

**Правильные  
многоугольники.**

# Определение правильного многоугольника.

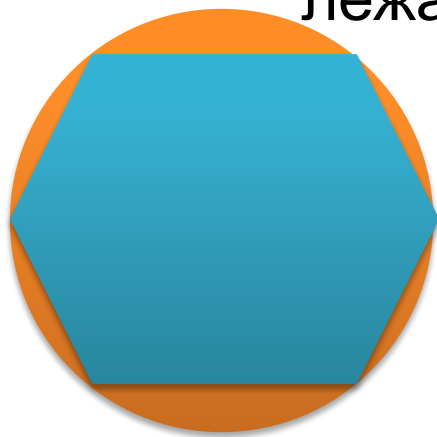
Правильный многоугольник – это  
выпуклый многоугольник, у которого  
равны все стороны и все  
(внутренние) углы.

Формула для вычисления угла  
правильного  $n$ -угольника.

$$\alpha_n = \frac{n - 2}{n} \times 180^\circ$$

# Окружность, описанная около правильного многоугольника.

Окружность называется описанной около многоугольника, если все его вершины лежат на этой окружности.



Теорема: около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

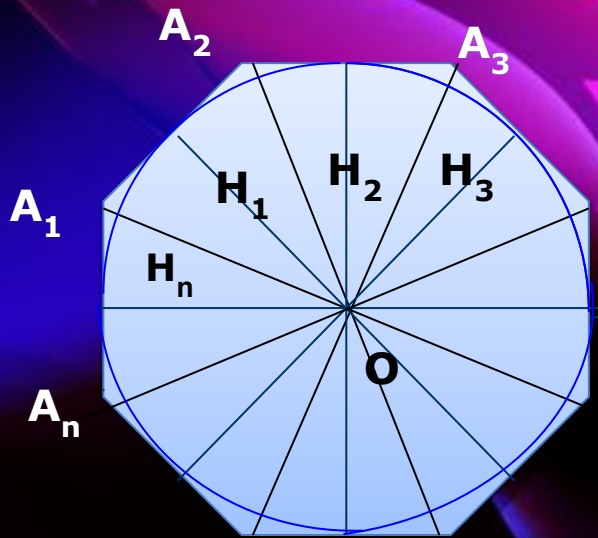


# Окружность, вписанная в правильный многоугольник.

Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.



Теорема: В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

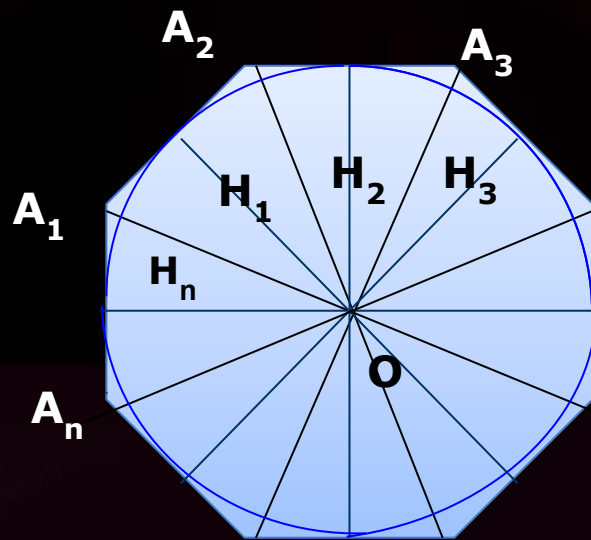


Дано:  $ABC\dots A_n$  -  
правильный  
многоугольник.

Доказать: в любой  
правильный многоугольник  
можно вписать окружность,  
и притом только одну.

Пусть  $A_1 A_2 \dots A_n$  - правильный многоугольник,  $O$  -  
центр описанной окружности. При доказательстве  
теоремы 1 мы выяснили, что  $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 =$   
 $\triangle OA_nA_1$ , поэтому высоты этих треугольников,  
проведённые из вершины  $O$ , также равны.  
Поэтому окружность с центром  $O$  и радиусом  $OH$   
проходит через точки  $H_1, H_2, H_n$  и касается  
сторон многоугольника в этих точках, т.е.  
окружность вписана в данный многоугольник.

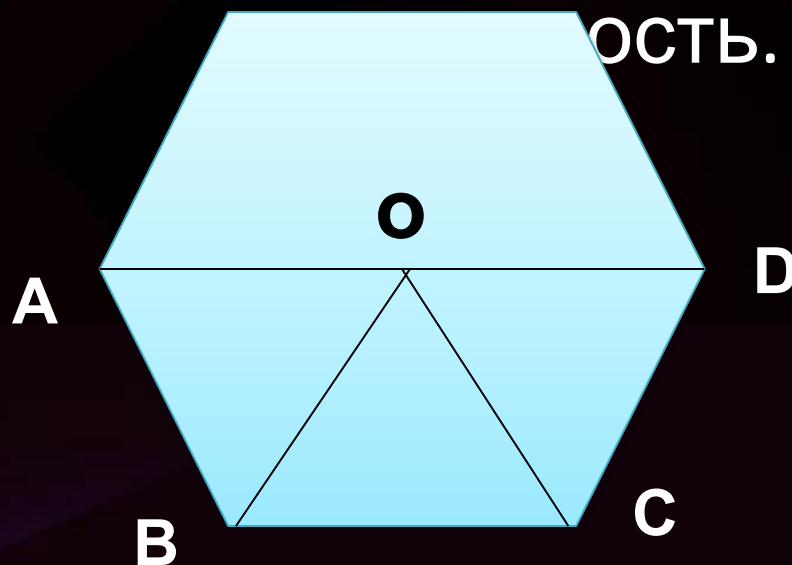
Докажем, что вписанная окружность только одна. Предположим, что существует другая вписанная окружность с центром  $O$  и радиусом  $OA$ . Тогда её центр равноудалён от сторон многоугольника, т.е. точка  $O_1$  лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника, и поэтому совпадает с точкой  $O$  пересечения этих биссектрис.







Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например  $A, B, C$ . Т.к. через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника  $ABC...A_n$  можно описать только одну



# Следствия Я.

## Следствие №1

Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

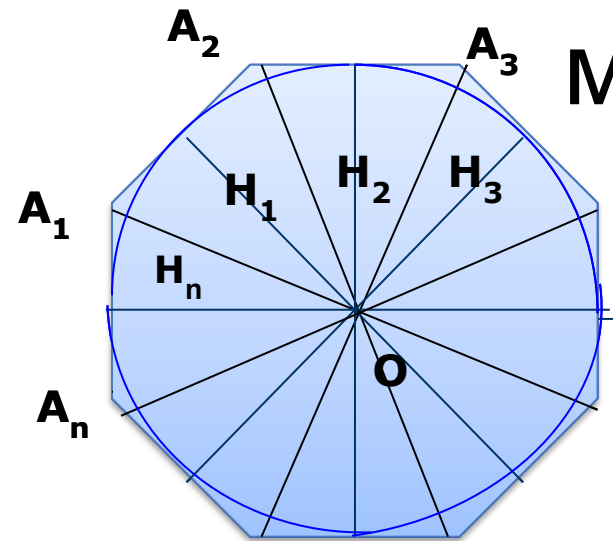


## Следствие №2

Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.



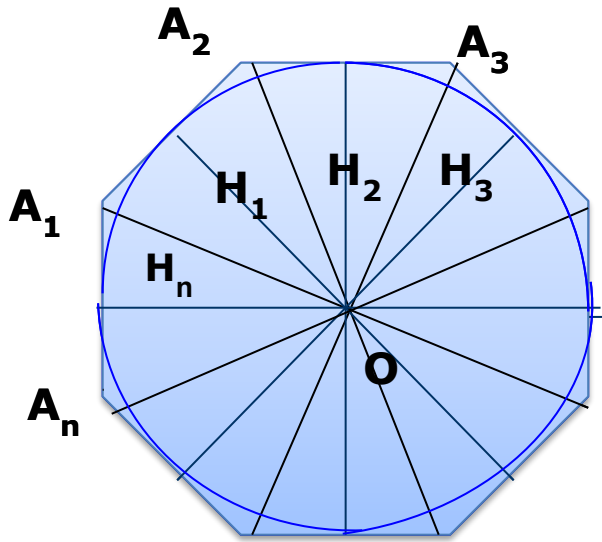
# Формула для вычисления площади правильного многоугольника.



Пусть  $S$  – площадь правильного  $n$ -угольника,  $a_1$  – его сторона,  $P$  – периметр, а  $r$  и  $R$  – радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2} Pr$$





Для этого, соединим центр данного многоугольника с его вершинами. Тогда многоугольник разобьется на  $n$  равных треугольников, площадь каждого из которых равна  $\frac{1}{2} a_n r$

Следовательно,

$$S = n \times \frac{1}{2} a_n r = \frac{1}{2} (n a_n) r = \frac{1}{2} Pr$$



# Формула для вычисления стороны правильного многоугольника.

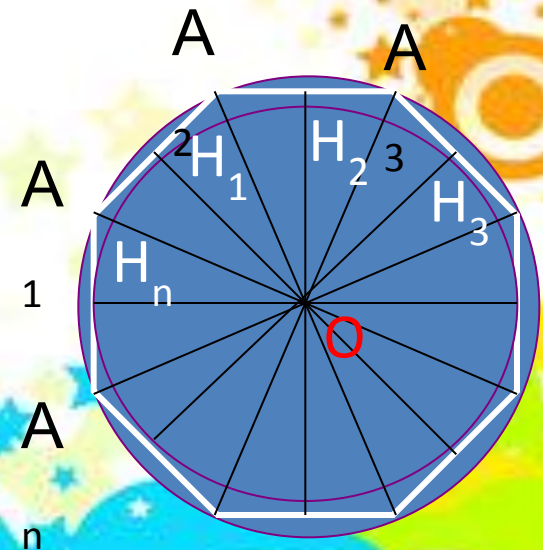
Выведем формулы:

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n} \quad r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$

Для вывода этих формул воспользуемся

рисунком. В прямоугольном  $\triangle A_1 H_1 O$   $\angle A_1 = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{180^\circ}{2n}$

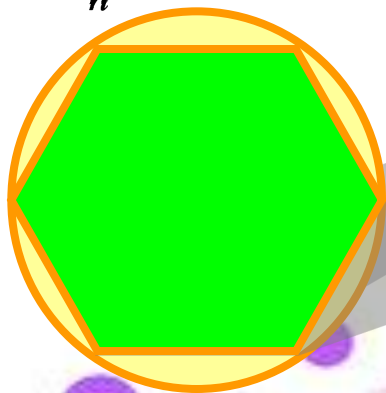
$$r = OH_1 = R \cos \left( 90^\circ - \frac{180^\circ}{2n} \right) = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$



$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

Полагая в формуле  $n = 3, 4$  и  $6$ , получим выражения для сторон правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника:

$$a_n \equiv 2R \sin \frac{180^\circ}{6} \equiv 2R \sin 30^\circ \equiv 2R \times \frac{\sqrt{3}}{2} = R \sqrt{3}$$



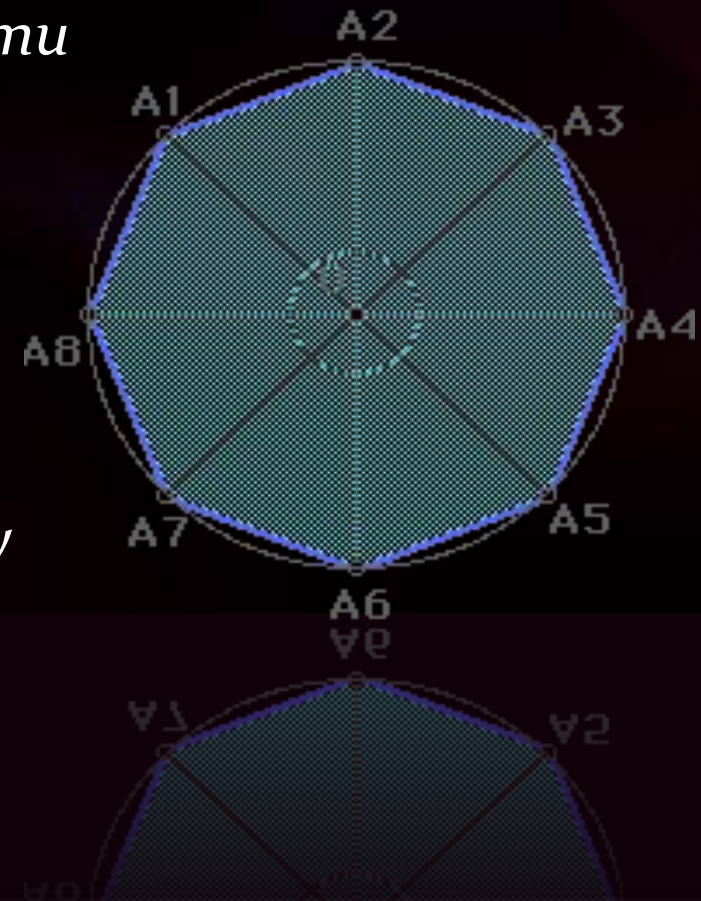
# Построение правильных МНОГОУГОЛЬНИКОВ.

Задача №1

Дано: окружность  $(O; R)$

Построить правильный  $n$ - угольник.

1. окружность разделим на  $n$  равных дуг. Для этого проведем радиусы  $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$  этой окружности так, чтобы угол  $A_1OA_2 =$  угол  $A_2OA_3 = \dots =$  угол  $A_{n-1}OA_n =$  угол  $A_nOA_1 = 360^\circ/n$  (на рисунке  $n=8$ ).
2. Если теперь провести отрезки  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ , то получим  $n$ - угольник  $A_1A_2 \dots A_n$ . Треугольники  $A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_nOA_1$  равны друг другу, поэтому  $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = A_nA_1$ . Отсюда следует, что  $A_1A_2 \dots A_n$  - правильный  $n$ - угольник.





## Задача №2

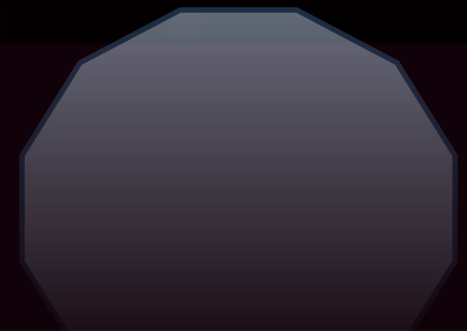
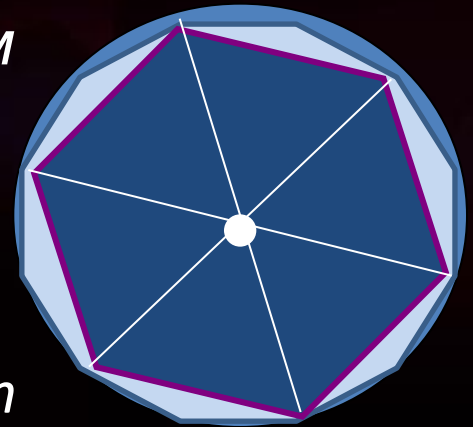
Дано:  $A_1, A_2 \dots A_n$  - правильный  $n$  - угольник

Построить правильный  $2n$ -угольник

Решение.

1. Опишем около него окружность. Для этого построим биссектрисы углов  $A_1$  и  $A_2$  и обозначим буквой  $O$  точку их пересечения.
2. Затем проведем окружность с центром  $O$  радиуса  $OA_1$ .
3. Разделим дуги  $A_1A_2, A_2A_3 \dots, A_n A_1$  пополам
4. Каждую из точек деления  $B_1, B_2, \dots, B_n$  соединим отрезками с концами соответствующей дуги.
5. Для построения точек  $B_1, B_2, \dots, B_n$  можно воспользоваться серединным перпендикулярами к сторонам данного  $n$  - угольника.

На рисунке таким способом построен правильный двенадцатиугольник  $A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_6 B_6$ .





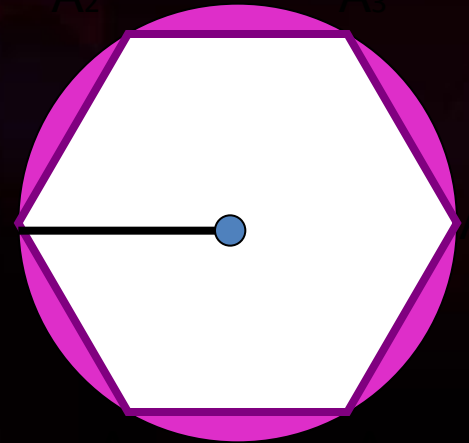
### Задача №3

Дано: отрезок  $PQ$ .

Построить правильный шестиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

Решение:

1. Построим окружность  $(O;PQ)$  и отметим на ней произвольную точку  $A_1$
2. Не меняя раствора циркуля, построим на этой окружности точки  $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  так, чтобы выполнялись равенства  $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$ .
3. Соединяя последовательно построенные точки отрезками, получим искомый правильный шестиугольник  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ .



1. Любой правильный многоугольник является выпуклым

2. Любой выпуклый многоугольник является правильным

3. Многоугольник является правильным, если он выпуклый и все его стороны равны

4. Треугольник является правильным, если все его углы равны

5. Любой равносторонний треугольник является правильным

6. Любой четырехугольник с равными сторонами является правильным

7. Любой правильный четырехугольник является квадратом

1	ДА <input type="checkbox"/>	НЕТ <input checked="" type="checkbox"/>
2	ДА <input type="checkbox"/>	НЕТ <input checked="" type="checkbox"/>
3	ДА <input type="checkbox"/>	НЕТ <input checked="" type="checkbox"/>
4	ДА <input type="checkbox"/>	НЕТ <input checked="" type="checkbox"/>
5	ДА <input type="checkbox"/>	НЕТ <input checked="" type="checkbox"/>
6	ДА <input type="checkbox"/>	НЕТ <input checked="" type="checkbox"/>
7	ДА <input type="checkbox"/>	НЕТ <input checked="" type="checkbox"/>



**ПРАВИЛЬНО**





НЕПРАВИЛЬНО





**ПРЕЗЕНТАЦИЮ  
ВЫПОЛНИЛИ  
УЧЕНИЦЫ 9А КЛАССА:**

**МЫШКО ДЬЯЧОВА  
АДНИС АИДРА**