

кафедры высшей математики-1 МИЭТ
под руководством
проф. Гончарова В.А., проф. Кожухова И.Б. и проф. Поспелова А.
С.
24 ноября, 2009 г.

Правильные многогранники в четырехмерном пространстве

*«В огромном саду геометрии
каждый найдет букет себе по*

вкусу.»

Давид

Гильберт

**Сергей Александрович Лавренченко
(С. А. Л.)**

Абстрактный Тороидальный

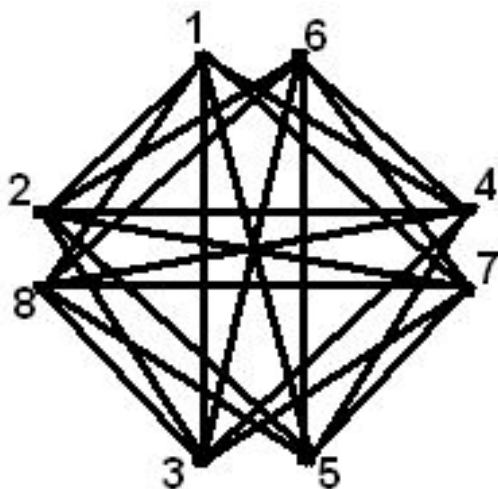
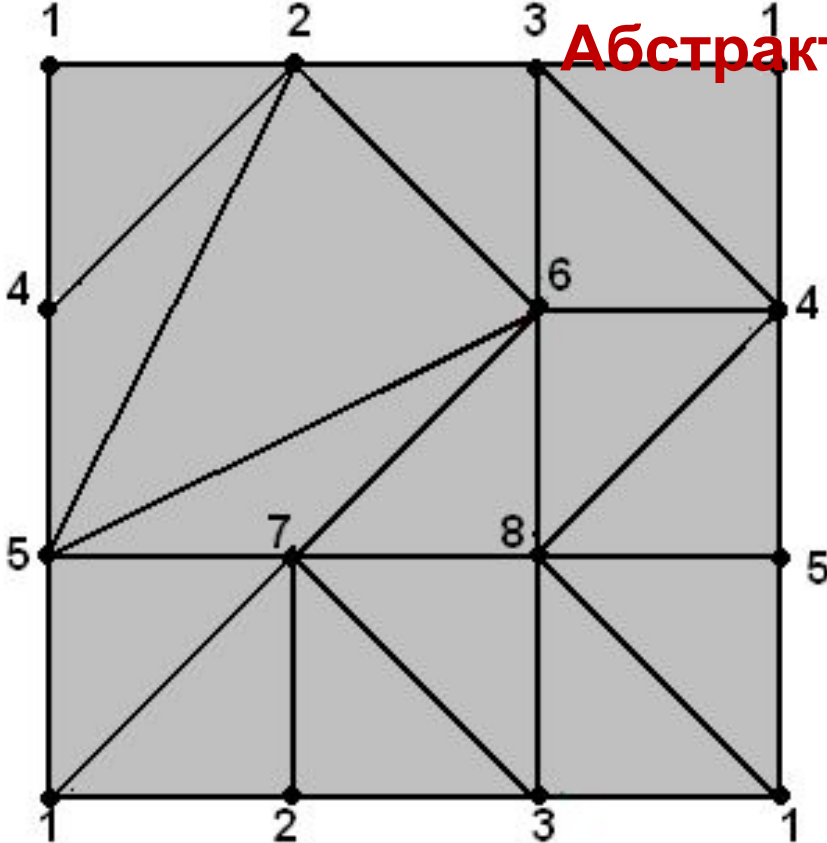
Гексадекаэдр — это

комбинаторно-топологический объект — правильная триангуляция тора с 8 вершинами и 16 гранями.

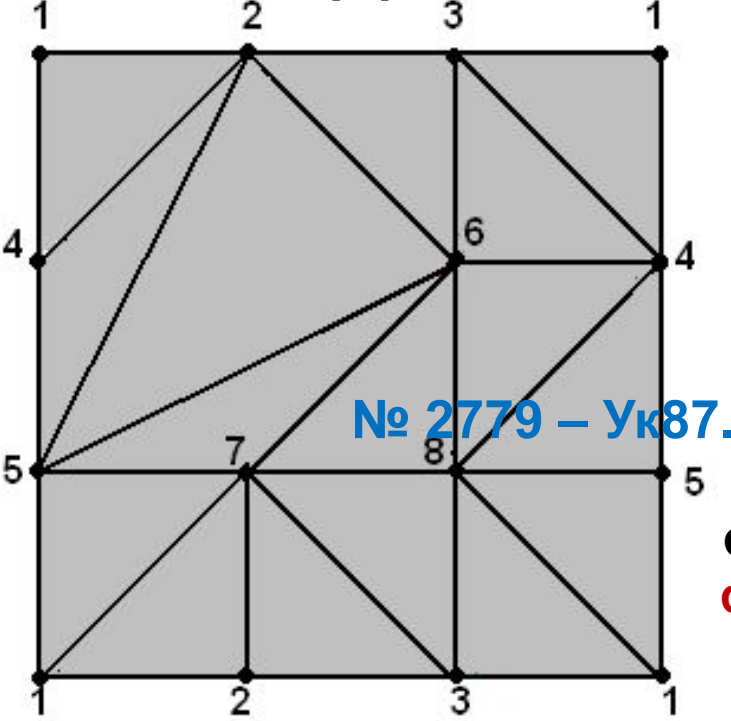
С. А. Л., Неприводимые триангуляции тора, Укр. геометр. сб. 30 (1987) 52–62.

■ АТГ — правильная карта на торе: каждая грань — треугольник и степень каждой вершины равна 6.

■ Ее граф изоморфен 1-скелету гексадекахорона, т.е. полному 4-дольному графу $K_{\{2,2,2,2\}}$.



Все ее автоморфизмы найдены при помощи компьютера:

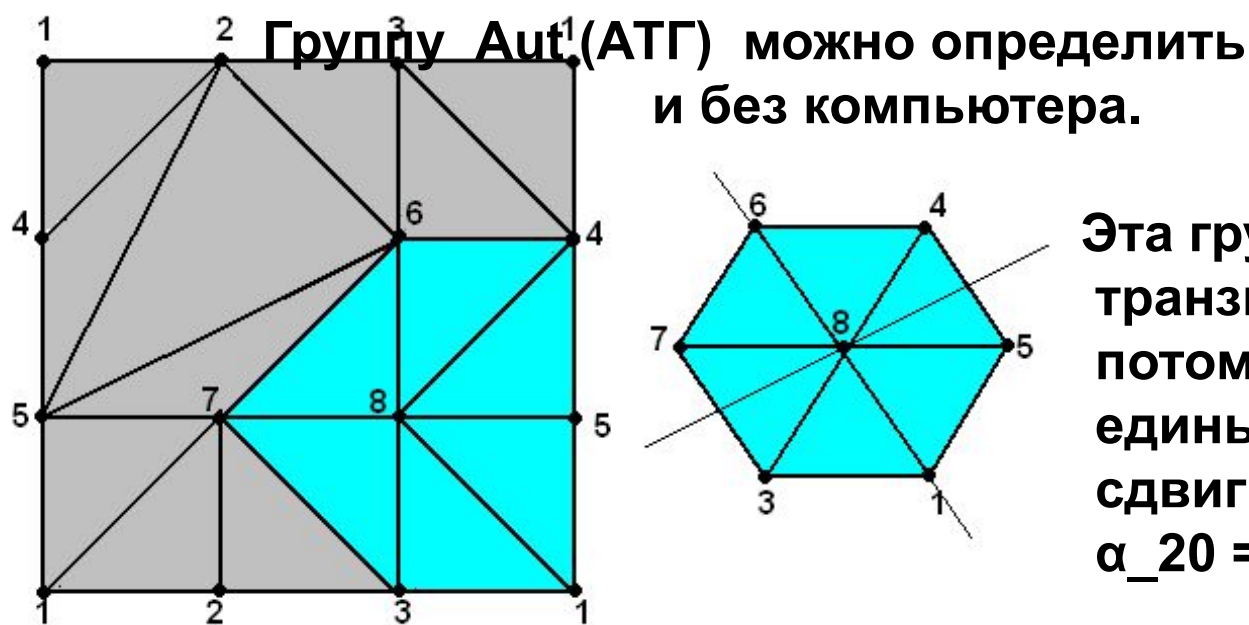


№ 2779 – Ук87.

С. А. Л., Перечисление в явном виде всех автоморфизмов неприводимых триангуляций тора и всех укладок на тор помеченных графов этих триангуляций. Харьков, 1987. – 57 с., Деп. в УкрНИИНТИ 01.10.87,

$\alpha_1 = \text{id}$ (тождественный)
 $\alpha_2 = (35) (47)$ $\alpha_3 = (28) (34) (57)$

- $\alpha_4 = (28) (37) (45)$ $\alpha_5 = (12) (47) (68)$ $\alpha_6 = (12) (35) (68)$
- $\alpha_7 = (1268) (3457)$ $\alpha_8 = (1268) (3754)$ $\alpha_9 = (13246587)$
- $\alpha_{10} = (13876524)$ $\alpha_{11} = (13) (27) (48) (56)$ $\alpha_{12} = (1365) (2784)$
- $\alpha_{13} = (14) (23) (58) (67)$ $\alpha_{14} = (1467) (2385)$ $\alpha_{15} = (14256783)$
- $\alpha_{16} = (14836725)$ $\alpha_{17} = (1563) (2487)$ $\alpha_{18} = (15) (24) (36) (78)$
- $\alpha_{19} = (15846327)$ $\alpha_{20} = (15276384)$ $\alpha_{21} = (16) (34) (57)$
- $\alpha_{22} = (16) (37) (45)$ $\alpha_{23} = (16) (28)$ $\alpha_{24} = (16) (28) (35) (47)$
- $\alpha_{25} = (17856423)$ $\alpha_{26} = (17236485)$ $\alpha_{27} = (1764) (2583)$
- $\alpha_{28} = (17) (25) (38) (46)$ $\alpha_{29} = (1862) (3457)$ $\alpha_{30} = (1862) (3754)$
- $\alpha_{31} = (18) (26) (47)$ $\alpha_{32} = (18) (26) (35)$



Эта группа вершинно-транзитивная, потому что в ней есть единый циклический сдвиг всех вершин: $\alpha_{20} = (15276384)$.

Подгруппа $\text{Shift} = \langle \alpha_{20} \rangle \approx \mathbb{Z}_8$. Она ненормальна.

С другой стороны, стабилизатор каждой вершины есть подгруппа изоморфная $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, ненормальная.

Например, стабилизатор вершины 8, есть подгруппа

$$\text{Stab} = \langle \alpha_2, \alpha_{22} \rangle \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$

порожденная 2-мя инволюциями $\alpha_2 = (35)(47)$ и $\alpha_{22} = (16)(37)(45)$ (реализуемыми геометрически «симметриями относительно перпендикулярных прямых»). Эта подгруппа ненормальна.

Таким образом, группа $\text{Aut}(\text{АТГ})$ может быть порождена так:

$$\begin{aligned}\text{Aut}(\text{АТГ}) &= \langle \alpha_2, \alpha_{22}, \alpha_{20} \rangle \\ &= (Z_2 \times Z_2) Z_8,\end{aligned}$$

где $Z_2 \times Z_2$ и Z_8 — как указаны на предыдущем слайде, причем произведение на Z_8 не является прямым.

Таким образом,

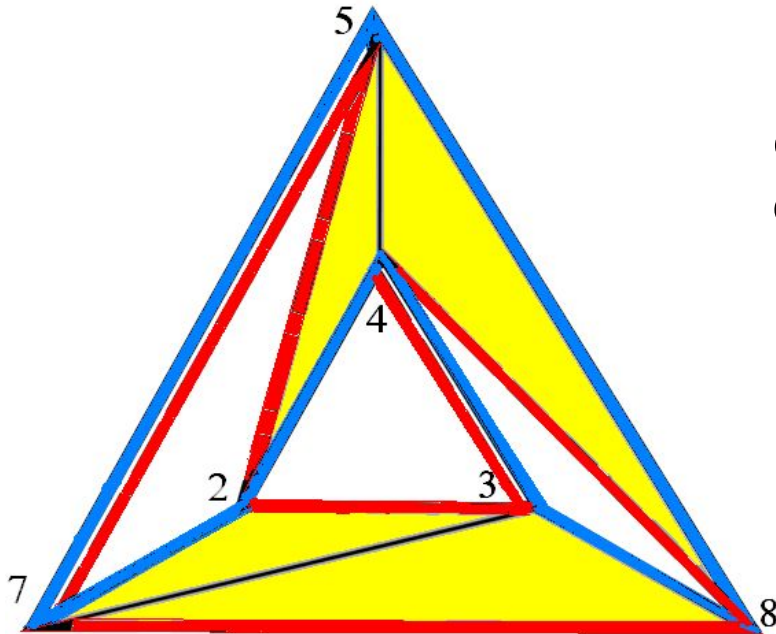
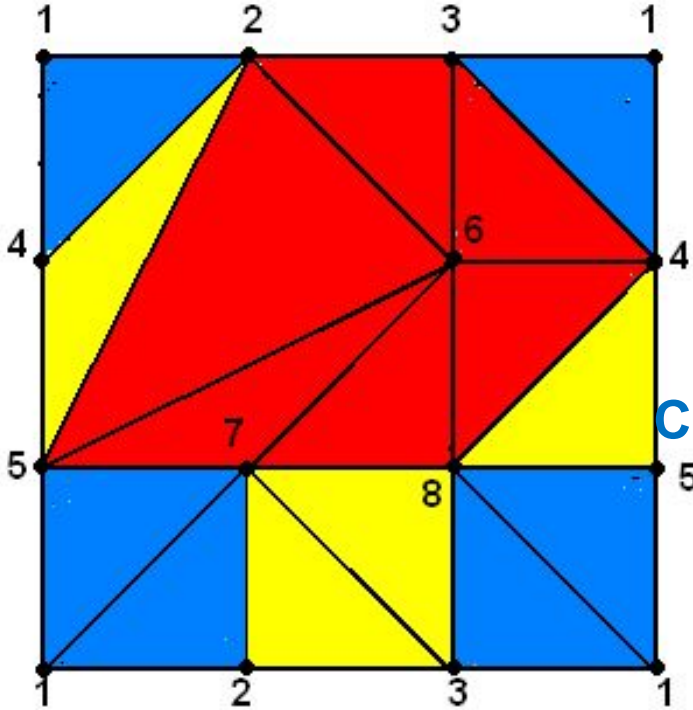
$$|\text{Aut}(\text{АТГ})| = |\text{Shift}| \cdot |\text{Stab}| : |\text{Shift} \cap \text{Stab}| = 8 \cdot 4 : 1 = 32.$$

Бипирамидальный Торoidalный Гексадекаэдр (БТГ) —

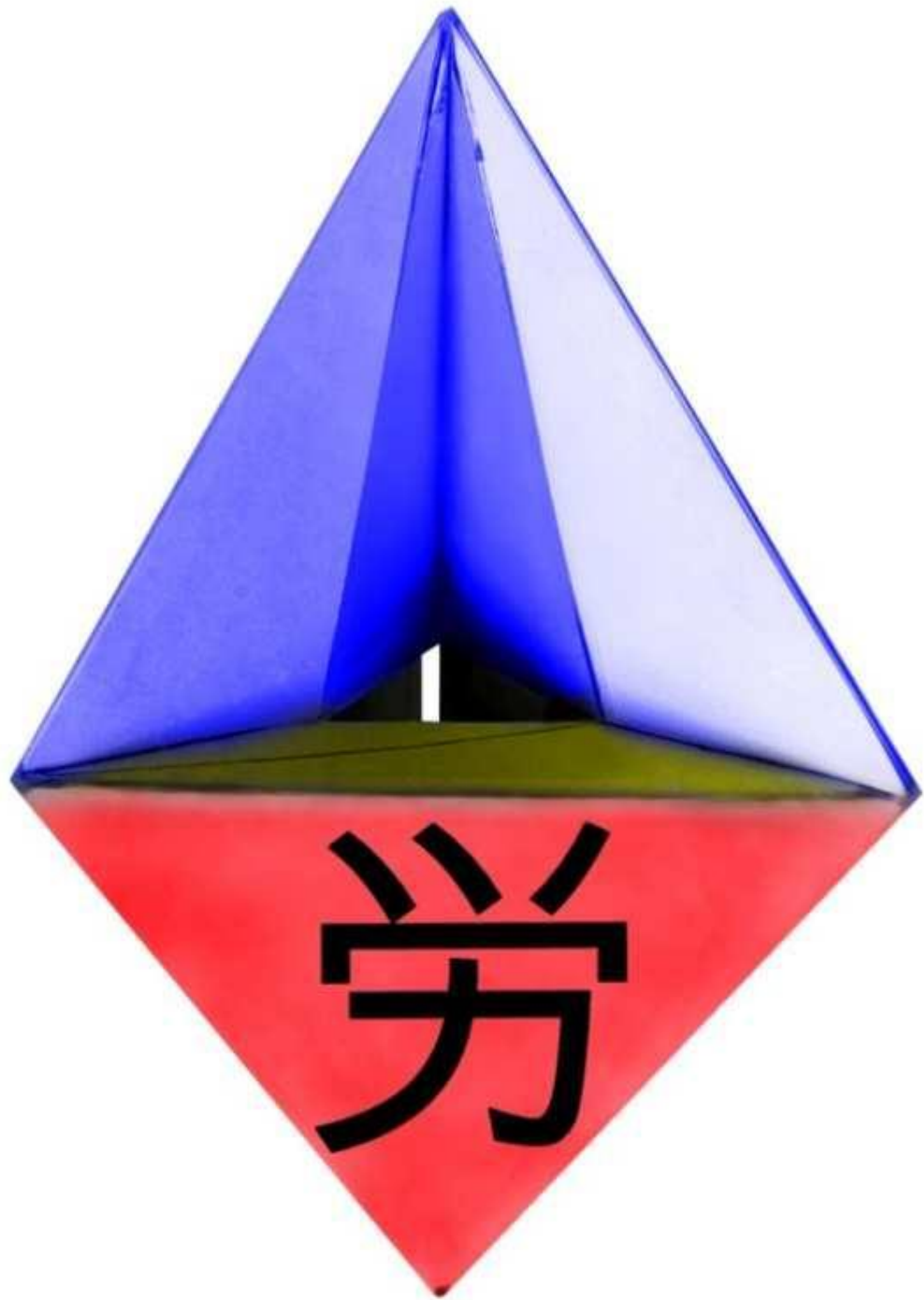
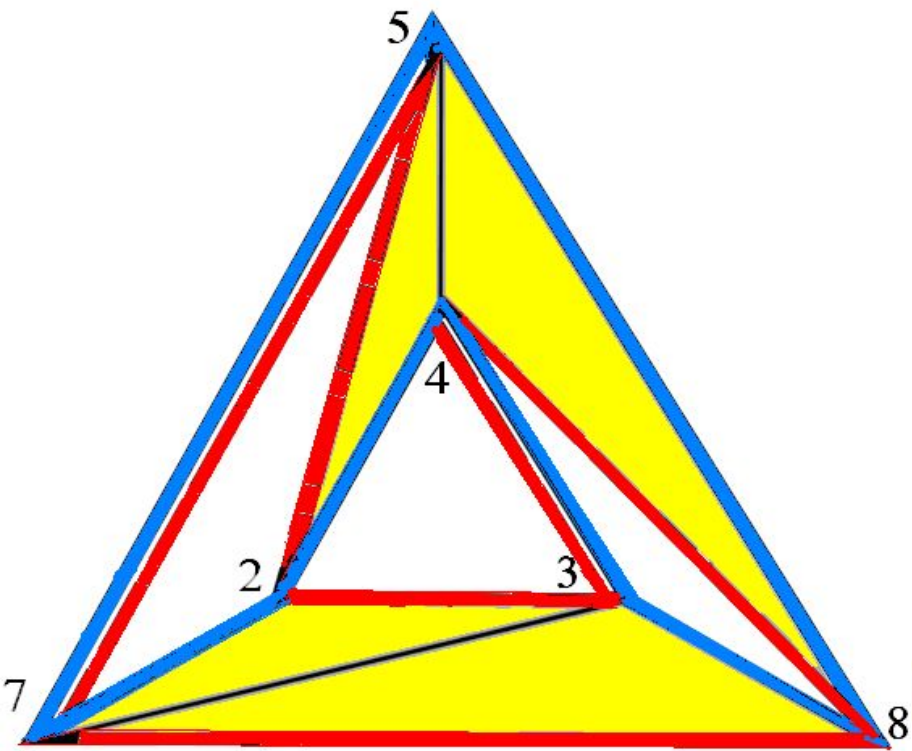
геометрическая модель АТГ

С. А. Л., Все неприводимые триангуляции тора реализуются в E^3 в виде многогранников, манускрипт, Мехмат МГУ (1983).

Эта работа была выполнена под руководством профессора И. Х. Сабитова и заняла 2-е место в конкурсе научных студенческих работ за 1983 год, ежегодно проводимом Мехматом МГУ.



□ Экватор у БТГ



Мы делаем четкое различие между понятиями «автоморфизм» и «симметрия».

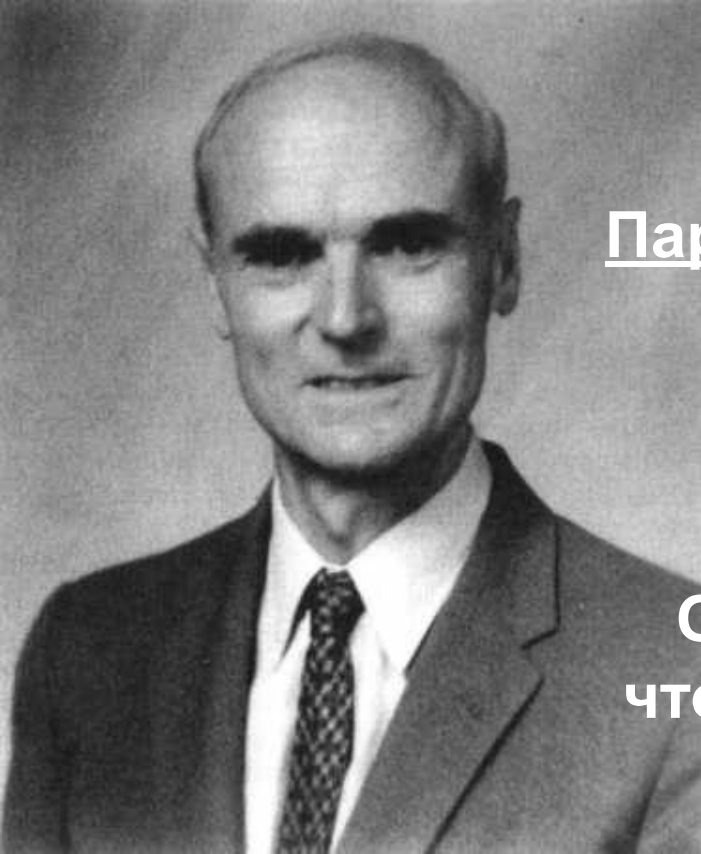
Далее, термин «симметрия» используется в широком смысле: для обозначения и настоящих симметрий, и вращений пространства.

Ни один автоморфизм АТГ, кроме тождественного, не реализуется геометрически, т.е. движениями объемлющего 3-мерного пространства, переводящими БТГ в себя, поэтому $\text{Sym}(\text{БТГ}) = \{ \text{id} \}$.

Все автоморфизмы становятся скрытыми симметриями геометрической модели БТГ.



Парадигма Кокстера



Парадигма Кокстера «групп и геометрии»

— это целостная система взглядов и положений по сближению и соединению алгебры с геометрией.

Одно из этих положений состоит в том, что **надо реализовывать геометрически не только сам комбинаторный или топологический объект, а также его автоморфизмы** в виде геометрических симметрий его геометрической модели в пространстве.

Хáролд Скoтт МакДóналд («Доналд») Кокстер (1907—2003).

- H.S.M. Coxeter, *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edit. 1991.
- H.S.M. Coxeter and W.O.J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer, Berlin 1980 (4th edit.)

Борьба со скрытыми симметриями — путь претворения в жизнь парадигмы Кокстера.

Многогранные реализации групп правильных карт на 2-мерных поверхностях — вклад в развитие этой парадигмы.

Старая идея: Чтобы исключить скрытые симметрии, можно использовать модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. □



C. A. L., Plummer M.D., Zha X.: Isoperimetric constants of infinite plane graphs, *Discrete & Computational Geometry* 28 (3): 313-330 (2002)

Борьба со скрытыми симметриями — путь претворения в жизнь парадигмы Кокстера.

Новая идея: Но что, если настаивать на том, чтобы оставаться в евклидовом пространстве? Это возможно! Но только, если достаточно увеличить размерность этого пространства.

(А не пытаться загнать объект в пространство заведомо меньшей размерности, как мы делали выше, строя БТГ.)

Тор Клиффорда: $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 = (x_3)^2 + (x_4)^2$.

Для 2-мерного тора более подходит евклидово 4-мерное пространство, чем 3-мерное.

Например, АТГ не удастся вложить в 3-пространство без скрытых симметрий, а в 4-пространство уже можно.

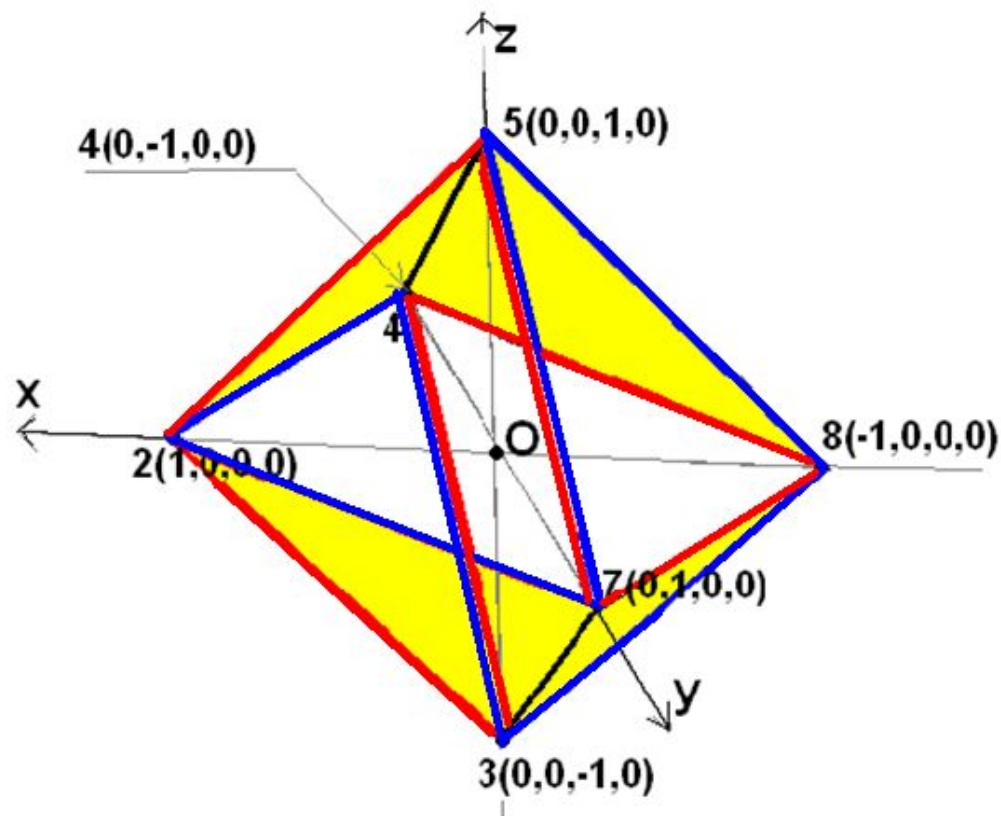
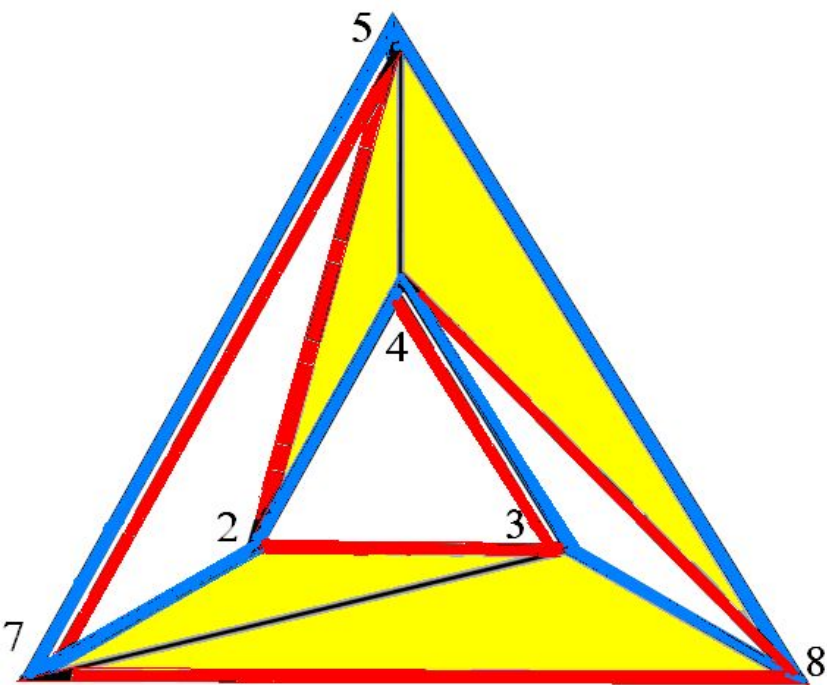
В 3-мерном пространстве тор переходит в себя только вращениями в направлении параллелей, а в 4-мерном пространстве также вращениями в направлении меридианов.

<http://alem3d.obidos.org/en/torusio/math>

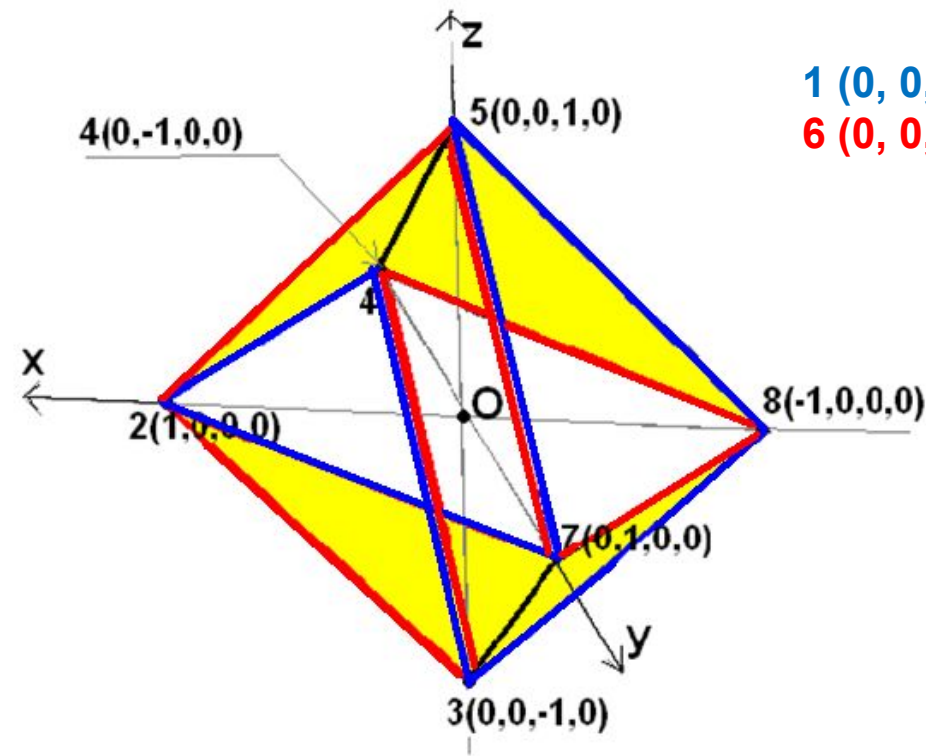
**С. А. Л., Polyhedral suspensions of arbitrary genus,
Graphs & Combinatorics, 26 (2010), в печати.**

Теорема (С. А. Л.): В евклидовом 4-мерном пространстве существует 2-мерный тороидальный многогранник с 8 вершинами и 16 треугольными гранями, имеющий следующие три свойства правильности. Этот многогранник будет называться **правильным тороидальным гексадекаэдром и будет обозначаться **ПТГ**.**

- (1) Все грани ПТГ — равносторонние треугольники.**
 - (2) ПТГ не имеет скрытых симметрий в том смысле, что группа Aut (АТГ) точно представлена группой Sym (ПТГ) в 4-мерном пространстве.**
-) Группа Sym (ПТГ) действует транзитивно на множестве вершин ПТГ.**



Доказательство: На рисунке справа — экватор БТГ переложен из 2-пространства в 3-пространство в геометрически симметричном виде, как 2-мерный подкомплекс октаэдра. Затем к координатам каждой вершины добавили четвертую координату $w = 0$, тем самым поместив экватор уже в 4-пространство. Две остающиеся вершины, **1** и **6**, располагаются на четвертой координатной оси Ow и имеют координаты $(0, 0, 0, 1)$ и $(0, 0, 0, -1)$, соответственно.



1 (0, 0, 0, 1) — северный полюс
 6 (0, 0, 0, -1) — южный полюс

АТГ реализуется как подкомплекс 2-мерного скелета **гексадекахорона** (или **4-мерного гипероктаэдра**) в 4-мерном пространстве.

Восемь вершин гексадекахорона:
 $(\pm 1, 0, 0, 0), (0, \pm 1, 0, 0),$
 $(0, 0, \pm 1, 0), (0, 0, 0, \pm 1).$

Все вершины соединены ребрами, кроме противоположащих пар. Значит все грани АТГ геометрически реализуются равносторонними треугольниками со стороной $\sqrt{2}$. Свойство (1) доказано.

Докажем свойство (2), что все 32 автоморфизма триангуляции АТГ реализуются геометрически в 4D модели в виде ПТГ.

1 (0, 0, 0, 1) и 6 (0, 0, 0, -1)

Вспомним, что Aut (АТГ) порождается тремя автоморфизмами:
 $\alpha_2 = (35) (47)$, $\alpha_{22} = (16) (37) (45)$,
 $\alpha_{20} = (15276384)$

и соответственно
представима в 4-пространстве
дискретной группой движений,
порожденной следующими
ортогональными матрицами:

$A_2 =$

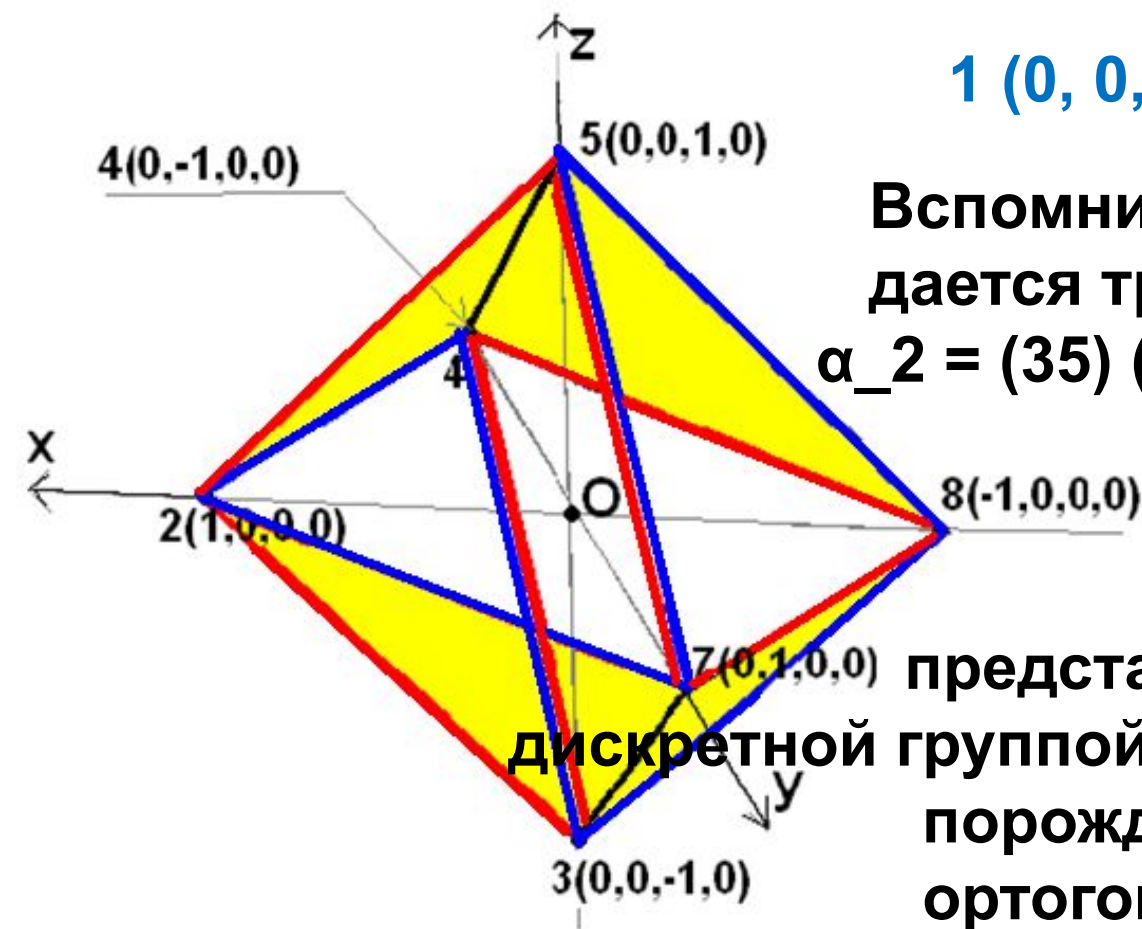
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$A_{22} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$A_{20} =$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

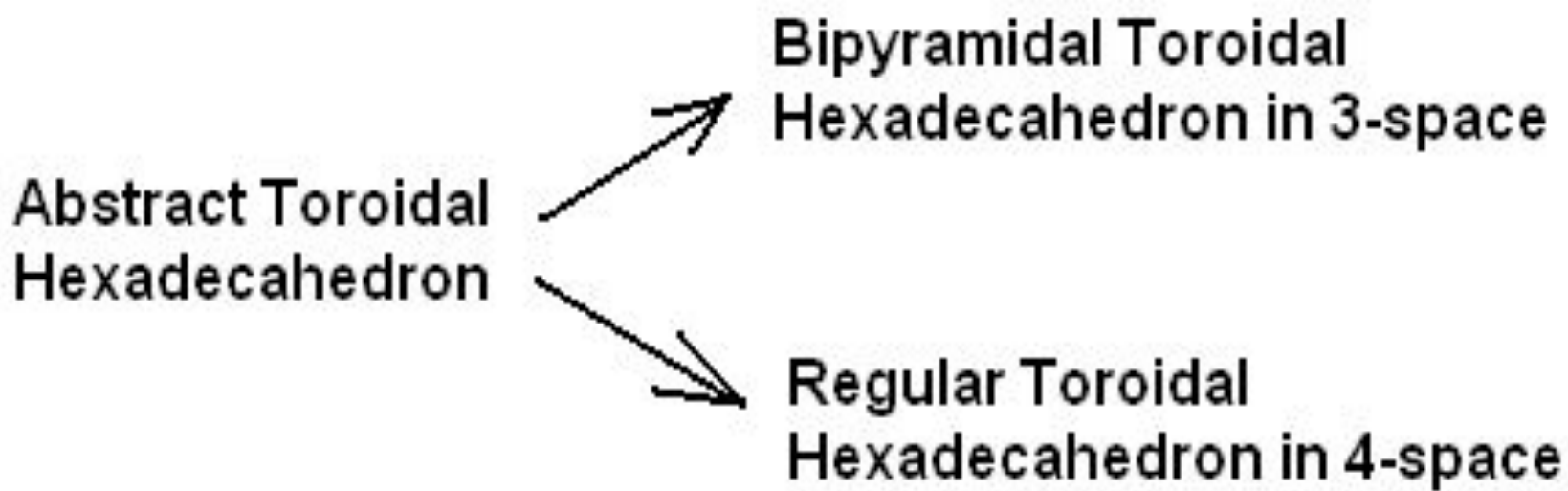


Таким образом, получено точное представление группы $\text{Aut}(\text{АТГ})$ степени 4.

$$\text{Sym}(\text{ПТГ}) \subset \text{SO}(4) \subset \text{GL}(4)$$

Где $\text{SO}(4)$ — специальная ортогональная группа степени 4, а $\text{GL}(4)$ — полная линейная группа степени 4,

И, таким образом, все автоморфизмы реализуются **только вращениями** 4-мерного пространства. ■



Резюмируя, многогранники БТГ и ПТГ — различные геометрические модели абстрактной триангуляции тора АТГ.

Первый — в трехмерном евклидовом пространстве, а второй — в четырехмерном.

В 3D модели БТГ все автоморфизмы, кроме тождественного, являются скрытыми симметриями.

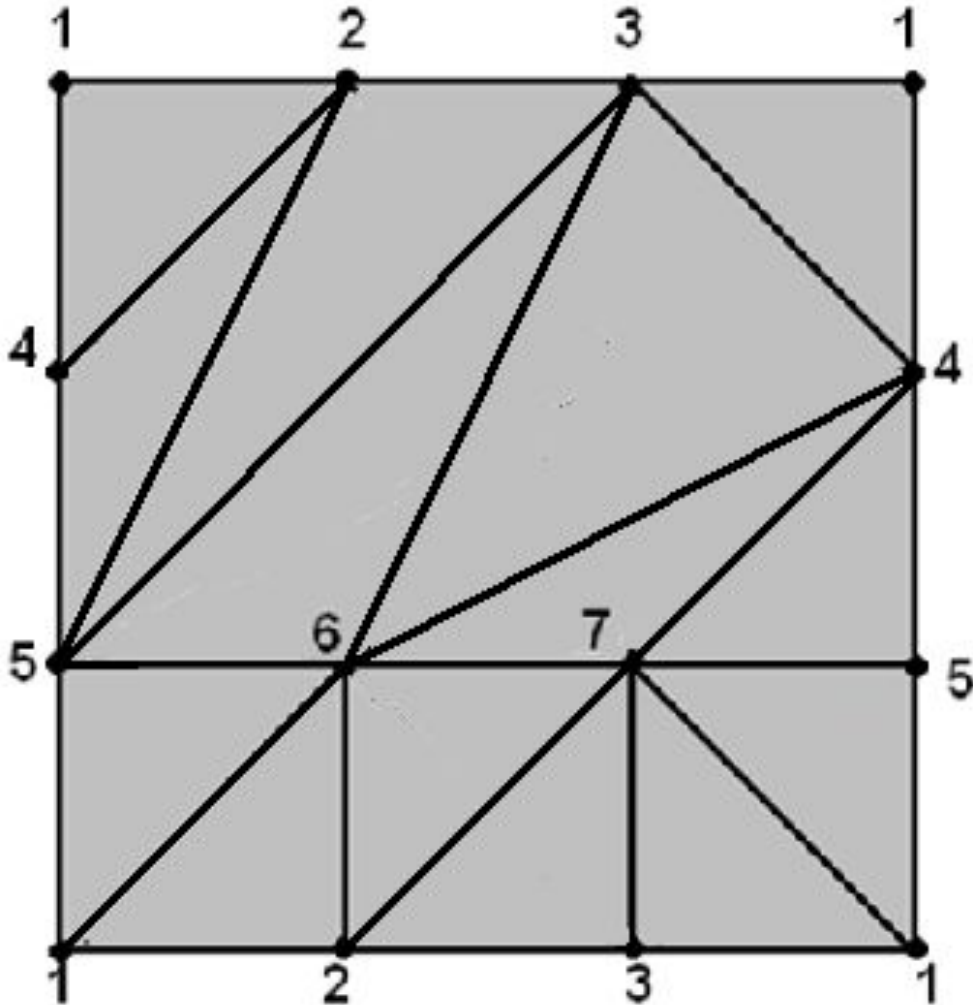
Другими словами, индекс подгруппы симметрий в группе автоморфизмов = 32.

В 4D модели ПТГ же, наоборот, все до единого автоморфизмы реализуются геометрически, т.е. индекс подгруппы симметрий = 1.

Открытые вопросы

- Существуют ли другие правильные 2-мерные многогранники, кроме ПТГ, в (евклидовом) пространстве размерности 4 ?
- А в пространствах высших размерностей?
- Существуют ли в 3-мерном пространстве правильные многогранники топологических типов, отличных от сферы? *Гипотеза: Нет.*

Существуют ли другие правильные 2-мерные многогранники, кроме ПТГ, в пространствах размерностей ≥ 4 ?



В частности, реализуется ли правильная триангуляция тора с полным графом K_7 в виде правильного многогранника в евклидовом пространстве высшей размерности?

Теорема (Рингель и Янгс):

Для каждого целого положительного n такого, что $(n-3)(n-4)$ делится нацело на 12, полный граф K_n триангулирует ориентируемую поверхность рода $(n-3)(n-4)/12$. ■

[Ringel G., Youngs J.W.T., Solution of the Heawood map-colouring problem Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 60 \(1968\), 438—445.](#)

Отправная лемма (С. А. Л.): Каждая такая триангуляция вкладывается в n -пространство так, что все грани реализуются изометричными равносторонними треугольниками.

Доказательство: Вложить K_n в 1-скелет n -мерного гипероктаэдра. Например K_7 в 7-мерный гипероктаэдр. ■

Реализуются ли при этом геометрически все автоморфизмы триангуляции?

Оказывается, будет вершинно-транзитивной группа автоморфизмов любой триангуляции тора, в которой степень каждой вершины = 6.

Datta B., Upadhyay A.K.: Degree-regular triangulations of torus and Klein bottle, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 115 (2005), 279–307.

Однако, это может быть легким следствием из результата Негами:
Negami, S.: Uniqueness and faithfulness of embedding of toroidal graphs, Discrete Math. 44 (1983), 161-180.

Итак, что же такое правильный многогранник??

Что касается 2-мерных многогранников в евклидовом n -мерном пространстве, тот заслуживает звания «правильный», который:

- правильный как абстрактная карта на 2-мерной поверхности,
- имеет транзитивную (здесь возможны варианты) группу автоморфизмов

и

- не имеет скрытых симметрий.

Такое определение правильного многогранника предполагает более широкий класс многогранников, чем в классическом смысле.

Исторически, когда ограничивались многогранниками в 3-мерном пространстве, нашли **пять Платоновых тел**.

Затем, допустив самопересечения, нашли еще **четыре правильных многогранника Кеплера-Пуансо**.

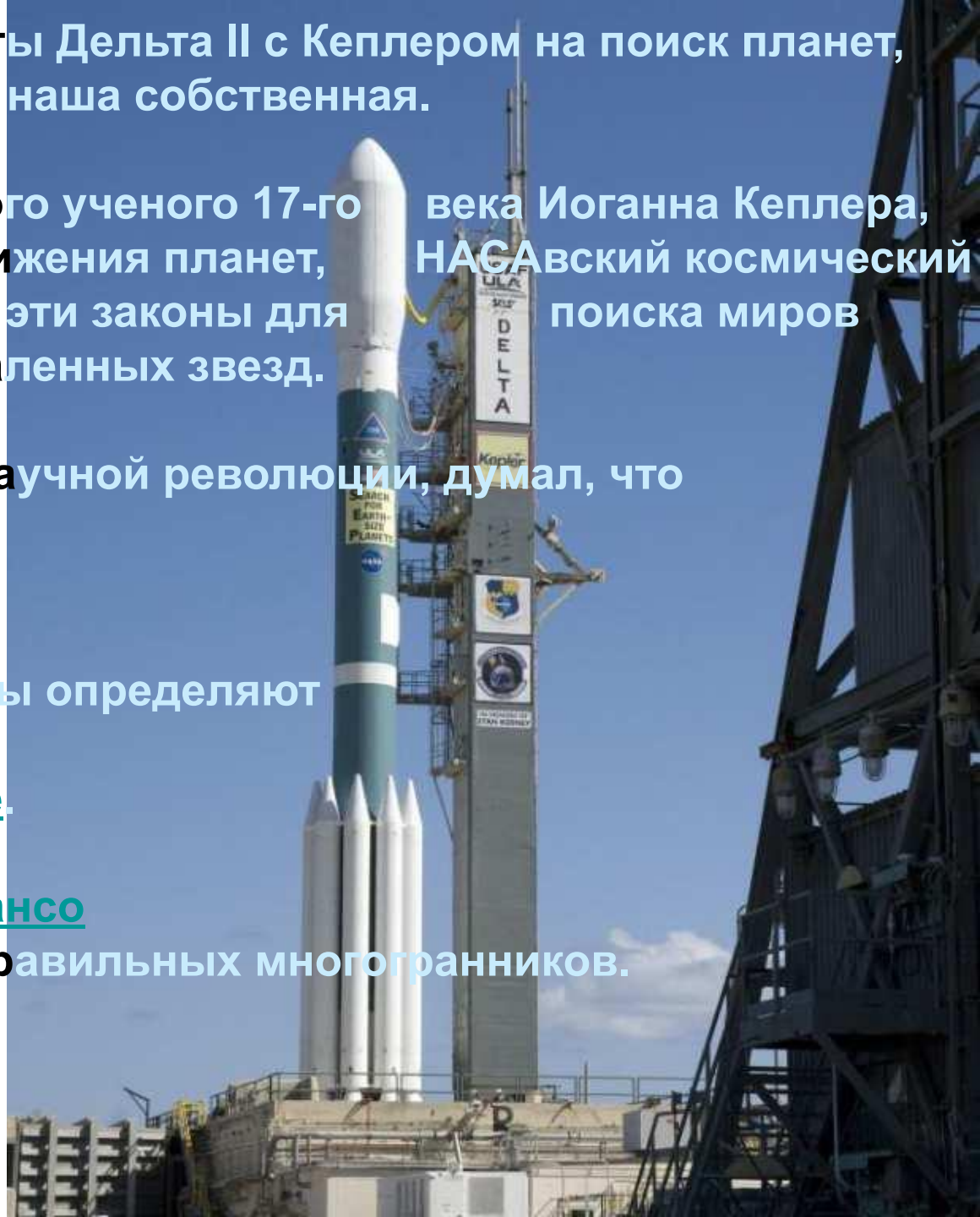
Как и у Платоновых тел,

- все их грани являются изометричными правильными многоугольниками,
- и
- все их вершины идентичны

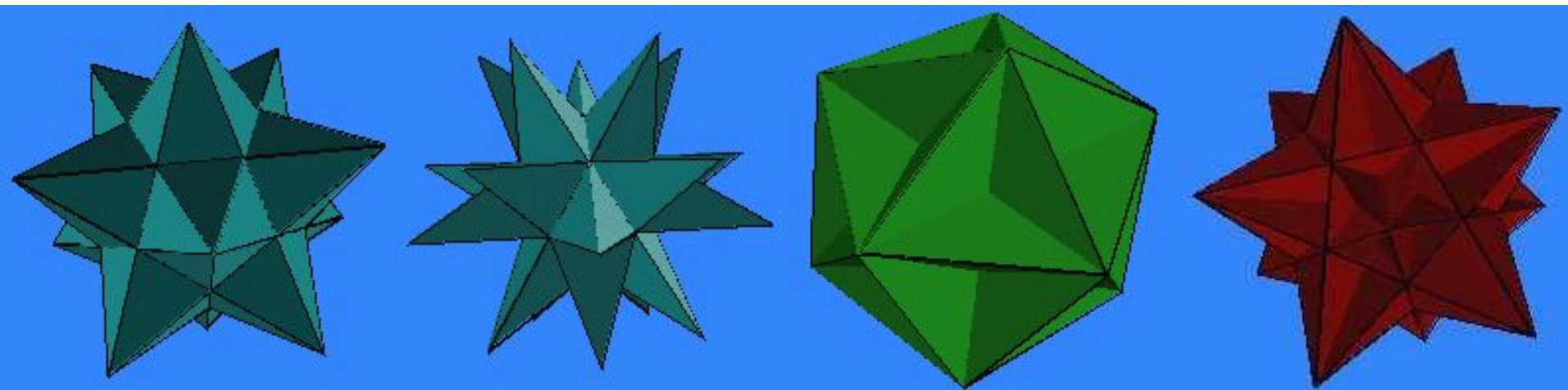
6 марта, 2009 г. Запуск ракеты Дельта II с Кеплером на поиск планет, в некотором отношении как наша собственная.

Названный в честь немецкого ученого 17-го века Иоганна Кеплера, НАСАвский космический аппарат Кеплер использует эти законы для поиска миров подобных Земле вокруг удаленных звезд.

Кеплер, ключевая фигура научной революции, думал, что Вселенная состоит из вложенных друг в друга Платоновых тел, вписанные в которых сферы определяют планетарные орбиты в нашей солнечной системе. Вместе, Платоновы тела и многогранники Кеплера-Пуансо образуют множество 9-ти правильных многогранников.



Многогранники Кеплера-Пуансо (не типа сферы!)



Малый
звездчатый
додекаэдр

Большой
звездчатый
додекаэдр

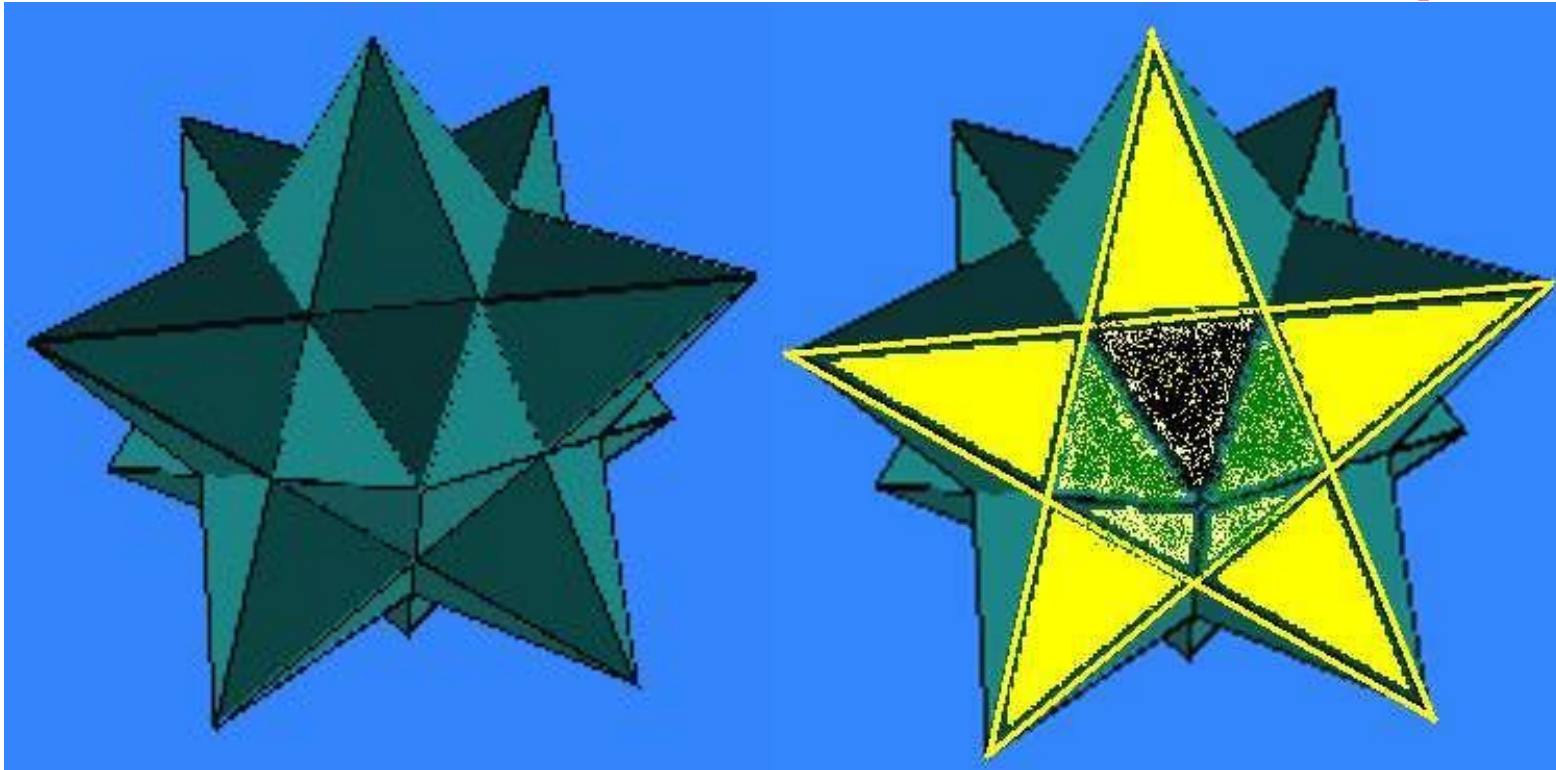
Большой
додекаэдр

Большой
икосаэдр

В 1813 г. (или 1812 ??) Коши доказал, что кроме пяти Платоновых тел и четырех многогранников Кеплера-Пуансо больше нет правильных многогранников. **Может быть Коши подразумевал «в трехмерном пространстве»?**

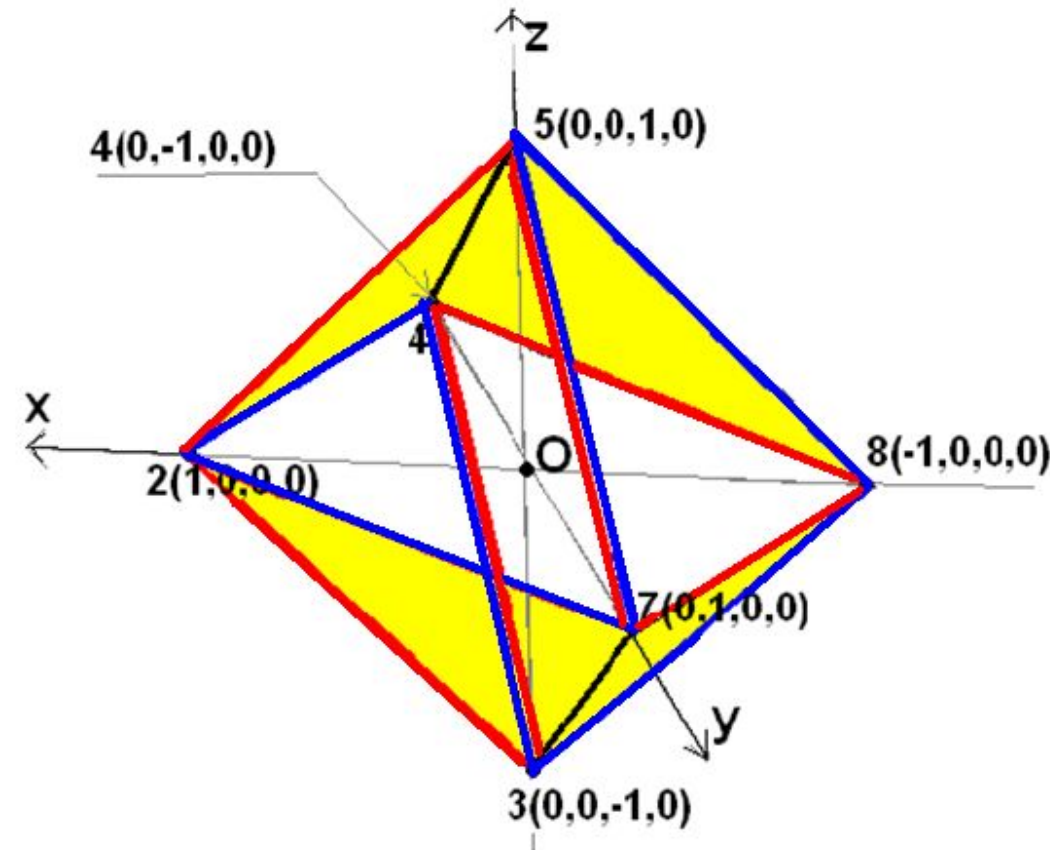
A. L. Cauchy, *Recherches sur les polyèdres; Premier mémoire*. J. École Polytech. 9 (1813), 68 – 98.

Малый звездчатый додекаэдр



- Многогранник в 3-мерном пространстве **с самопересечениями**. (Сергей Петрович Новиков не признает многогранников с самопересечениями.)
- У него 12 вершин, 30 ребер и 12 граней. (Для сравнения, у додекаэдра 20 вершин, 30 ребер и 12 граней.)

Мы же обобщаем по другому направлению:
 не допуская самопересечений,
 увеличиваем размерность объемлющего пространства.
 И находим еще один правильный многогранник —
правильный тороидаальный гексадекаэдр, ПТГ



На рисунке слева
 изображено его сечение
 экваториальной
 гиперплоскостью $Oxyz$
 (с уравнением $w = 0$).

Остается открытым вопрос
 о пред-
 ставлении ПТГ картинкой.

1 (0, 0, 0, 1) — северный полюс
6 (0, 0, 0, -1) — южный полюс

Спасибо за внимание!

Вопросы?