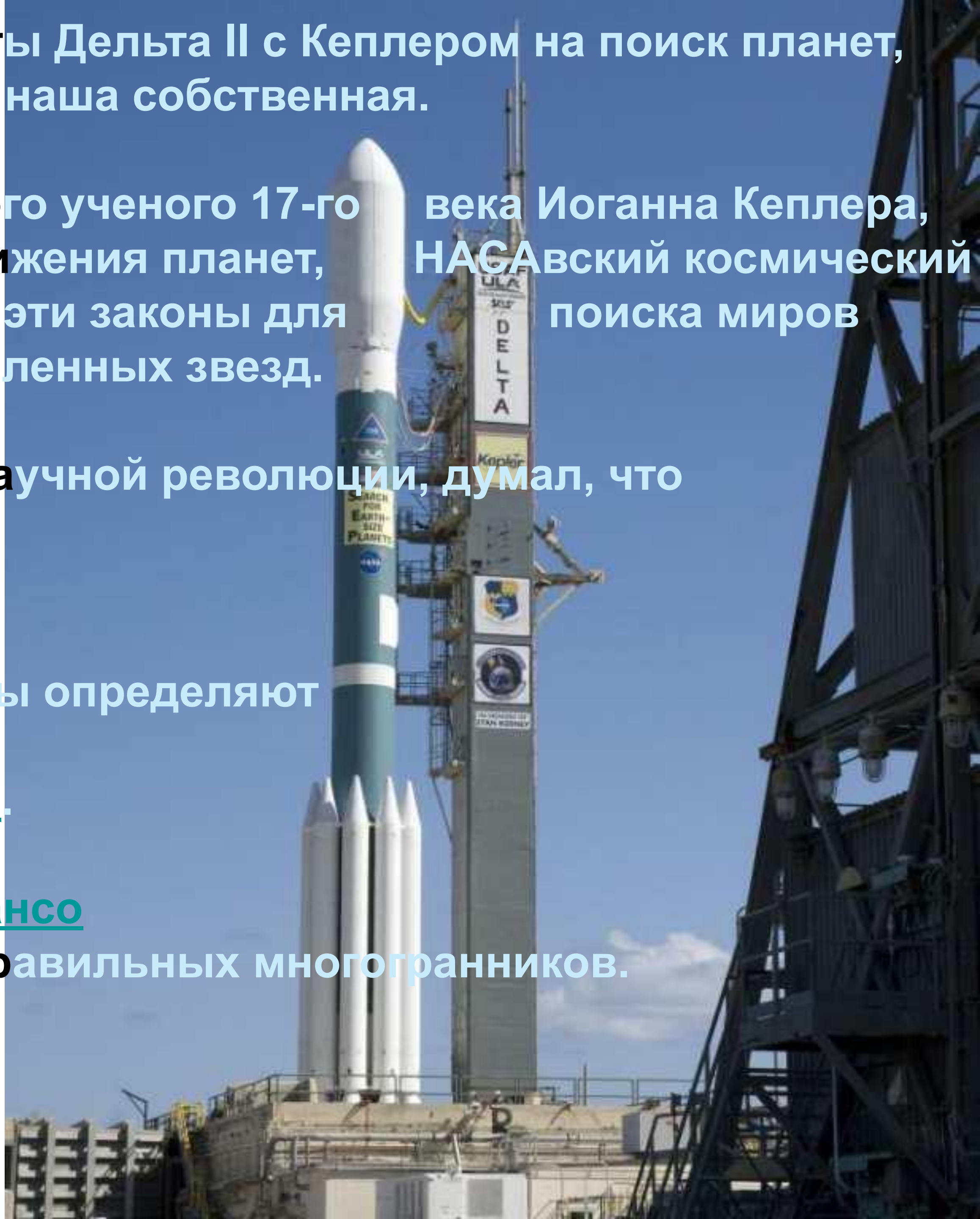
- **все их грани являются изометричными правильными многоугольниками,**

  и
- **все их вершины идентичны**

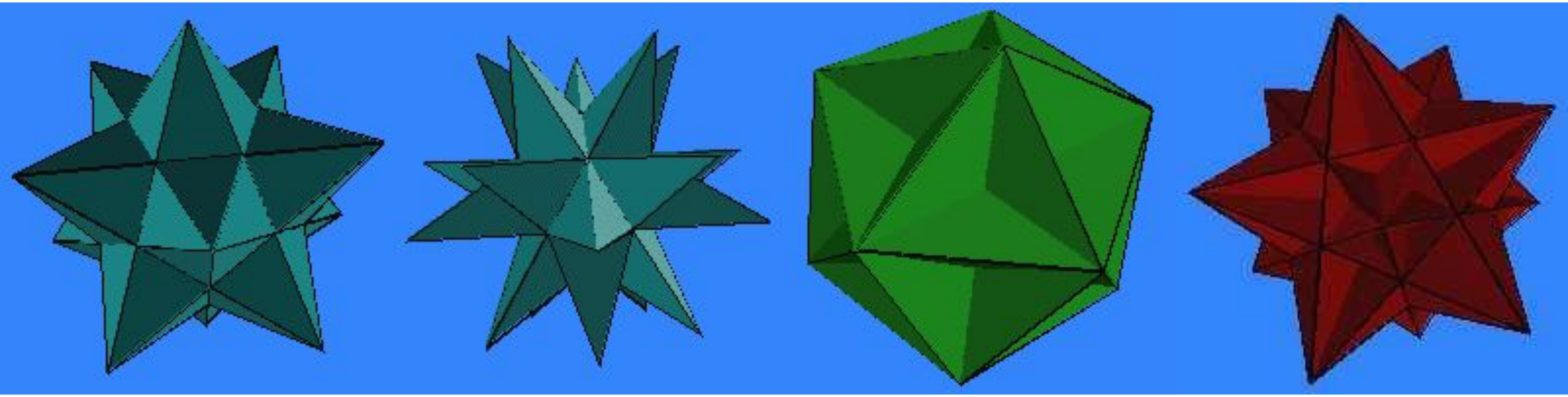
6 марта, 2009 г. Запуск ракеты Дельта II с Кеплером на поиск планет, в некотором отношении как наша собственная.

Названный в честь немецкого ученого 17-го века Иоганна Кеплера, который открыл законы движения планет, НАСАвский космический аппарат Кеплер использует эти законы для поиска миров подобных Земле вокруг удаленных звезд.

Кеплер, ключевая фигура научной революции, думал, что
Вселенная состоит из
вложенных друг в друга
Платоновых тел,
вписанные в которых сферы определяют
планетарные орбиты
в нашей солнечной системе.
Вместе, Платоновы тела и
многогранники Кеплера-Пуансо
образуют множество 9-ти правильных многогранников.



Многогранники Кеплера-Пуансо (не типа сферы!)



Малый звездчатый додекаэдр

Большой звездчатый додекаэдр

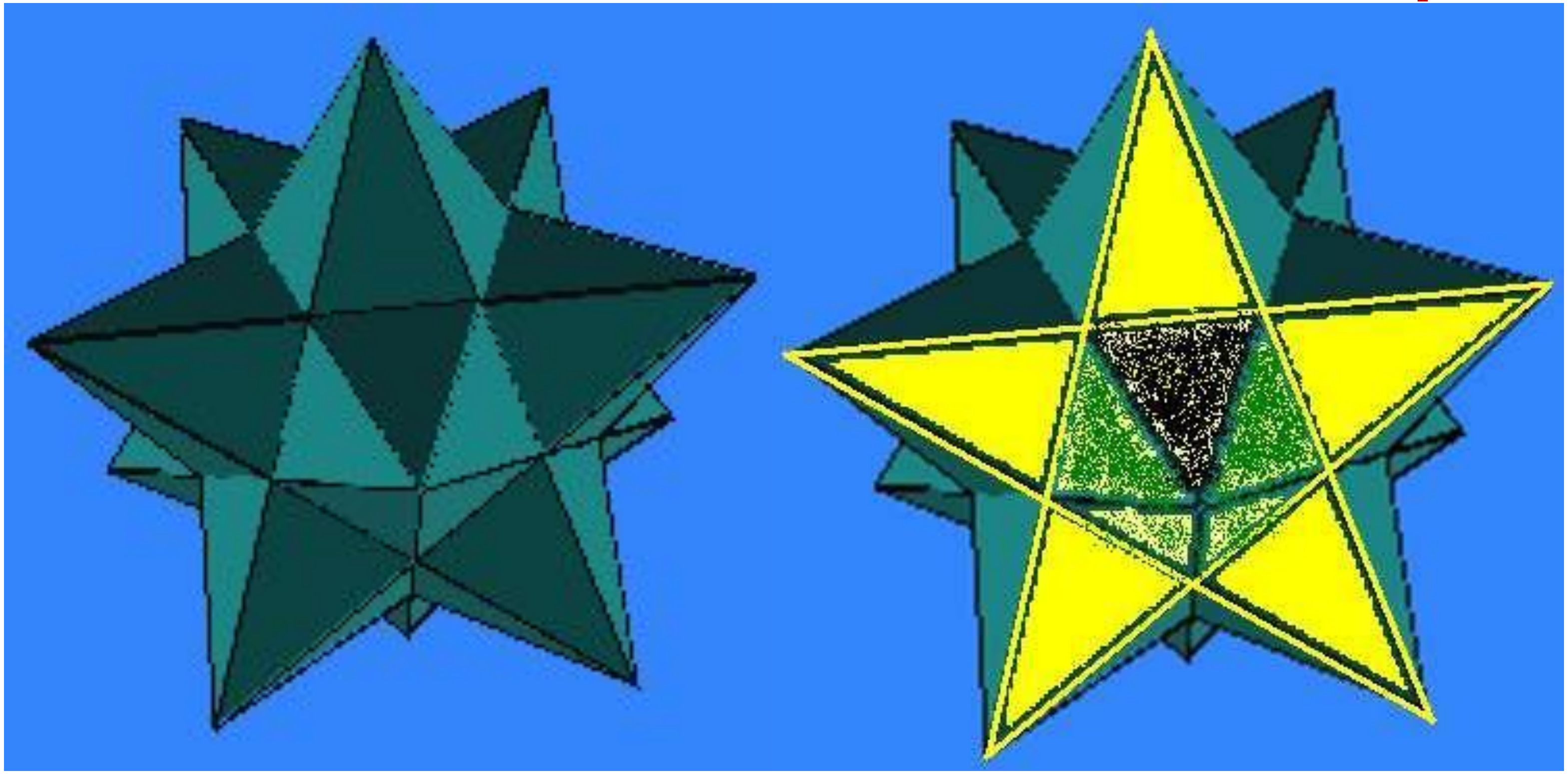
Большой додекаэдр

Большой икосаэдр

В 1813 г. (или 1812 ??) Коши доказал, что кроме пяти Платоновых тел и четырех многогранников Кеплера-Пуансо больше нет правильных многогранников. Может быть Коши подразумевал «в трехмерном пространстве»?

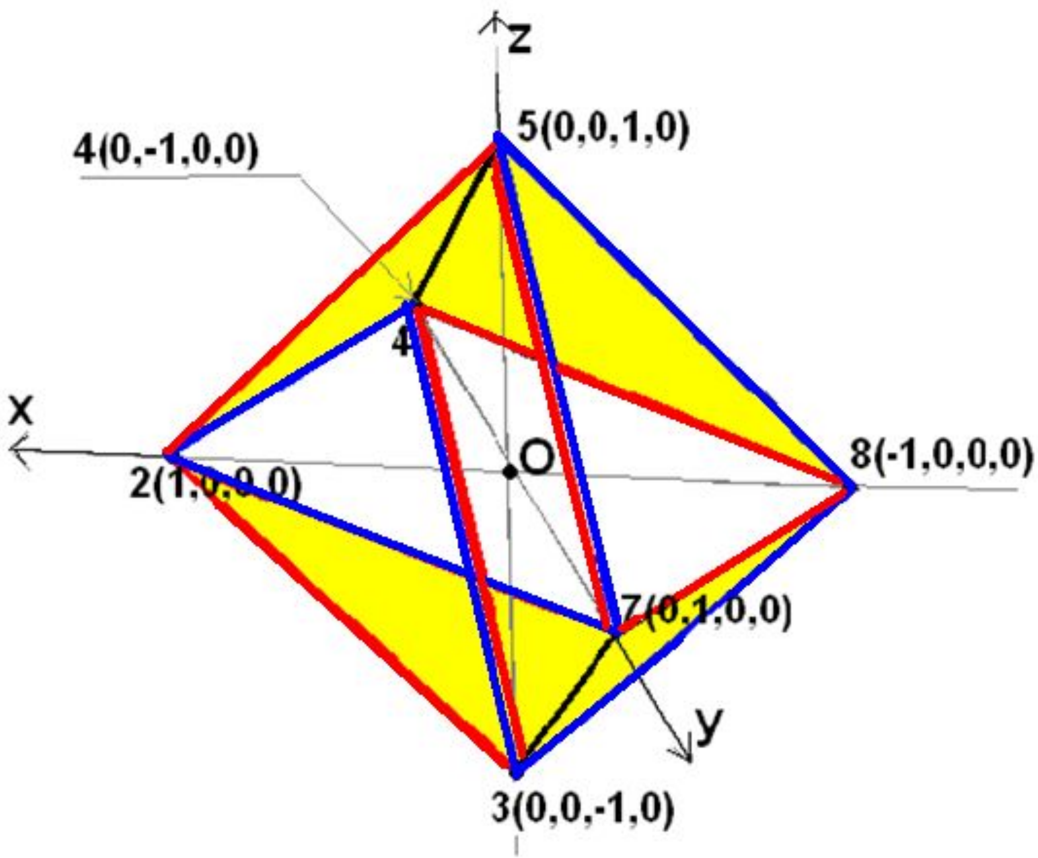
A. L. Cauchy, Recherches sur les polyèdres; Premier mèmoire. J. Ècole Polytech. 9 (1813), 68 – 98.

Малый звездчатый додекаэдр



- Многогранник в 3-мерном пространстве с самопересечениями. (Сергей Петрович Новиков не признает многогранников с самопересечениями.)
- У него 12 вершин, 30 ребер и 12 граней. (Для сравнения, у додекаэдра 20 вершин, 30 ребер и 12 граней.)

Мы же обобщаем по другому направлению:
не допуская самопересечений,
увеличиваем размерность объемлющего пространства.
И находим еще один правильный многогранник —
правильный тороидальный гексадекаэдр, ПТГ



На рисунке слева изображено его сечение экваториальной гиперплоскостью *Oxyz* (с уравнением $w = 0$).

Остается открытым вопрос ом пред-
ставлении ПТГ картинкой.

1 (0, 0, 0, 1) — северный полюс
6 (0, 0, 0, -1) — южный полюс

Спасибо за внимание!

Вопросы?