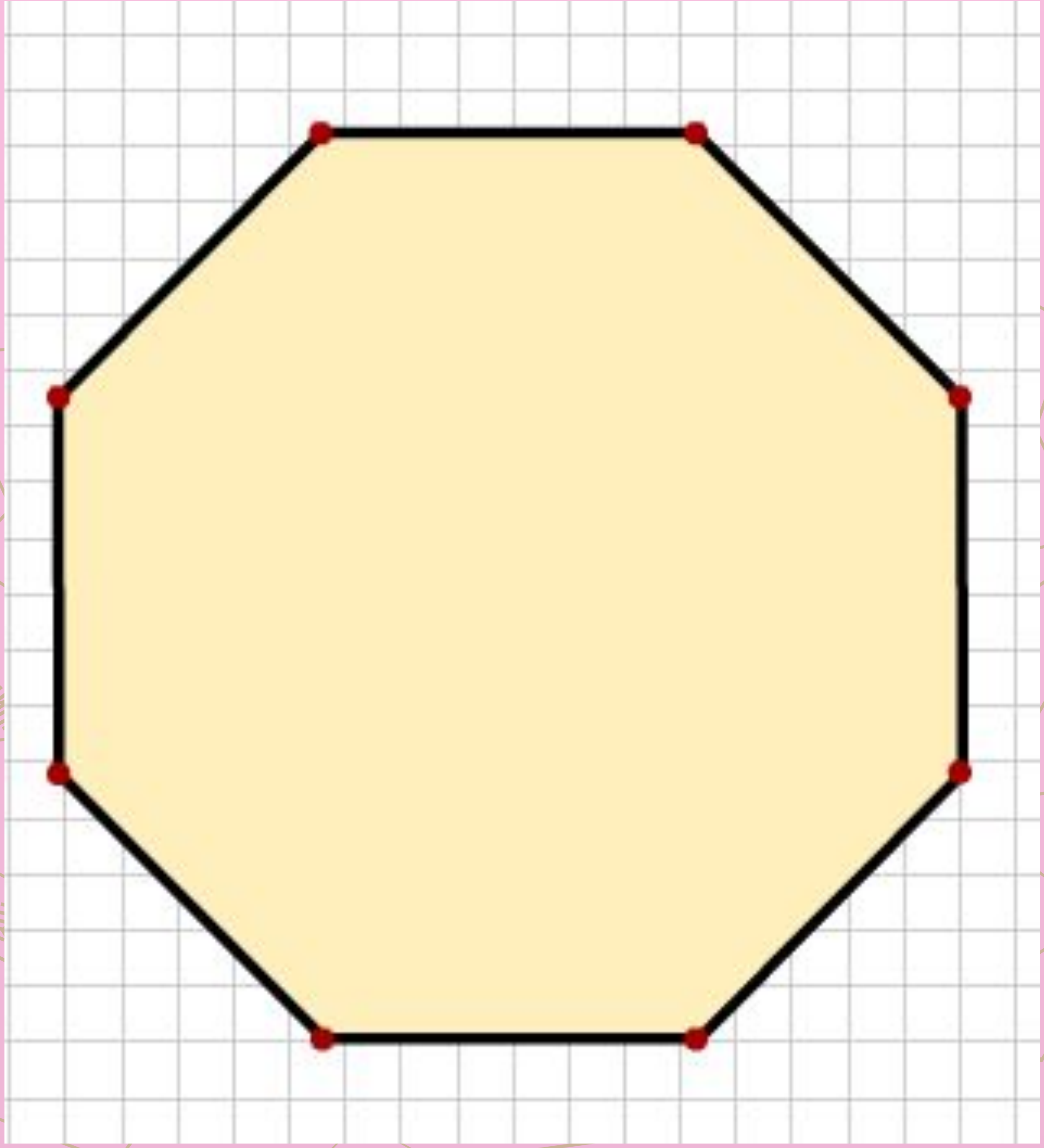
Правильные многоугольники

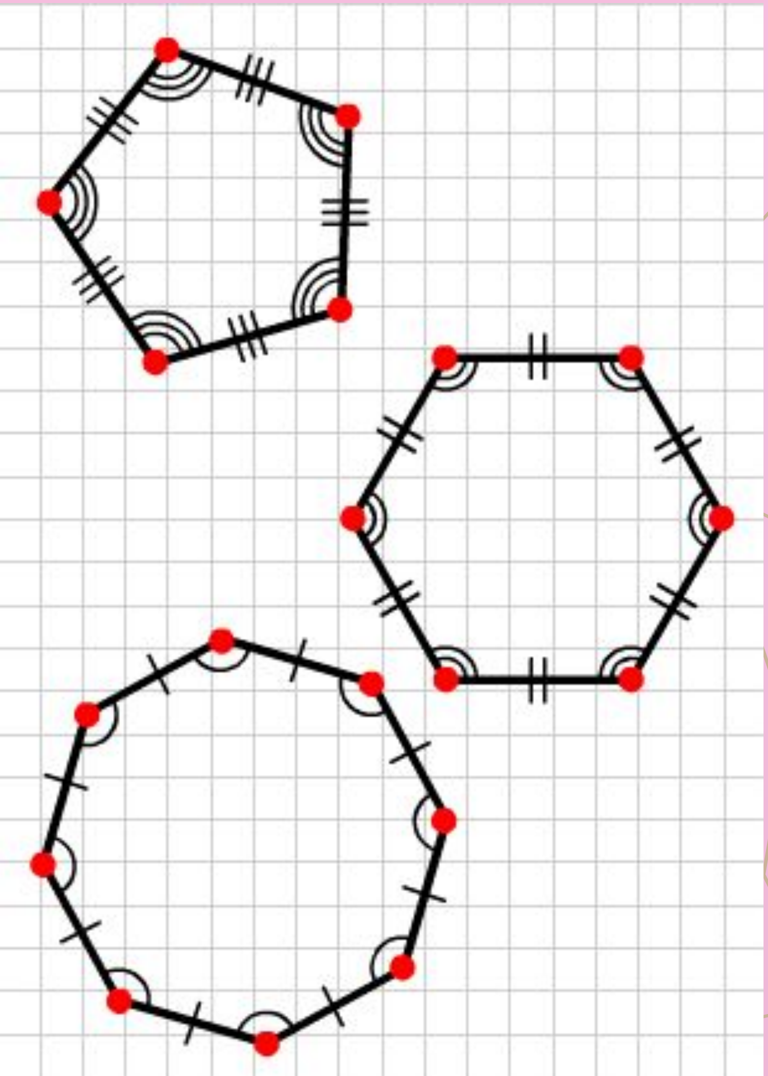
Урок геометрии в 9 классе

Правильные многоугольники

На этом уроке вы узнаете, как называется выпуклый многоугольник, у которого все углы и все стороны равны; познакомитесь с выводом формулы для вычисления угла правильного n-угольника, а также сможете провести доказательство теоремы о центре правильного многоугольника и рассмотрите ряд полезных следствий из этой теоремы.



Правильный многоугольник



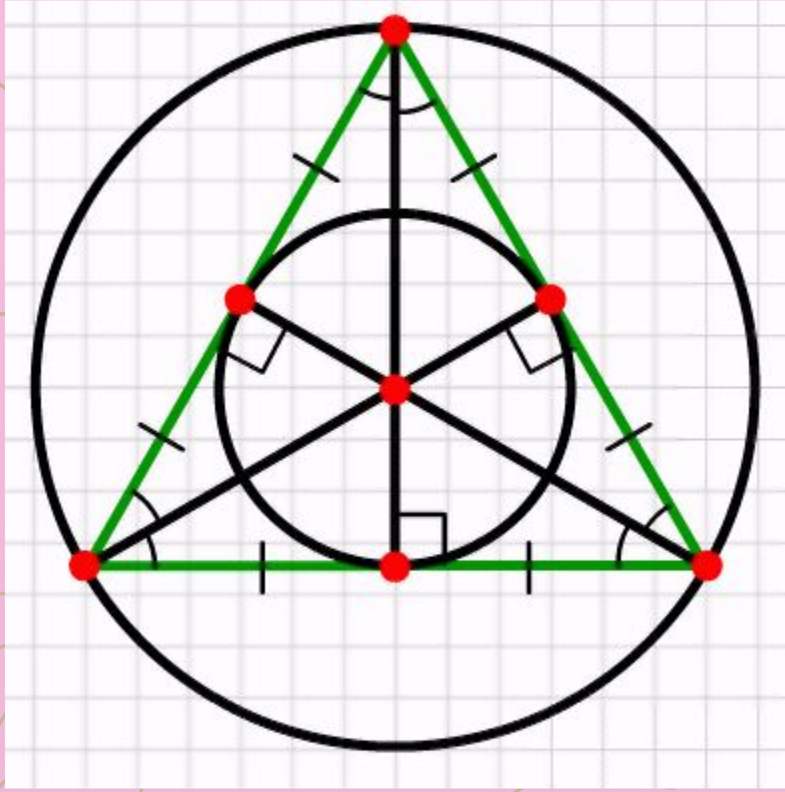
Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны. Некоторые правильные многоугольники вам уже известны, например, равносторонний треугольник и квадрат. На рисунке изображены правильные пятиугольник, шестиугольники восьмиугольник. Выведем формулу для вычисления угла a_n правильного n-угольника. Т. к. сумма углов n-угольника равна (n-2)180°, причем все его углы равны по определению, то

$$\alpha_n = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180°.$$

Центр правильного многоугольника

Центром правильного многоугольника называется такая точка, которая равноудалена от всех вершин и от всех сторон правильного многоугольника.

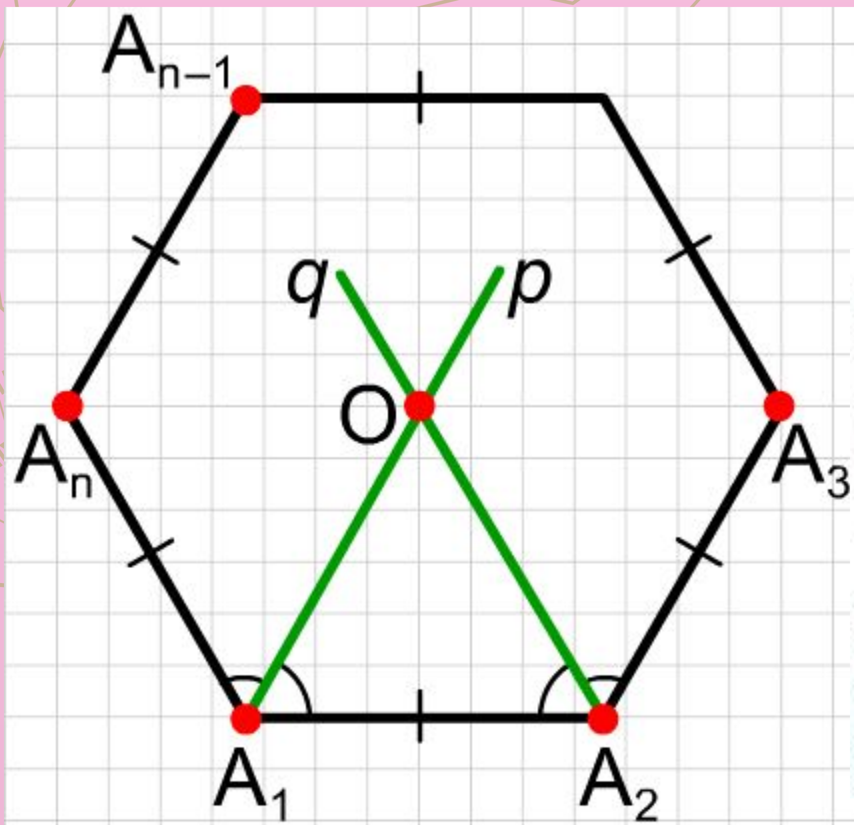
Например, у равностороннего треугольника на рисунке такой точкой является центр вписанной и описанной окружности (это одна точка, т. к. у равностороннего треугольника все биссектрисы, медианы и высоты совпадают, следовательно, совпадают и точка пересечения биссектрис с точкой пересечения серединных перпендикуляров). Докажем, что центр существует у каждого правильного многоугольника.



Центр равностороннего треугольника

Теорема о центре правильного многоугольника

В каждом правильном многоугольнике есть точка, равноудаленная от всех его вершин и от всех его сторон.



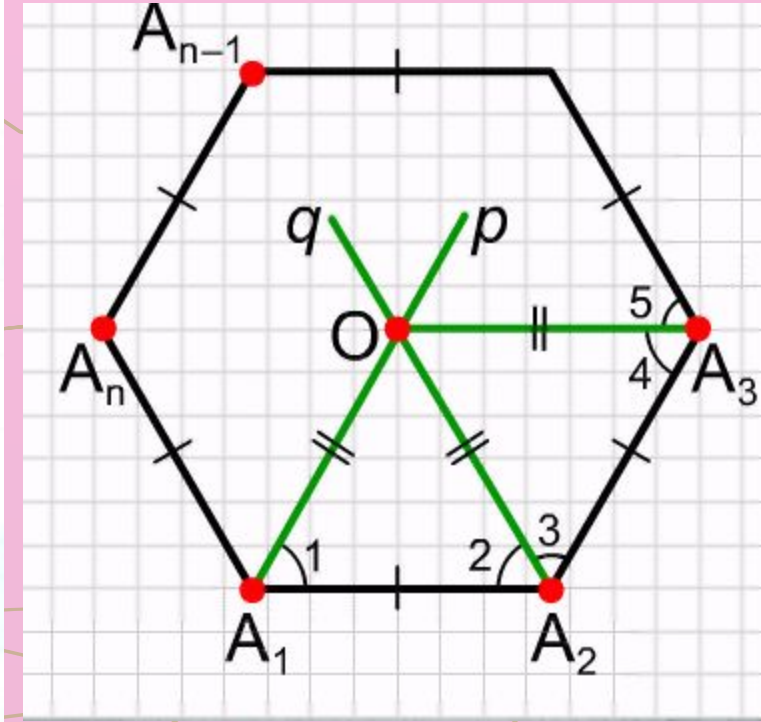
Доказательство:
Пусть $A_1A_2...A_n$ — правильный n-угольник (т. е. $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n = A_nA_1$ и $\angle A_1 = \angle A_2 = ... = \angle A_n$). Проведем биссектрисы p и q углов A_1 и A_2. Пусть $p \cap q = O$. Докажем, что точка O является центром правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$.

Сначала докажем, что точка O равноудалена от всех вершин $A_1, A_2 \ldots, A_n$ правильного n-угольника, т. е. $OA_1=OA_2=OA_3=\ldots=OA_n$. Т. к. $\angle 1=\angle 2$ (как половины равных углов), то $\Delta\ OA_1A_2$ равнобедренный, поэтому $OA_1=OA_2$. Тогда $\Delta\ OA_1A_2=\Delta\ OA_2A_3$ по двум сторонам и углу между ними (OA_2 — общая сторона, $A_1A_2=A_2A_3$ как стороны правильного n-угольника, $\angle 2=\angle 3$, т. к. A_2O — биссектриса $\angle A_2$ n-угольника). Из равенства треугольников следует, что $OA_1=OA_3$. Отсюда $OA_3=OA_2$ и $\angle 3=\angle 4$.

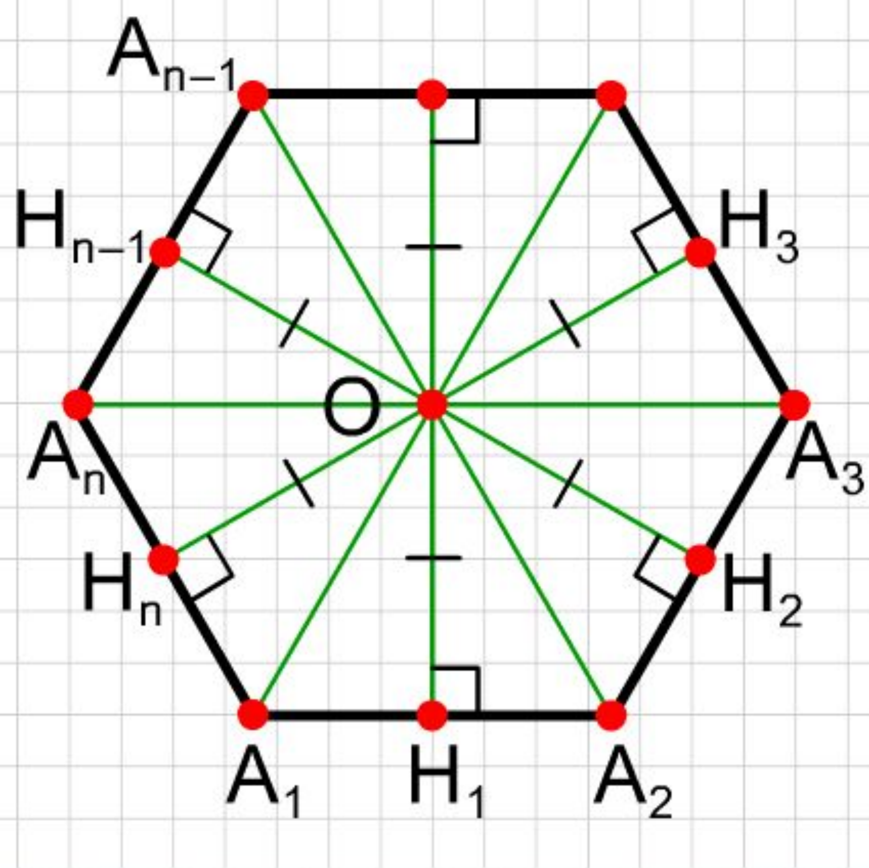
$$\text{Т.к. } \angle 3 = \frac{1}{2}\angle A_2, \angle A_2 = \angle A_3, \text{то } \angle 3 = \frac{1}{2}\angle A_3,$$

$$\text{но } \angle 3 = \angle 4 \Rightarrow \angle 4 = \frac{1}{2}\angle A_3,$$

поэтому $\angle 4=\angle 5$, т. е. A_3O — биссектриса $\angle A_3$ n-угольника. Повторяя аналогичные рассуждения, получаем, что $OA_1=OA_2=OA_3=\ldots=OA_n$.



Теорема о центре правильного многоугольника



Докажем, что точка *O* равноудалена от всех сторон правильного *n*-угольника.

Попутно мы доказали, что все биссектрисы правильного *n*-угольника пересекаются в точке *O*.

Теперь докажем, что точка *O* равноудалена от всех сторон A_1A_2, A_2A_3,… ,$A_{n-1}A_n$, A_nA_1 правильного *n*-угольника.

Из предыдущих рассуждений следует, что $\Delta\ OA_1A_2 = \Delta\ OA_2A_3 = \ldots = \Delta\ OA_{n-1}A_n = \Delta\ OA_nA_1$.

Тогда равны и высоты OH_1, OH_2, …, OH_{n-1}, OH_n к сторонам A_1A_2, A_2A_3,… ,$A_{n-1}A_n$, A_nA_1 этих треугольников, т. е.

$OH_1 = OH_2 = \ldots = OH_{n-1} = OH_n$, и

$OH_1 \perp A_1A_2$, $OH_2 \perp A_2A_3$, …, $OH_{n-1} \perp A_{n-1}A_n$, $OH_n \perp A_nA_1$. Это и означает, что точка *O* равноудалена от всех сторон правильного *n*-угольника.

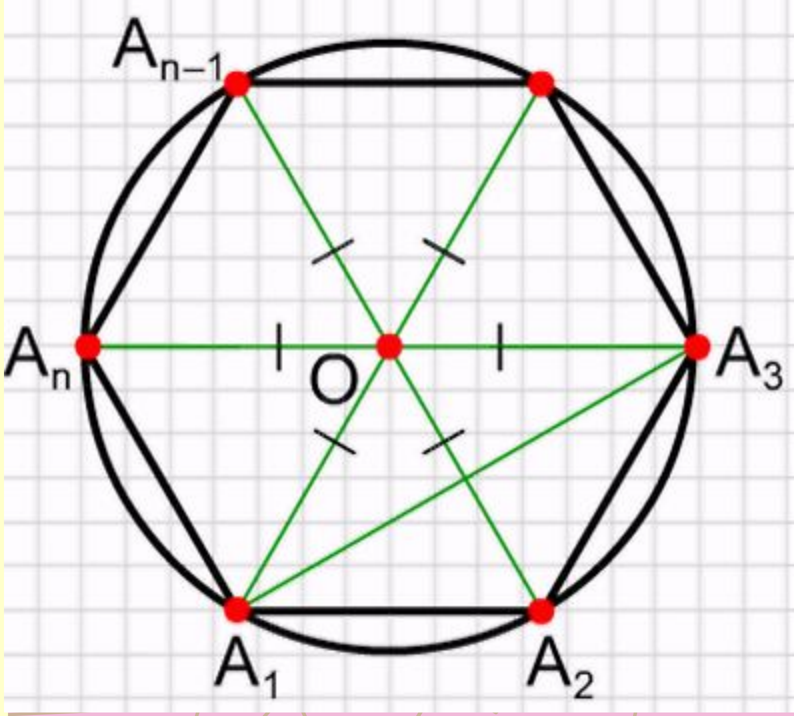
Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает ряд важных следствий. Рассмотрим их.

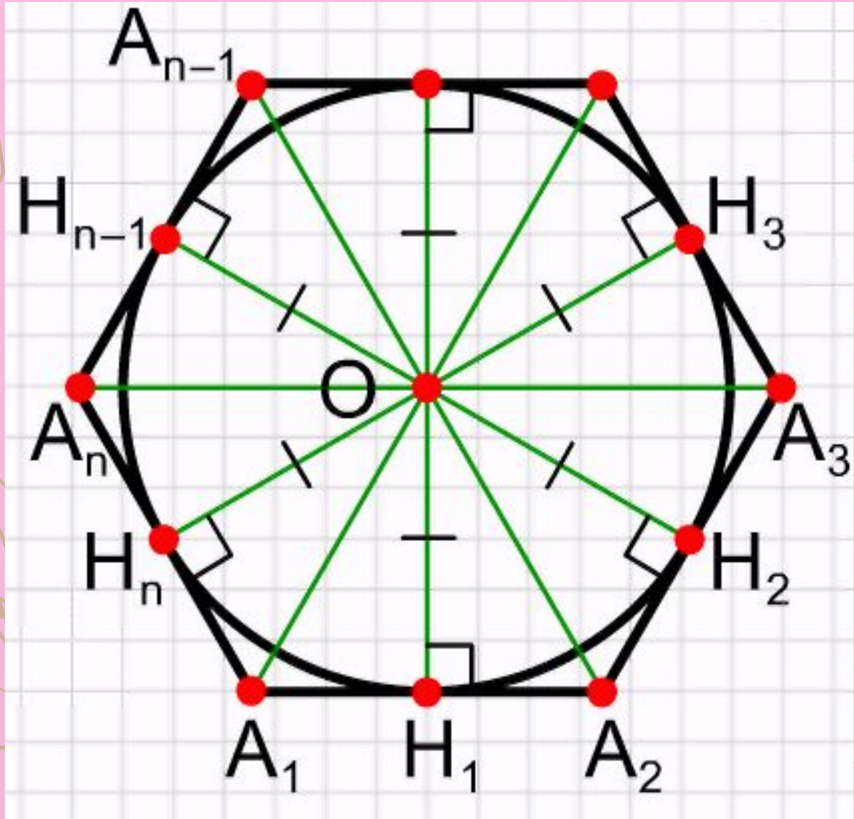
Следствие 1. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, причем только одну.

Действительно, по доказанной теореме точка О равноудалена от всех вершин A1,A2... ,An правильного n-угольника A1A2...An, т. е. OA1=OA2=OAз=...=OAn. Значит, около правильного многоугольника A1,A2... ,An можно описать окружность с центром в точке О пересечения биссектрис углов A1 и A2 и радиусом OA1.

Единственность такой окружности вытекает из единственности окружности, описанной около треугольника. Возьмем любые три вершины многоугольника A1A2...An, например A1, A2, A3. Т. к. OA1=OA2=OA3, то окружность с центром в точке О и радиусом OA1 описана около треугольника A1A2A3, причем она единственна, т. к. около любого треугольника можно описать только одну окружность.



Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, причем только одну.

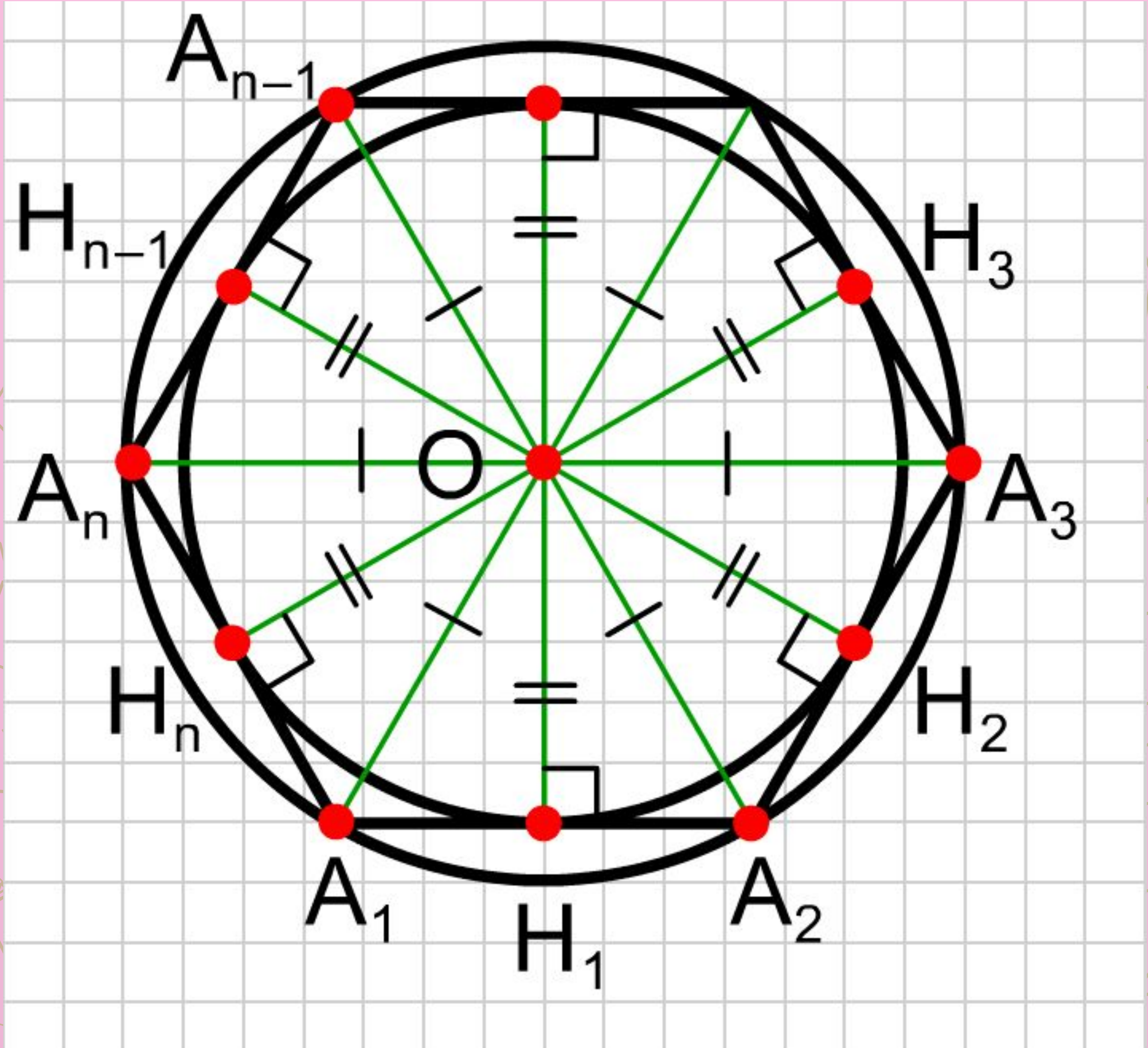


Следствие 2. **В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, причем только одну.**

Действительно, по доказанной теореме точка O равноудалена от всех сторон A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 правильного n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$, т. е. $OH_1 = OH_2 = \ldots = OH_{n-1} = OH_n$, и $OH_1 \perp A_1A_2$, $OH_2 \perp A_2A_3$, …, $OH_{n-1} \perp A_{n-1}A_n$, $OH_n \perp A_nA_1$, где OH_1, OH_2, …, OH_{n-1}, OH_n — высоты к сторонам A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 $\Delta\ OA_1A_2$, $\Delta\ OA_2A_3, \ldots$, $\Delta\ OA_{n-1}A_n$, $\Delta\ OA_nA_1$ соответственно. Отсюда следует, что окружность с центром в точке O и радиусом OH_1 проходит через точки H_1, H_2, …, H_{n-1}, H_n и касается в этих точках всех сторон n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$, т. е. эта окружность вписана в правильный многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$.

Следствия из теоремы

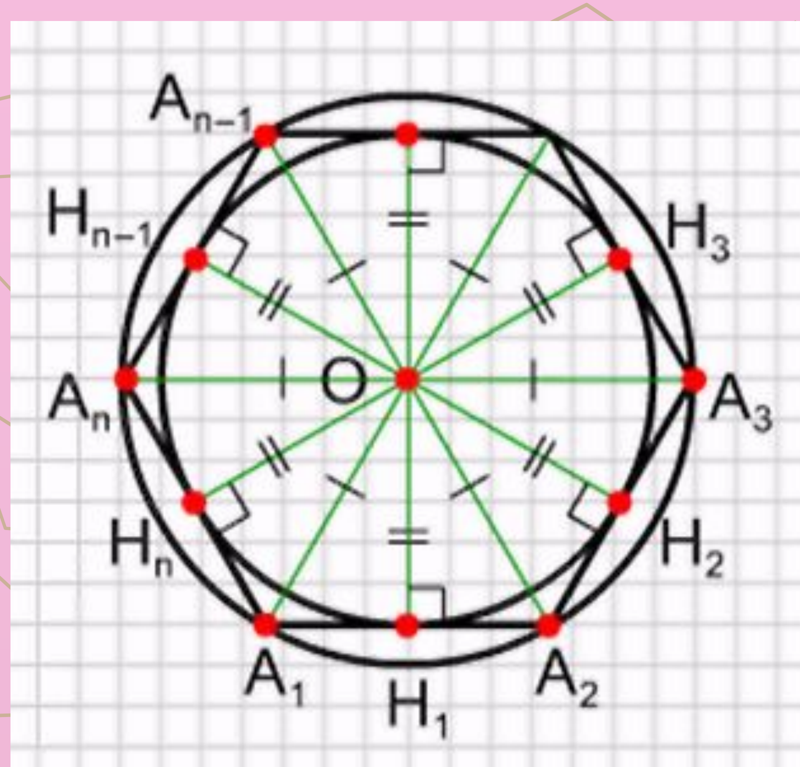
Докажем теперь единственность такой окружности. Предположим, что, кроме указанной окружности с центром O и радиусом OH1, существуют еще одна вписанная в n-угольник A1A2..An окружность с центром в точке O1, отличной от O. Но тогда ее центр O1 равноудален от сторон многоугольника, т. е. точка O1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника, следовательно, совпадает с точкой O пересечения этих биссектрис. Кроме того, т. к. из одной точки O на каждую сторону n-угольника можно опустить только один перпендикуляр, то и радиус второй окружности совпадает с OH1. Значит, вписанная в правильный многоугольник окружность только одна.



A_{n-1}
H_{n-1}
H_3
A_n
O
A_3
H_n
H_2
A_1
H_1
A_2

Следствие 3. **Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром вписанной в него окружности.**

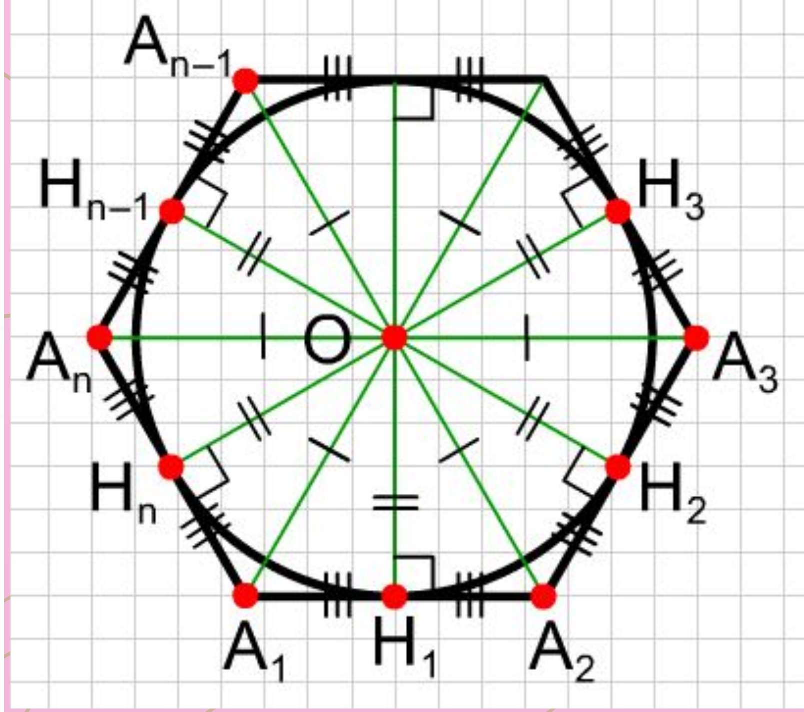
Это утверждение непосредственно вытекает из следствий 1 и 2.



Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром вписанной в него окружности.

Следствие 4. **Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.**

Действительно, по доказанной теореме $\Delta\ OA_1A_2$, $\Delta\ OA_2A_3$, …, $\Delta\ OA_{n-1}A_n$, $\Delta\ OA_nA_1$ равнобедренные ($OA_1=OA_2=OA_3=\ldots=OA_n$), следовательно, высоты OH_1, OH_2, …, OH_{n-1}, OH_n этих треугольников являются также медианами, т. е. точки H_1, H_2, …, H_{n-1}, H_n касания окружности со сторонами A_1A_2, A_2A_3,…,$A_{n-1}A_n$, A_nA_1 n-угольника $A_1A_2...A_n$ соответственно являются серединами этих сторон.



Выводы

1. Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

2. Величина угла α_n правильного n-угольника выражается формулой:

$$\alpha_n = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ.$$

В каждом правильном многоугольнике есть точка, равноудаленная от всех его вершин и от всех его сторон

Следствие 1. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, причем только одну.

Следствие 2. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, причем только одну.

Следствие 3. Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром вписанной в него окружности.

Следствие 4. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

Автор: Аверкина Т.П., учитель МОУ «Тархановская СОШ» Ичалковского района РМ