



Числовые
последовательности.

Предел числовой
последовательности.

$$\{a_n\} = 1, 3, 5, 7, 9, 11\dots$$

a_n – общий член последовательности

Назовем **числовой последовательностью** $\{x_n\}$ числовую функцию, заданную на множестве натуральных чисел: $x_n = f(n), n \in N$

Значение n будем называть номером члена x_n , а само число x_n – общим членом или n -м членом последовательности.

Примеры последовательностей.

Продолжите ряд: 1, 10, 3, 9, 5, 8, 7, 7, 9, 6...

Ответ: Ряд состоит из двух частей: числа на нечетных местах: 1, 3, 5, 7, 9...; числа на четных местах: 10, 9, 8, 7

Продолжите ряд 77, 49, 36, 18...

Ответ: Перемножаются две цифры, входящие в предыдущее число

Назовем *постоянной* последовательность, если она равна константе для любого номера n :

$$x_n = C, n \in N, C \in R$$

Назовем последовательность *ограниченной*, если найдется такое число M , для которого модуль любого члена последовательности окажется не больше этого числа:

$$|x_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Квантор \forall , читается «для любого».

Последовательность **ограничена**, если найдется такое положительное число, для которого все члены последовательности по модулю окажутся не больше этого числа.

{ограничена если $M \exists > 0 : |a_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

Используемый квантор \exists читается «существует»,

Последовательность называется *возрастающей*, если:

$$x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Последовательность **возрастает**, если каждый последующий член не меньше предыдущего.

Последовательность **монотонная**, если она возрастающая или убывающая.

Числа Фибоначчи.

Элементы числовой последовательности, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610...

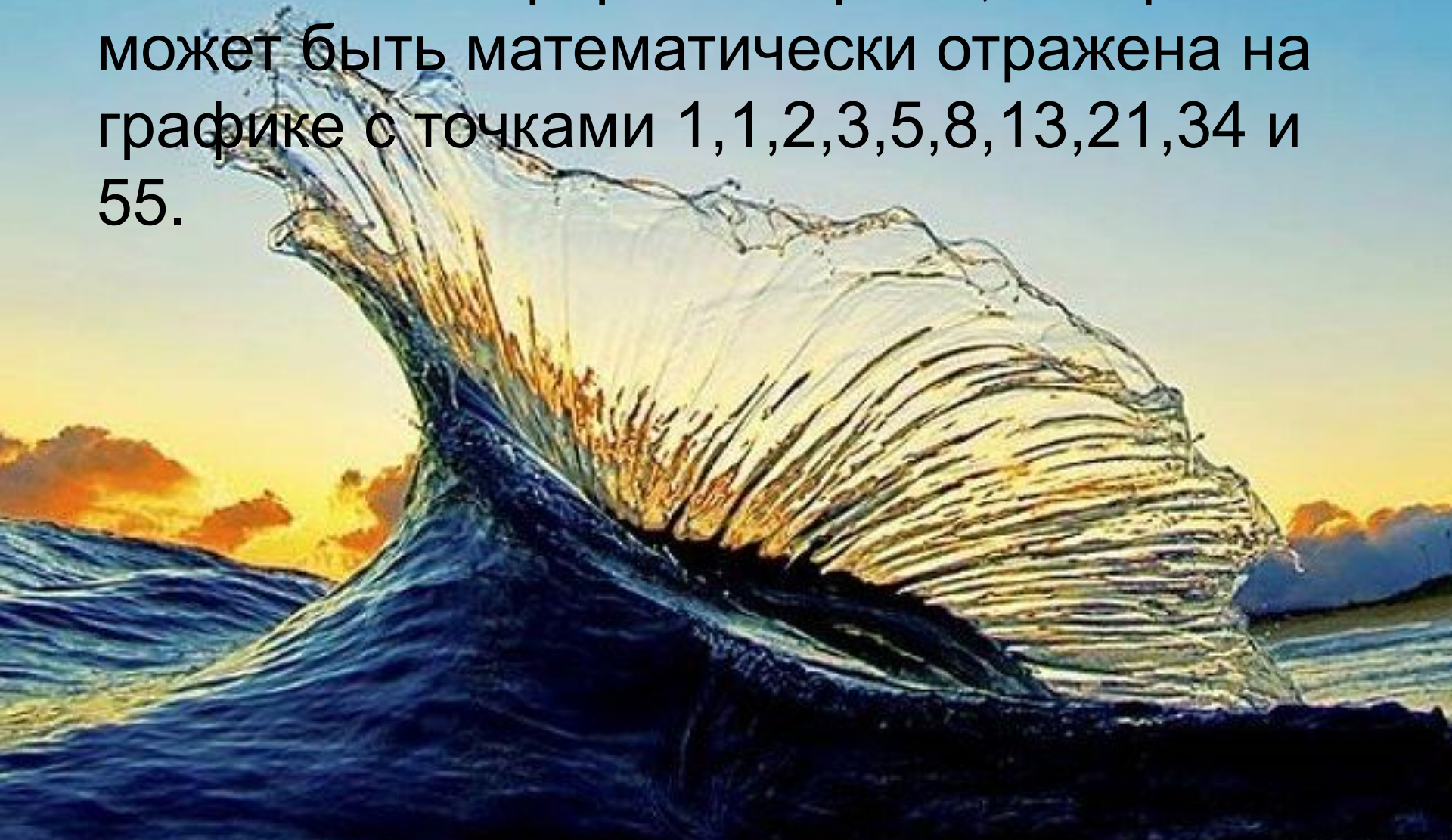
1. Рукава многих галактик расположены в соответствии с этой последовательностью.
2. Длины фаланг пальцев человека относятся примерно как числа Фибоначчи.

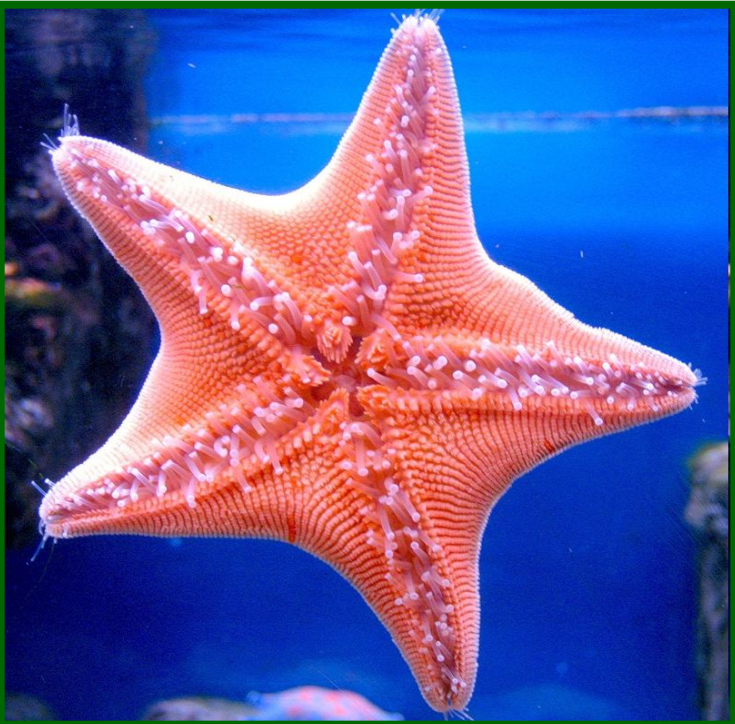
В сосновой шишке, если посмотреть на нее со стороны черенка, можно обнаружить две спирали, одна закручена против, другая по часовой стрелке. Число этих спиралей 8 и 13.





Когда потоки воды двигаются по океану и волны прилива подходят к берегу, они изгибаются в форме спирали, которая может быть математически отражена на графике с точками 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 и 55.





Ветви, листья деревьев, ракушки, морские звезды, ушная раковина человека, тюльпаны и другие цветы, и особенно раковины моллюсков - сформированы по той же самой схеме. С каждым приростом раковина добавляет себе ещё один сегмент в соответствии с масштабом Фибоначчи.

**Паук плетет паутину спиралеобразно по
тому же принципу.
Спиралью закручивается ураган...**



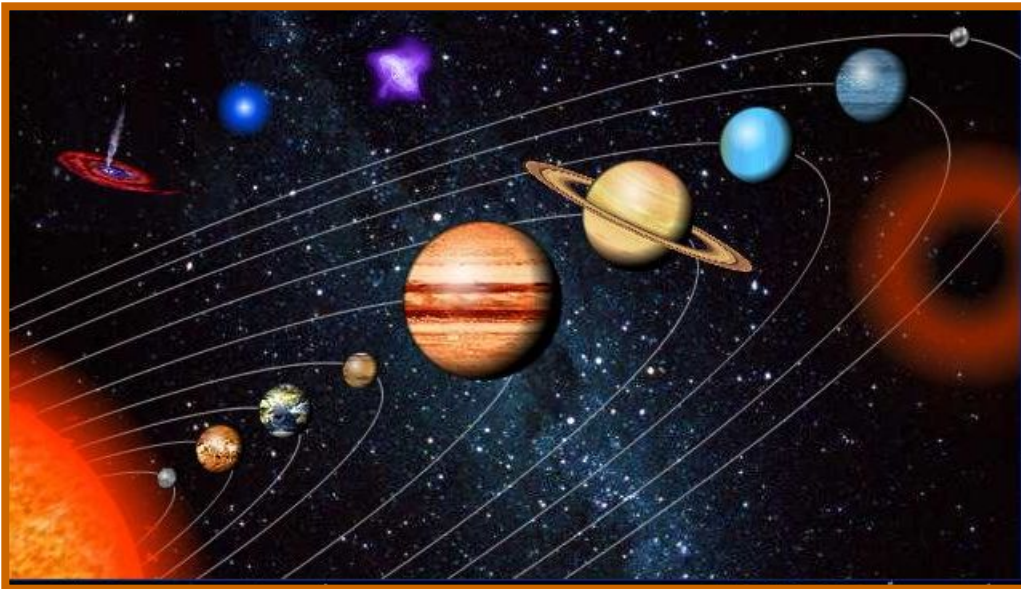


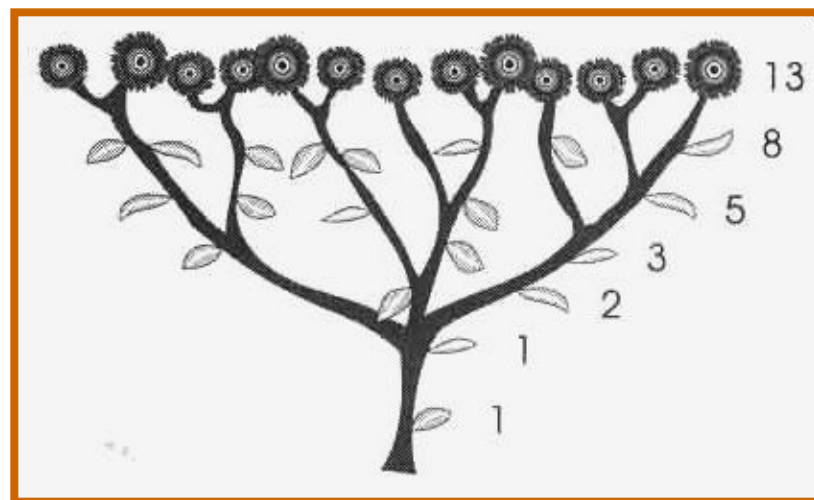
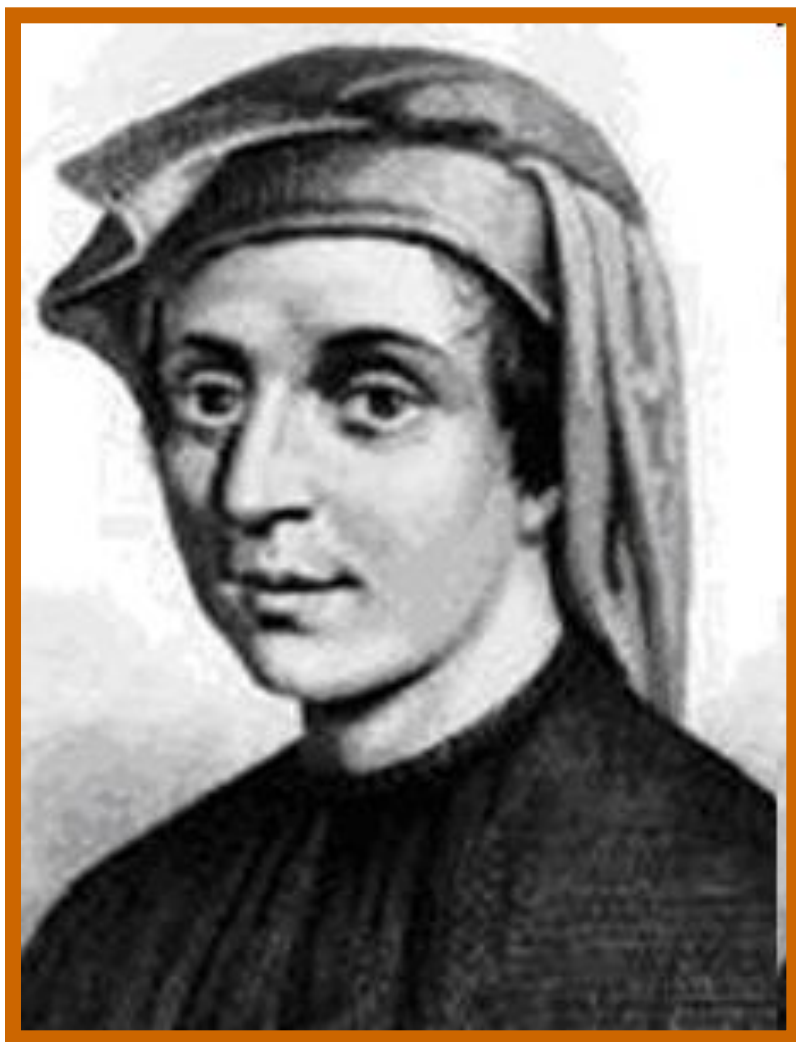
Ячейки ананаса
расположены в 8
правосторонних, 13
левосторонних, 21
вертикальных спиралей.

Семена подсолнуха располагаются в двух пересекающихся спиралях с количеством соцветий 34 и 55 или 55 и 89 согласно последовательности Фибоначчи.



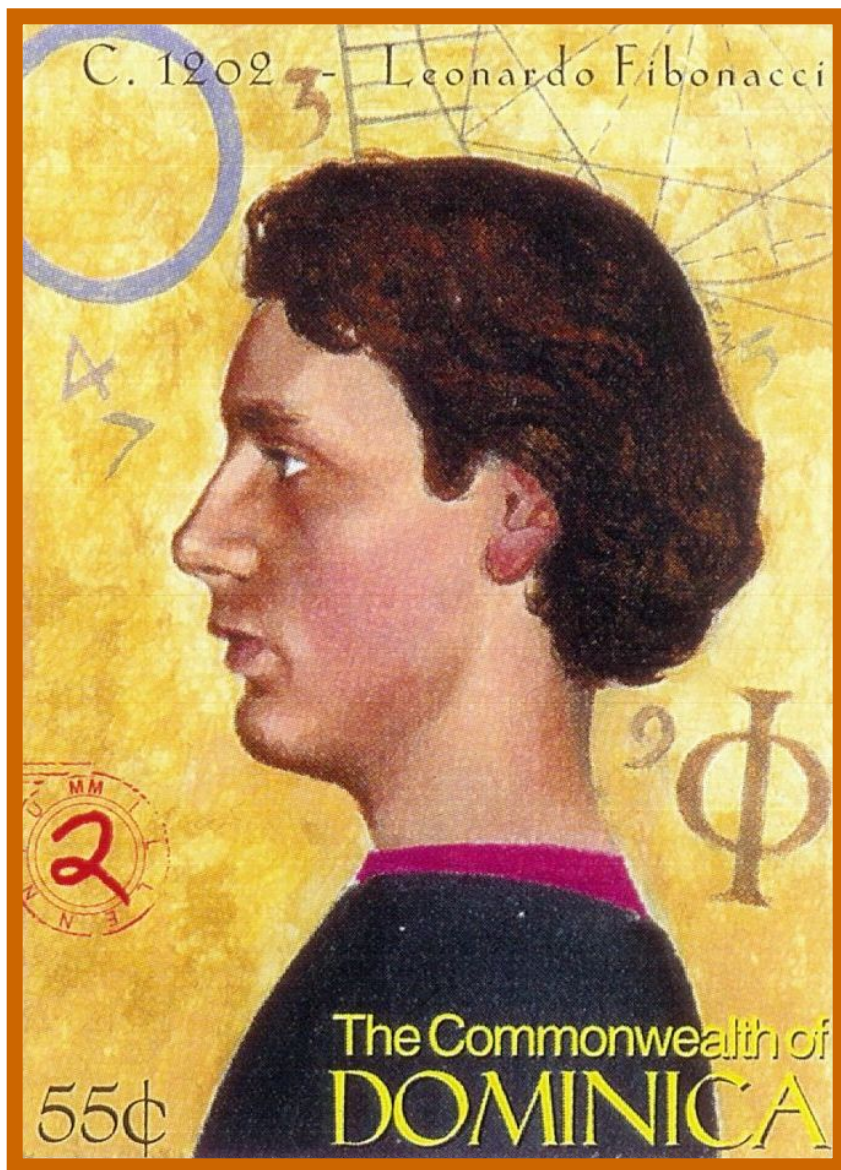
Из истории астрономии известно, что И. Тициус, немецкий астроном XVIII в., с помощью этого ряда (Фибоначчи) нашел закономерность и порядок в расстояниях между планетами солнечной системы





Схемы, по которыми сформированы лепестки, листья и семена цветов, соответствуют определённым числам.

Леонардо Пизанский или Фибоначчи



Леонардо Фибоначчи
(родился около 1170 — умер
после 1228),
итальянский математик.

Последовательность Фибоначчи

рекуррентно задать легко, а аналитически – трудно.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Божественная пропорция.

При делении любого числа из последовательности на число, стоящее перед ним в ряду, результатом всегда **будет величина, колеблющаяся около иррационального значения**
1.61803398875... .

Оказывается что число ФИ -Строительный камень, который господь Бог использовал для создания Мира.



Блез Паскаль
(1623 – 1662).
Французский
математика XVII

Треугольник Паскаля – это бесконечная числовая таблица треугольной формы, в которой на вершине и по боковым сторонам стоят единицы, каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и справа в предшествующей строке:

Треугольник Паскаля.

1

1

1

1

2

1

1

3

3

1

1

4

6

4

1

1

5

10

10

5

1

1

6

15

20

15

6

1

				1						
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
	1	5		10		10		5		1
1		6	15		20		15	6		1

$$\underline{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;}$$

$$\underline{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;}$$

$$\underline{(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$

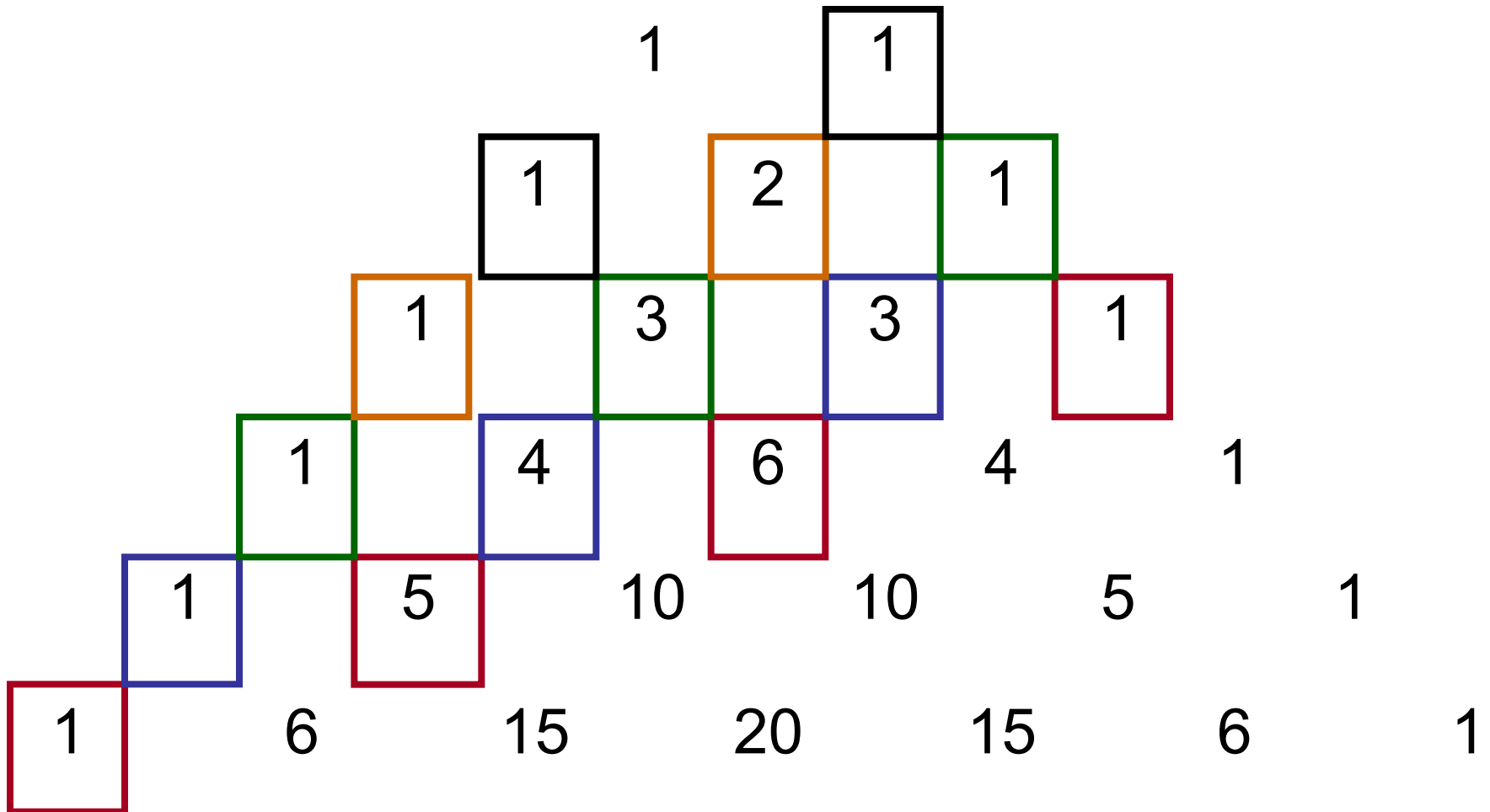
				1					
			1		1				
		1		2		1			
	1		3		3		1		
	1	4		6		4		1	
1		5		10		10		5	
	1		6		15		10		1
1	6		15		20		15		6
	1	6		15		20		15	
		1	6		15		20		15
			1	6		15		20	
				1	6		15		20
					1	6		15	
						1	6		15
							1	6	
								1	6
									1

$$\underline{(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5;}$$

$$\underline{(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.}$$

Треугольник Паскаля.

1



Подсчитав для каждой восходящей диагонали треугольника Паскаля сумму всех стоящих на этой диагонали чисел, получим числами Фибоначчи :

для 1 диагонали – 1;

для 2 диагонали – 1;

для 3 диагонали – $1+1=2$;

для 4 диагонали – $1+2=3$;

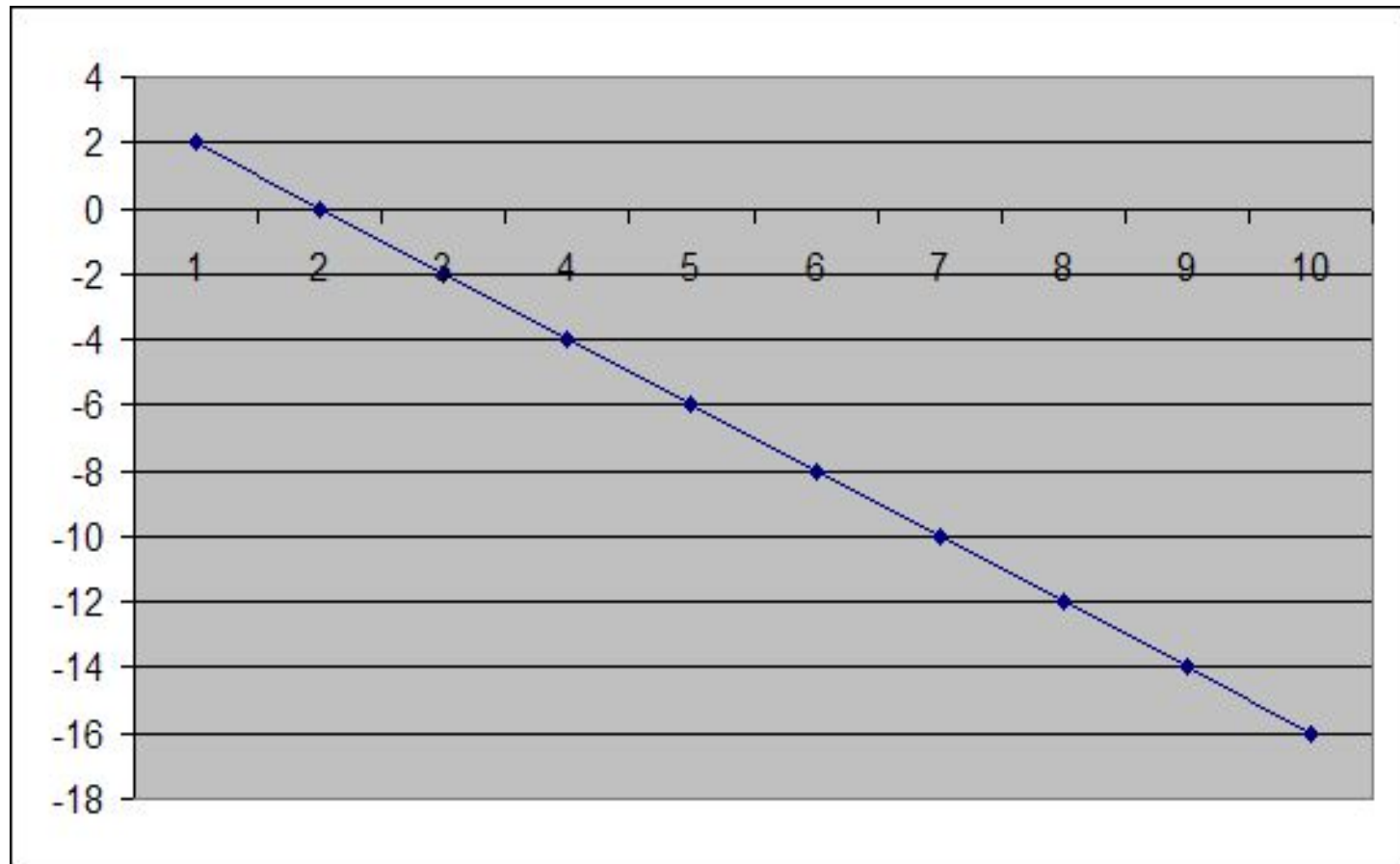
для 5 диагонали – $1+3+1=5$;

для 6 диагонали – $1+4+3=8$;

для 7 диагонали – $1+5+6+1=13$

График последовательности состоит из
отдельных точек.

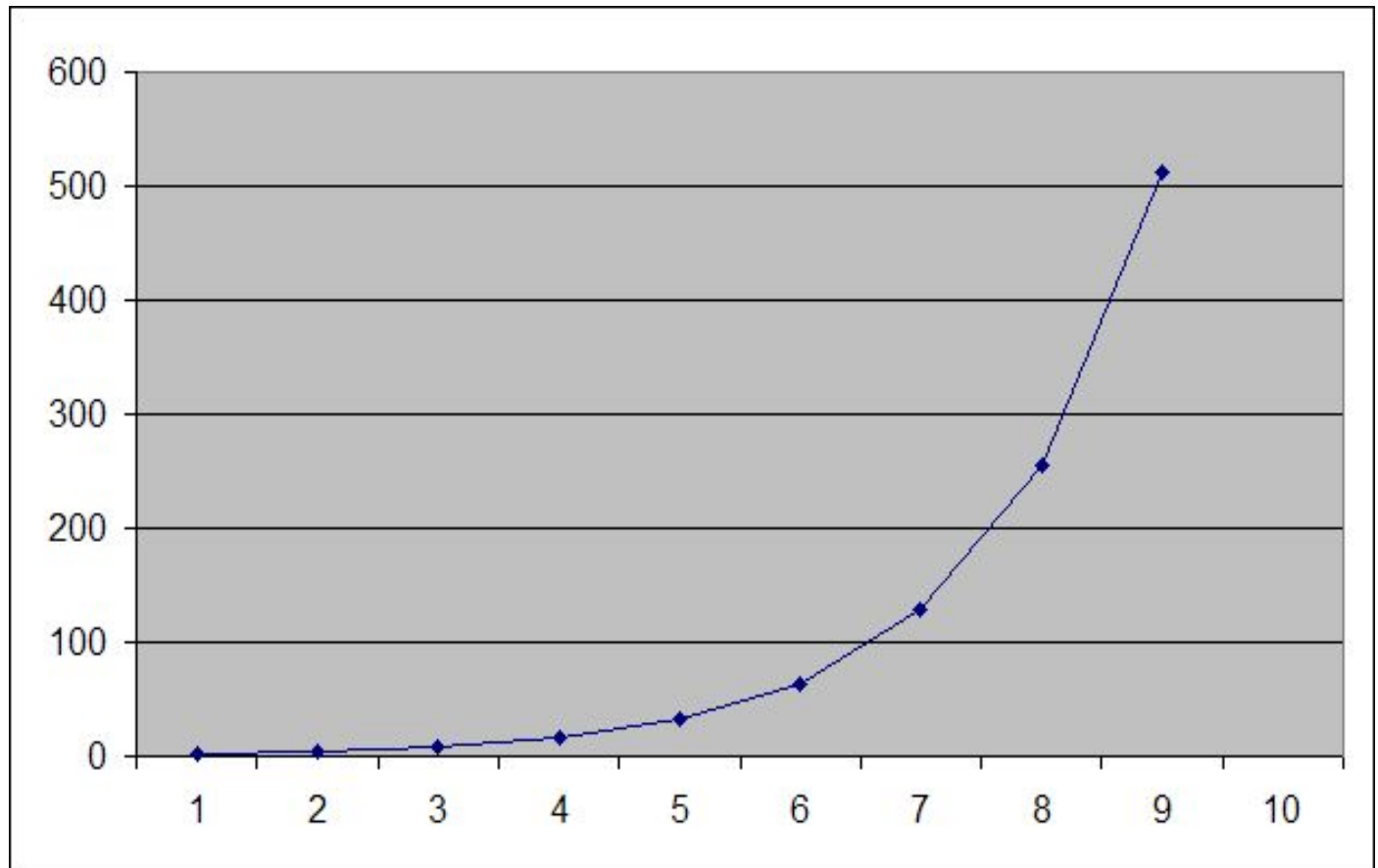
n	y_n
1	2
2	0
3	-2
4	-4
5	-6
6	-8
7	-10
8	-12
9	-14



Функция $y = 4 - 2n$

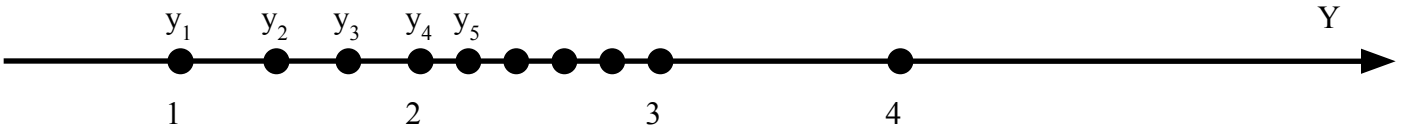
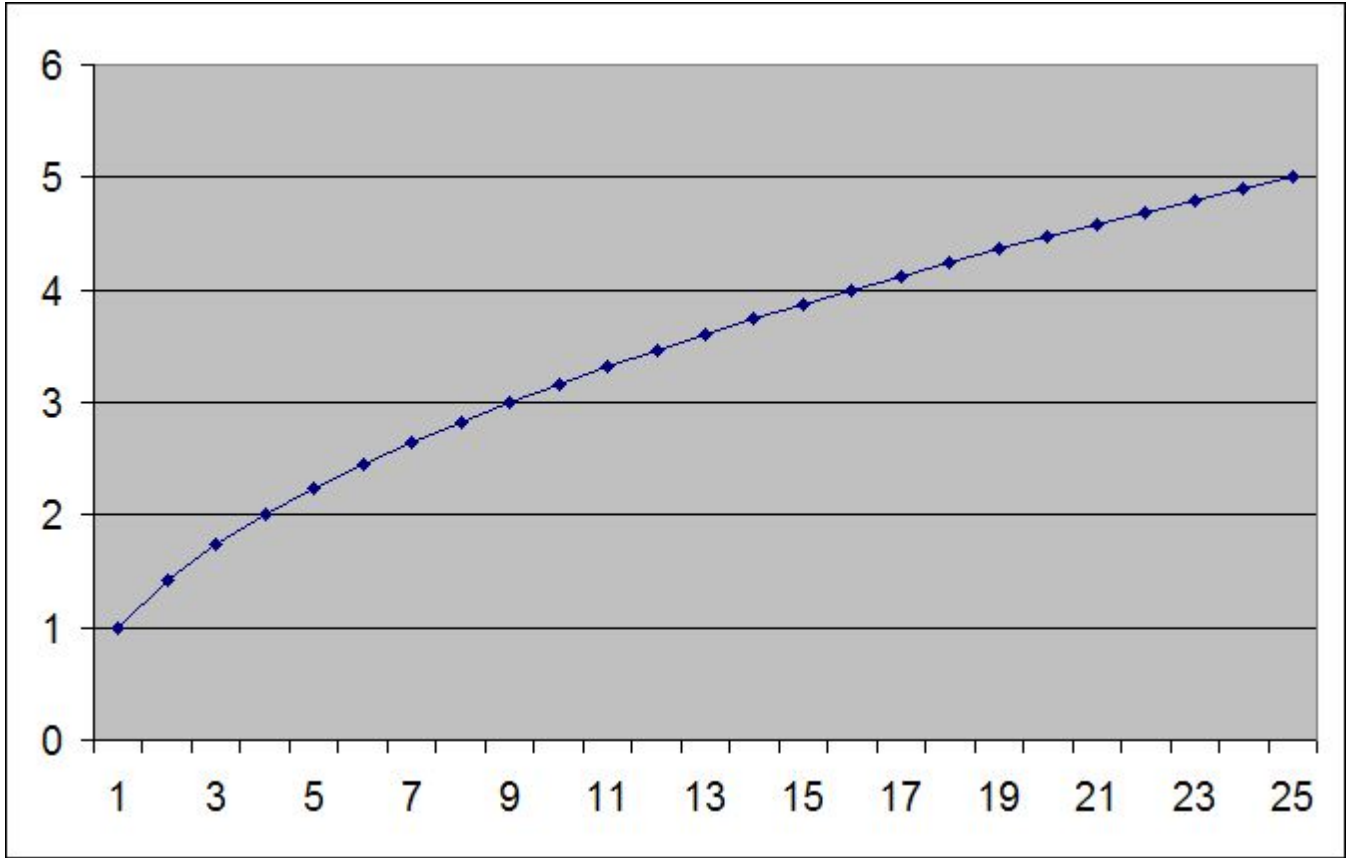
Функция $y = 2^n$

n	y_n
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512



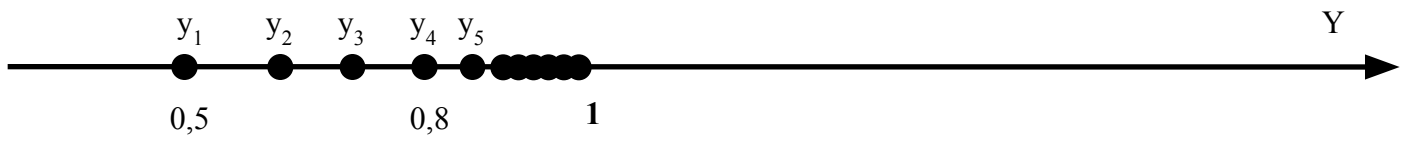
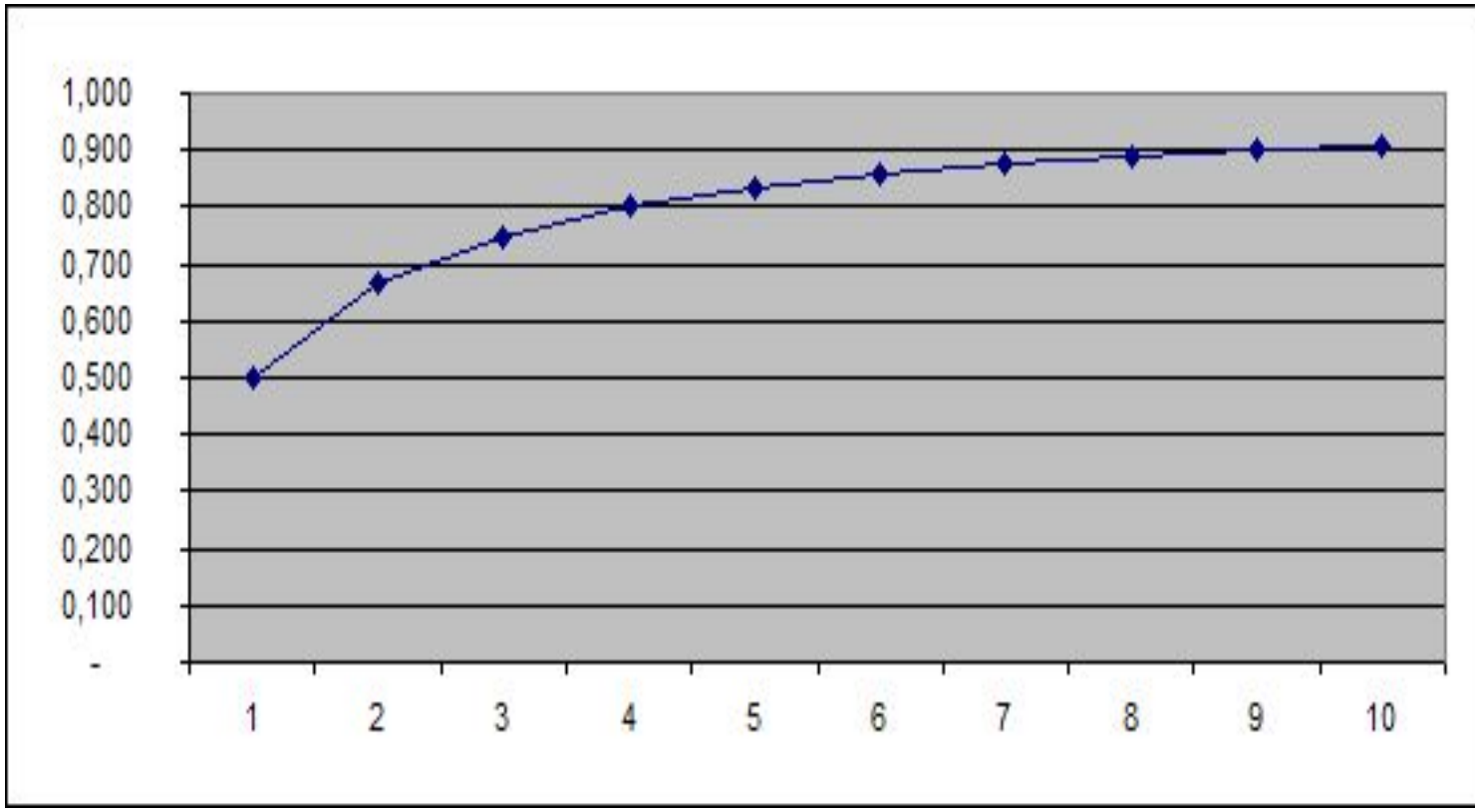
n	y_n
1	1
2	1,414214
3	1,732051
4	2
5	2,23607
6	2,44949
7	2,645751
8	2,828427
9	3

Функция $y = \sqrt{n}$



n	y_n
1	0,500
2	0,667
3	0,750
4	0,800
5	0,833
6	0,857
7	0,875
8	0,889
9	0,900
10	0,909

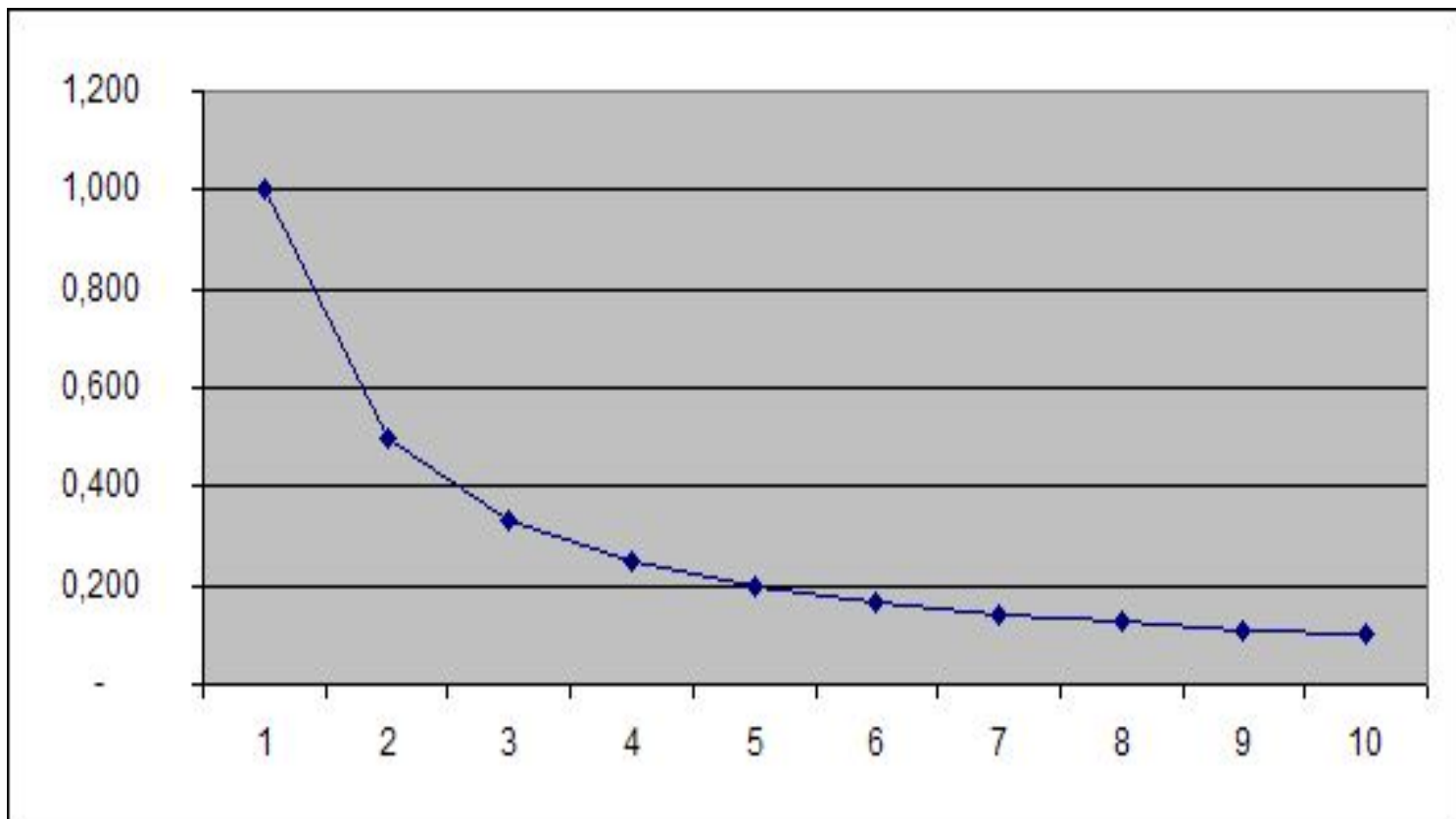
Функция $y = \frac{n}{n+1}$



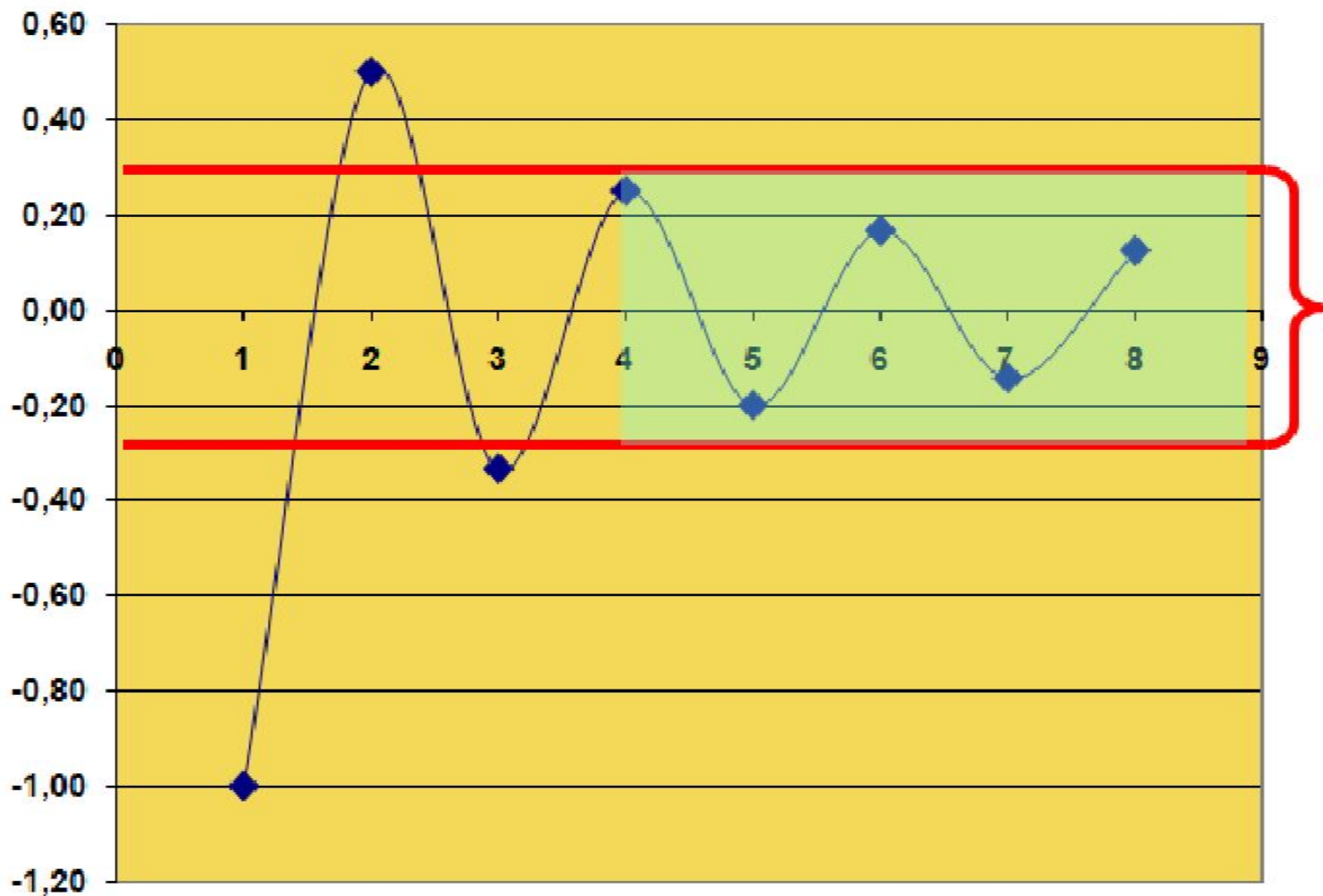
n	y_n
1	1,000
2	0,500
3	0,333
4	0,250
5	0,200
6	0,167
7	0,143
8	0,125
9	0,111
10	0,100

Функция

$$y = \frac{1}{n}$$



Последовательность, которая имеет предел, называется *сходящейся*, в обратном случае последовательность *расходится*.



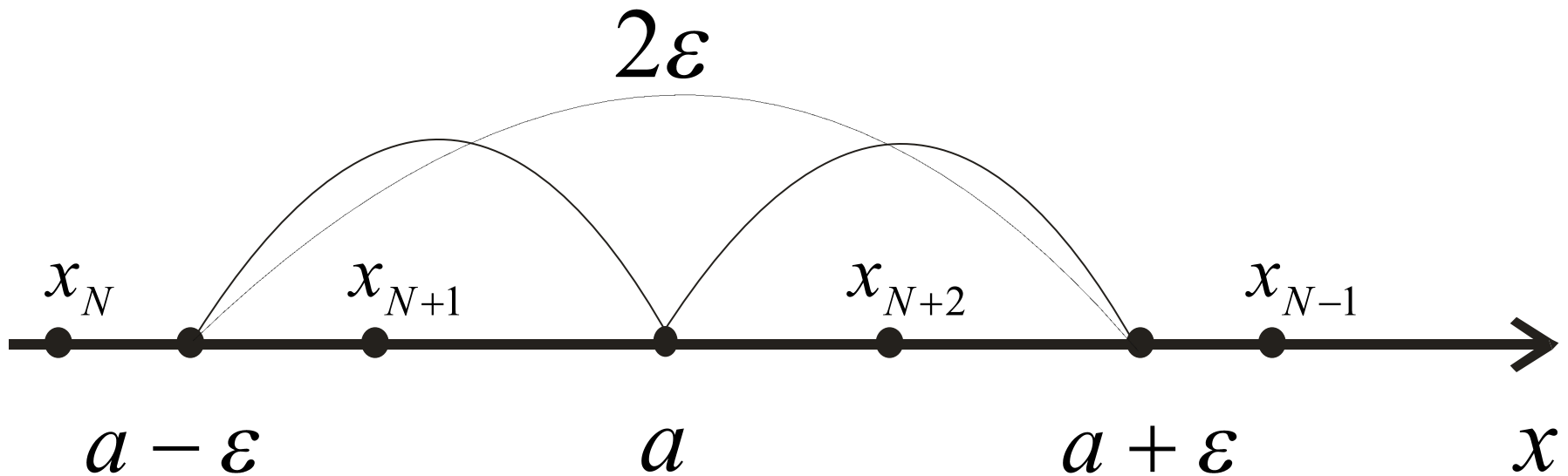
Все члены последовательности, начиная с некоторого, окажутся в "коридоре"

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Число a называется **пределом** **последовательности** $x = \{x_n\}$, если для произвольного заранее заданного сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число N , что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Геометрически понятие предела числовой последовательности.



$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon;$$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Неравенство означает, что все элементы последовательности с номерами $n > N$ должны лежать в интервале $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.

Постоянное число **a** есть предел числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой малой окрестности с центром в точке **a** радиуса ε (ε – окрестности точки **a**) найдется такой элемент последовательности с номером **N**, что все последующие элементы с номерами $n > N$ будут находиться внутри этой окрестности.

Последовательность **сходится**, если она имеет предел.

Доказать, что предел $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$

такой последовательности равен 1:

Воспользуемся определением предела.
По виду последовательности
можно сказать, что с ростом номера n
общий член последовательности x_n
приближается к единице,
а разность $|x_n - 1|$ приближается к нулю.

Покажем это строго.

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ в

выберем $N = \frac{1}{\varepsilon}$

Если номер $n > N$, тогда $n > \frac{1}{\varepsilon}$

и это означает, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Далее: $|x_n - 1| = \left| 1 - \frac{1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

Тем самым, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ мы указали такой номер N , что для всех $n > N$ выполняется

неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$

Мы доказали, что единица есть предел рассматриваемой последовательности.

Теорема о единственности предела последовательности:

Последовательность не может иметь больше одного предела.

Это следует из того, что последовательность не может одновременно приближаться к двум разным числам одновременно.

Формально, выберем ε значительно меньше разницы между числами a и b .

Тогда очевидно, что мы не сможем указать такого номера N , начиная с которого одновременно будут выполнены два условия:

$$\left| x_n - a \right| < \varepsilon \quad \left| x_n - b \right| < \varepsilon$$

Теорема:

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то сходится и их сумма $\{a_n + b_n\}$ и, кроме того, предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Теорема:

Постоянную величину можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C \cdot a_n) = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Теорема:

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то сходится и их произведение $\{a_n \cdot b_n\}$ и, кроме того, предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Теорема:

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$

сходятся, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

Предел отношения равен отношению

пределов.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Признак существования предела.

Теорема:

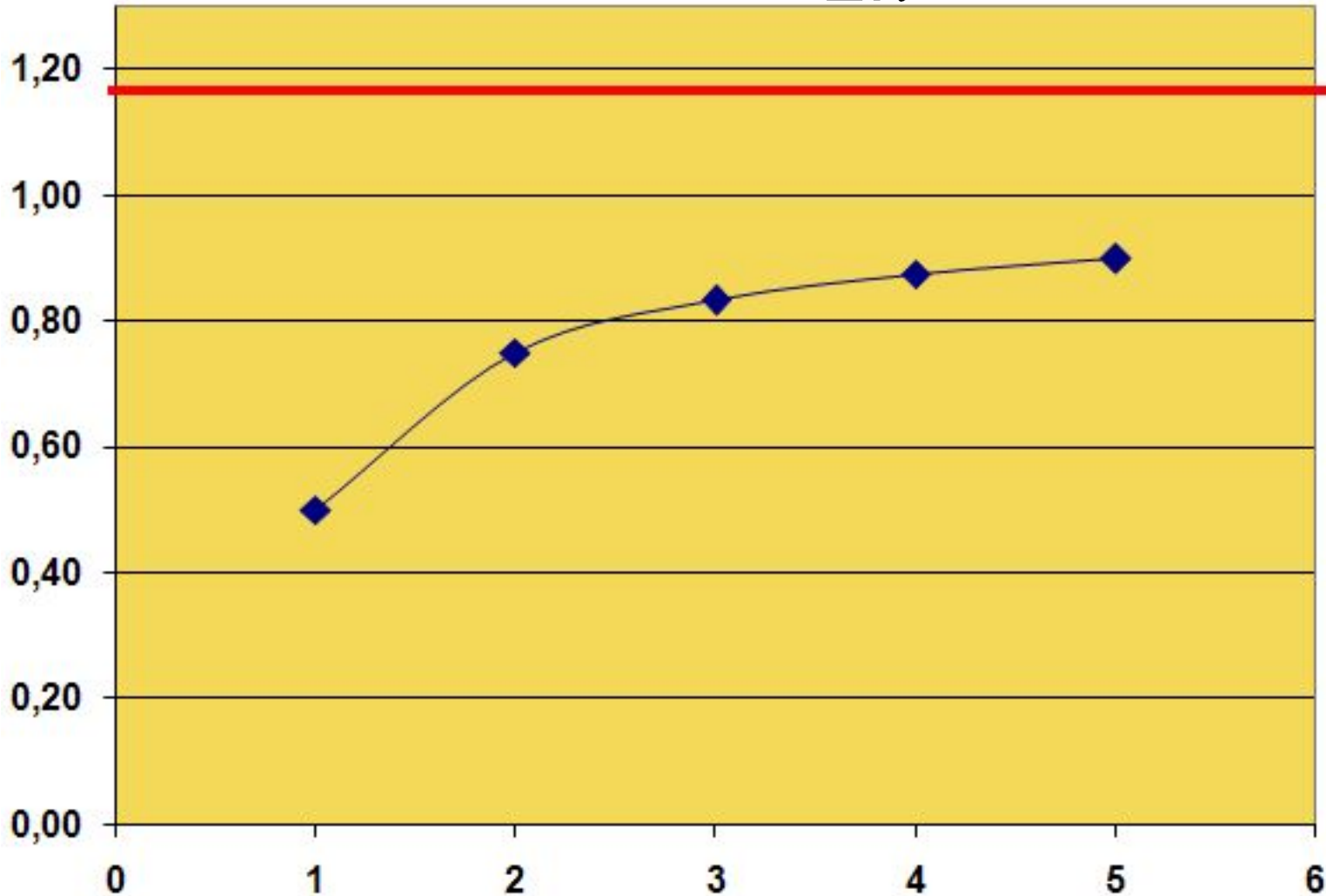
Если последовательность ограничена и монотонна, то она сходится.

Пример такой последовательности, которая ограничена, возрастает и потому имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n} \right) = 1$$

Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

$$a_n = 1 - \frac{1}{2n}$$



Теорема о двух милиционерах

Теорема (признак существования предела):

Если одна последовательность заключена между двумя другими, имеющими одинаковый предел, то она имеет тот же предел.

Если $a_n \leq b_n \leq c_n$ и выполняется условие :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$$

Тогда предел последовательности b_n тоже A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$$

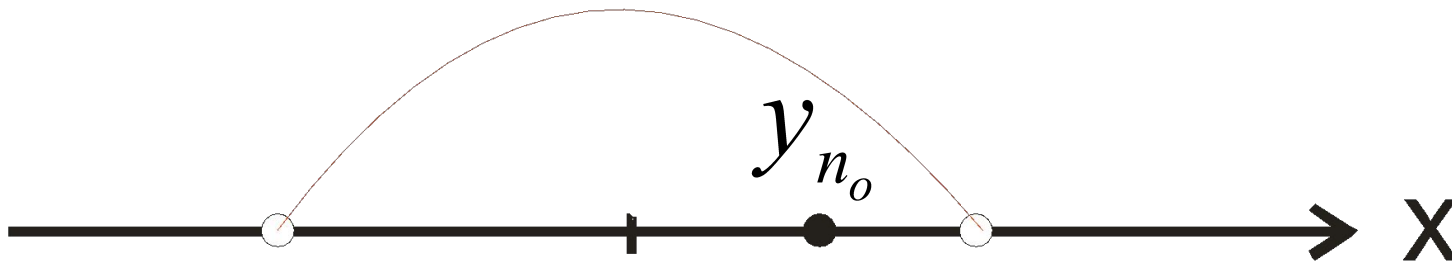
Название теоремы связано с такой ее интерпретацией. Если два милиционера ведут с двух сторон под руки подвыпившего гражданина и направляются в отделение, туда же придет и гражданин.

Дана последовательность

$$\{y_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$y_n = \frac{1}{n}.$$

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$



$-r$

0

r

Пусть $r = 0,001$ то в качестве
можно взять 1001

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

Если $|q| < 1$, *то* $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e = 2,7182818284590\dots$$

Ссылки на материалы из интернета:

- <http://bmcapital.blog.ru/?page=5>
- http://forexaw.com/TERMs/Theory_of_market/I725_%D0%A4%D0%B8%D0%B1%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%87%D1%87%D0%B8_Fibonacci
- <http://sceptic-ratio.narod.ru/rep/kn15.htm>
- <http://geana.hiblogger.net/tag/%F2%E2%EE%F0%E5%F6/>
- <http://www.skilpadde.ru/25-chisla-fibonachchi.html>
- <http://blog.i.ua/user/1577787/226447/>
- <http://best-mama.info/publ/pochemuchka/biolog/34>
- <http://kinder-online.ru/blog/lady-gaga-ili-njusha/page/2/>
- http://klen20078.ya.ru/replies.xml?item_no=3858
- <http://www.vlad-amelin.ru/stihi-o-zhizni/2256-zhizn-yeto-cep-sluchajnyx-chisel.html>
- <http://www.liveinternet.ru/users/daemaken/>