Числовые последовательности.

Предел числовой последовательности.

$\{a_n\}$ = **1, 3, 5, 7, 9, 11…**

a_n – общий член последовательности

Назовем числовой последовательностью $\{x_n\}$ числовую функцию, заданную на множестве натуральных чисел: $x_n = f(n),\ n \in N$

Значение *n* будем называть номером члена x_n, а само число x_n – общим членом или *n*–м членом последовательности.

Примеры последовательностей.

Продолжите ряд: 1, 10, 3, 9, 5, 8, 7, 7, 9, 6…

Ответ: Ряд состоит из двух частей: числа на нечетных местах: 1, 3, 5, 7, 9...; числа на четных местах: 10, 9, 8, 7

Продолжите ряд 77, 49, 36, 18…

Ответ: Перемножаются две цифры, входящие в предыдущее число

Назовем *постоянной* последовательность, если она равна константе для любого номера *n*:

$$x_n = C,\ n \in N,\ C \in R$$

Назовем последовательность *ограниченной*, если найдется такое число М, для которого модуль любого члена последовательности окажется не больше этого числа:

$$\left|x_n\right| \leq M, \forall n \in N$$

Квантор $\forall$, читается «для любого».

Последовательность **ограничена**, если найдется такое положительное число, для которого все члены последовательности по модулю окажутся не больше этого числа.

$$\{x_n\} \text{ ограничена, если } \exists M > 0 : |x_n| \le M \ \forall n \in N$$

Используемый квантор $\exists$ читается «существует», Последовательность называется *возрастающей*, если:

$$x_n \le x_{n+1} \ \forall \ n \in N$$

Последовательность **возрастает**, если каждый последующий член не меньше предыдущего.

Последовательность **монотонная**, если она возрастающая или убывающая.

Числа Фибоначчи.

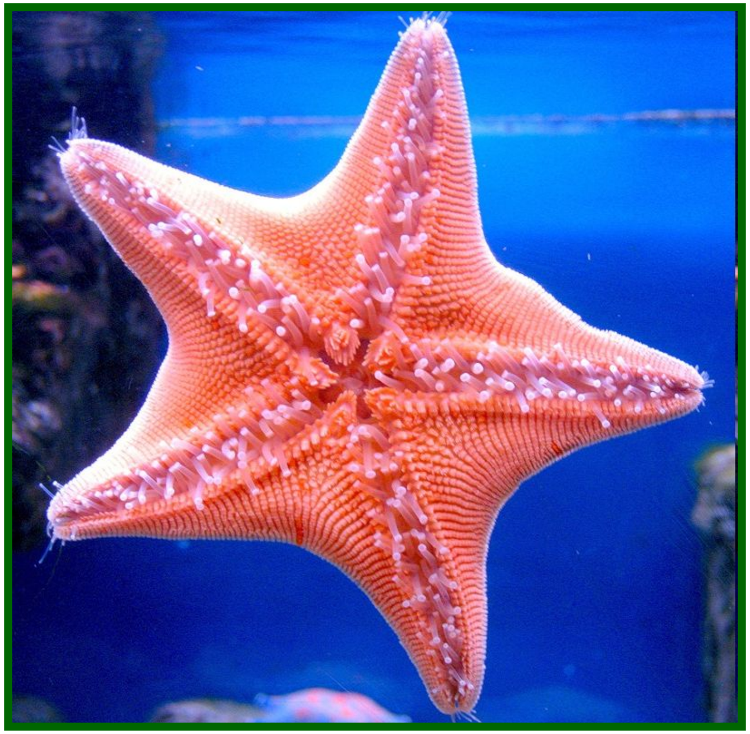
Элементы числовой последовательности, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610…

1. Рукава многих галактик расположены в соответствии с этой последовательностью.
2. Длины фаланг пальцев человека относятся примерно как числа Фибоначчи.

В сосновой шишке, если посмотреть на нее со стороны черенка, можно обнаружить две спирали, одна закручена против, другая по часовой стрелке. Число этих спиралей 8 и 13.

Когда потоки воды двигаются по океану и волны прилива подходят к берегу, они изгибаются в форме спирали, которая может быть математически отражена на графике с точками 1,1,2,3,5,8,13,21,34 и 55.



Ветви, листья деревьев, ракушки, морские звезды, ушная раковина человека, тюльпаны и другие цветы, и особенно раковины моллюсков - сформированы по той же самой схеме.
С каждым приростом раковина добавляет себе ещё один сегмент в соответствии с масштабом Фибоначчи.

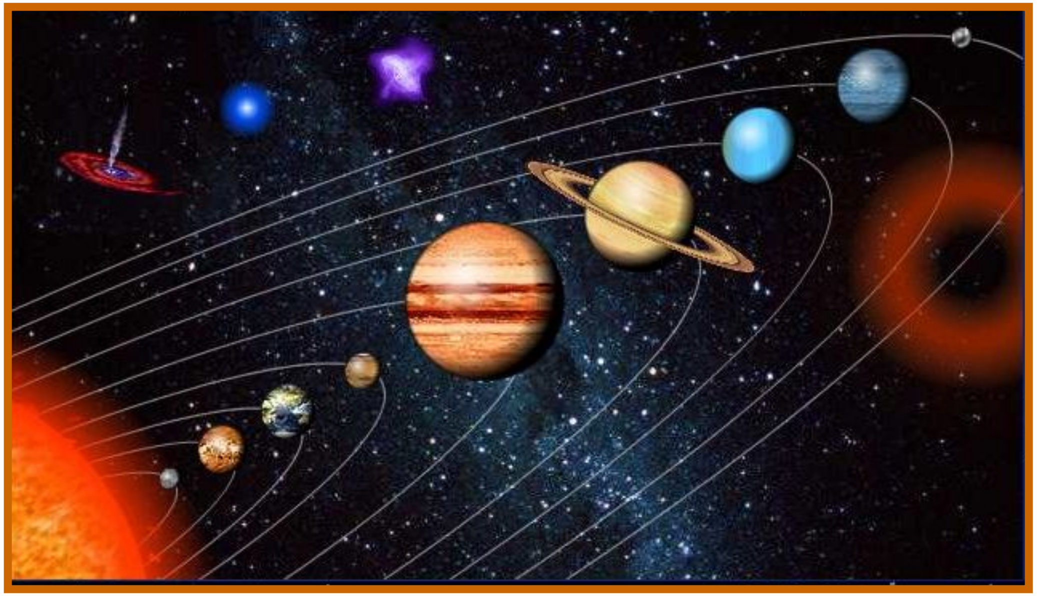
Паук плетет паутину спиралеобразно по тому же принципу.

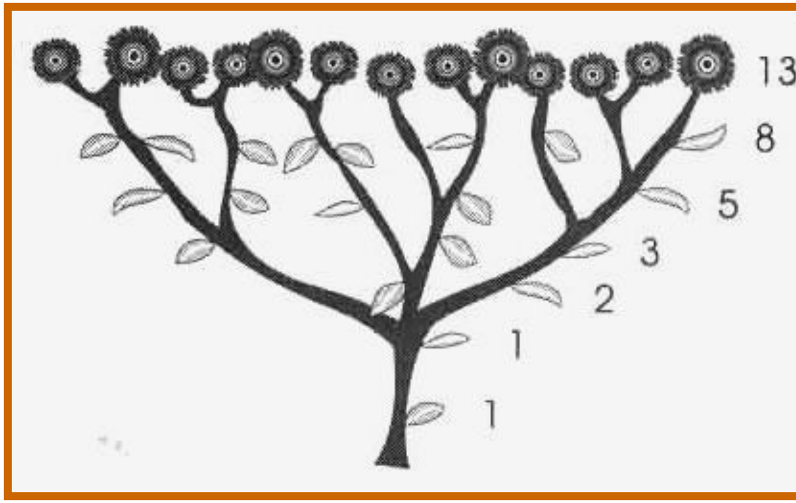
Спиралью закручивается ураган...

Ячейки ананаса расположены в 8 правосторонних, 13 левосторонних, 21 вертикальных спиралей.

Семена подсолнуха располагаются в двух пересекающихся спиралях с количеством соцветий 34 и 55 или 55 и 89 согласно последовательности Фибоначчи.

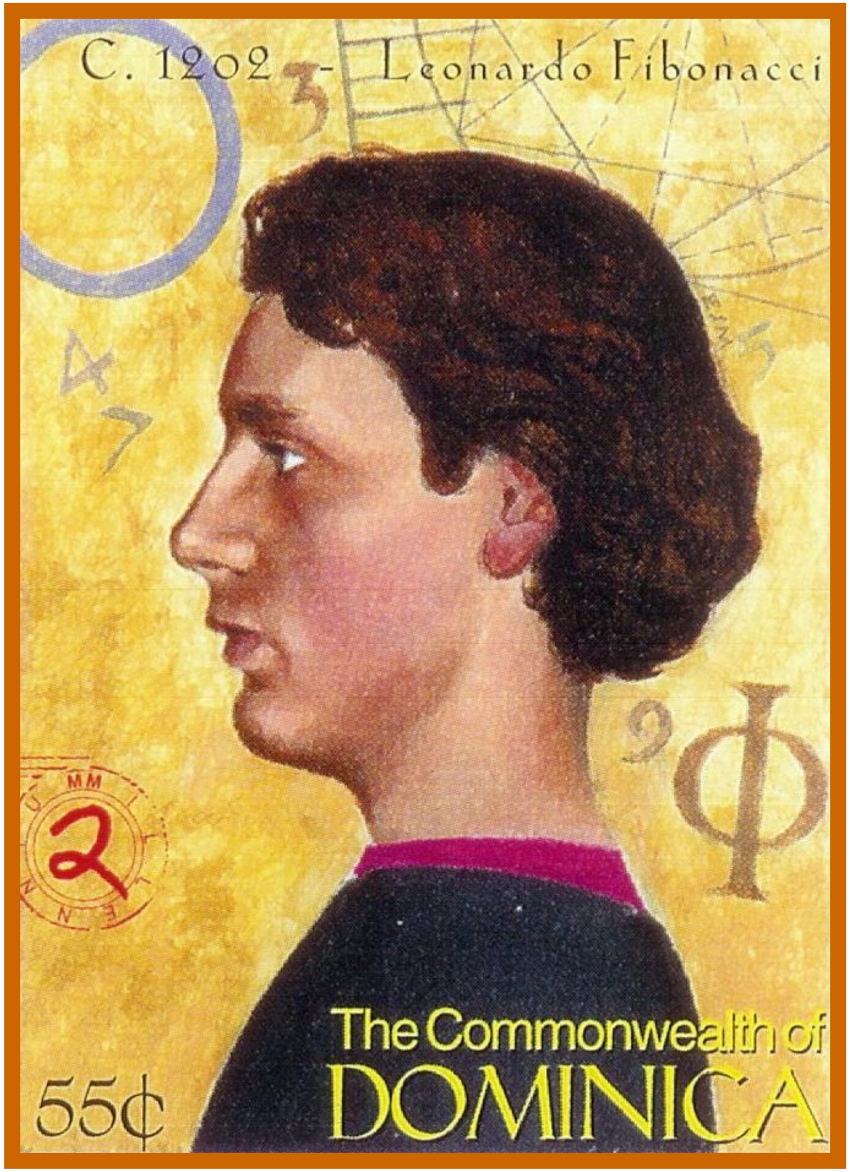
Из истории астрономии известно, что И. Тициус, немецкий астроном XVIII в., с помощью этого ряда (Фибоначчи) нашел закономерность и порядок в расстояниях между планетами солнечной системы





Схемы, по которыми сформированы лепестки, листья и семена цветов, соответствуют определённым числам.

Леонардо Пизанский или Фибоначчи



Леонардо Фибоначчи
(родился около 1170 — умер после 1228),
итальянский математик.

Последовательность Фибоначчи

рекуррентно задать легко, а аналитически – трудно.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Божественная пропорция.

При делении любого числа из последовательности на число, стоящее перед ним в ряду, результатом всегда ***будет величина, колеблющаяся около иррационального значения 1.61803398875…*** .

Оказывается что число ФИ -Строительный камень, который господь Бог использовал для создания Мира.

Блез Паскаль
(1623 – 1662).
Французский
математика XVII

Треугольник Паскаля – это бесконечная числовая таблица треугольной формы, в которой на вершине и по боковым сторонам стоят единицы, каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и справа в предшествующей строке:

Треугольник Паскаля.

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5;$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Треугольник Паскаля.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

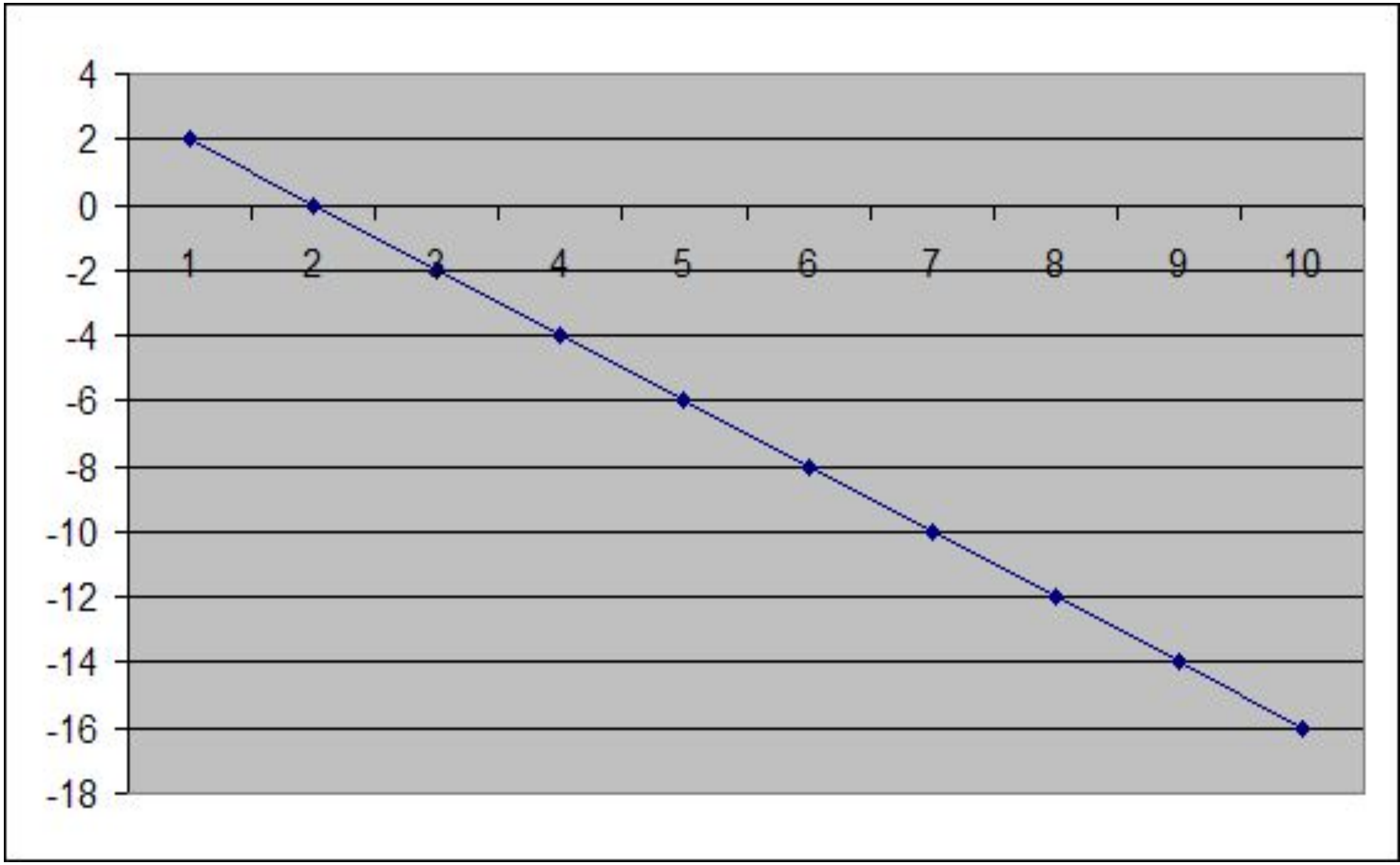
1 6 15 20 15 6 1

Подсчитав для каждой восходящей диагонали треугольника Паскаля сумму всех стоящих на этой диагонали чисел, получим числами Фибоначчи :

для 1 диагонали – 1;
для 2 диагонали – 1;
для 3 диагонали – 1+1=2;
для 4 диагонали – 1+2=3;
для 5 диагонали – 1+3+1=5;
для 6 диагонали – 1+4+3=8;
для 7 диагонали – 1+5+6+1=13 ….

График последовательности состоит из отдельных точек.

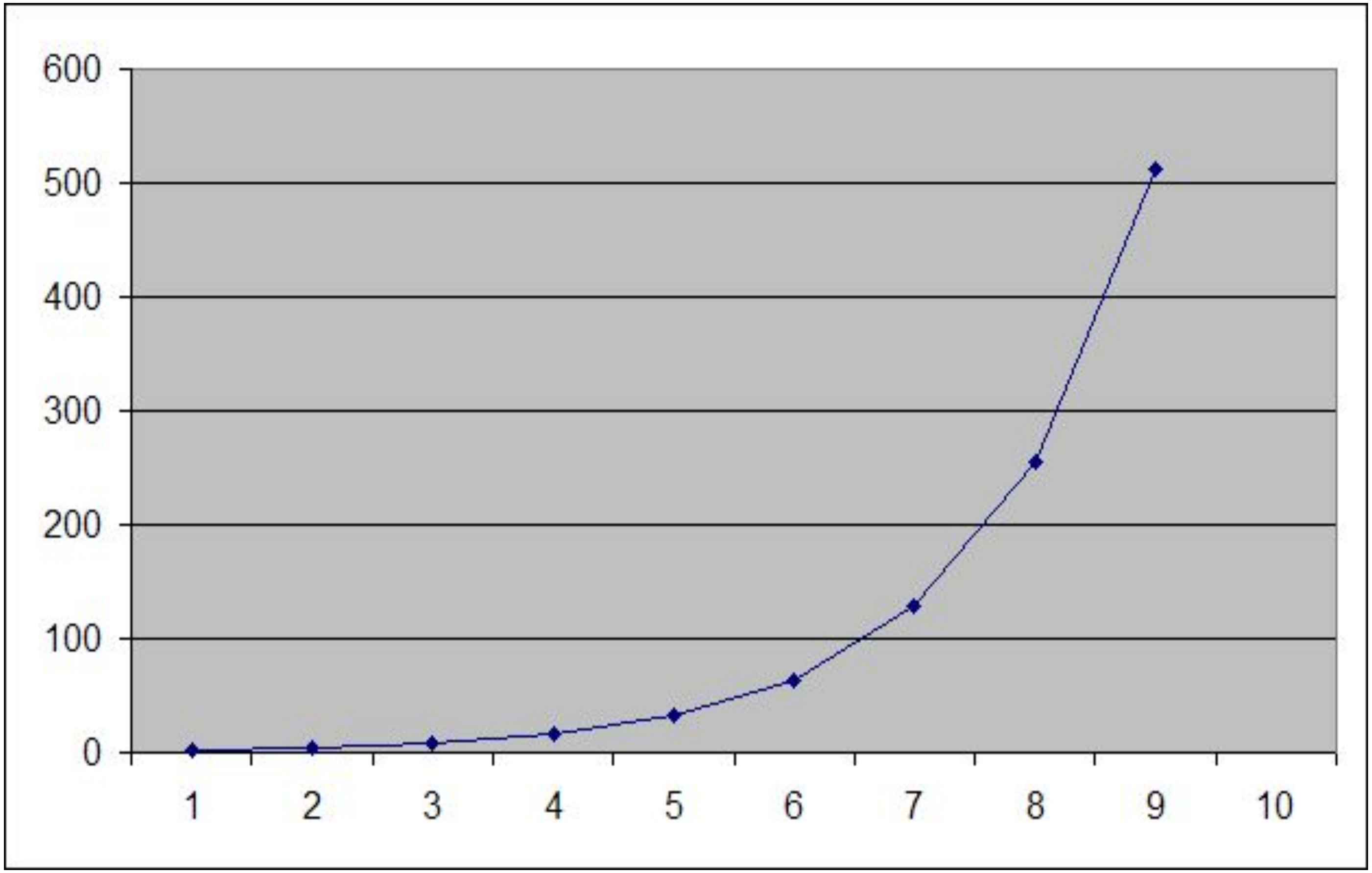
n	y_n
1	2
2	0
3	-2
4	-4
5	-6
6	-8
7	-10
8	-12
9	-14



Функция $y = 4 - 2n$

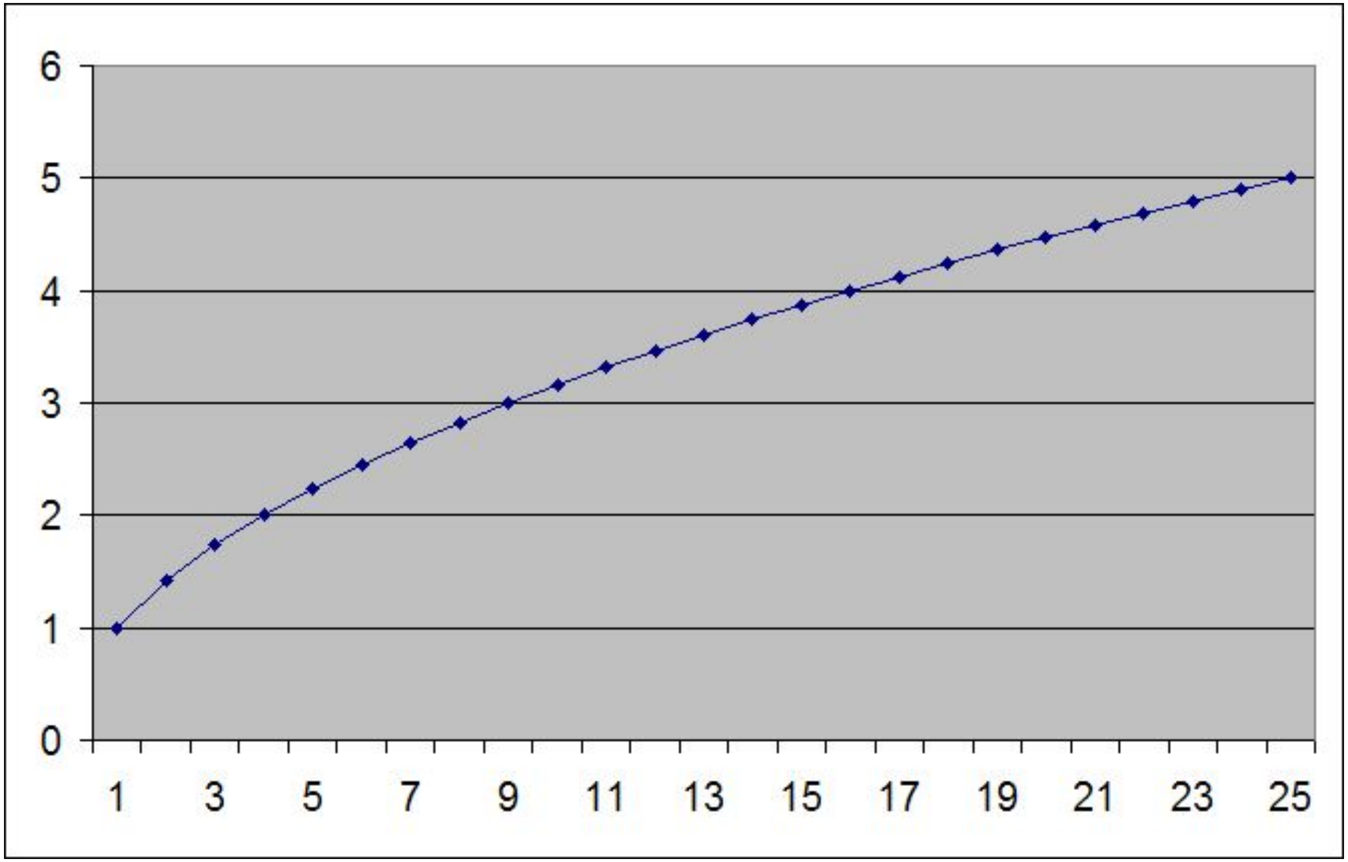
Функция $y = 2^n$

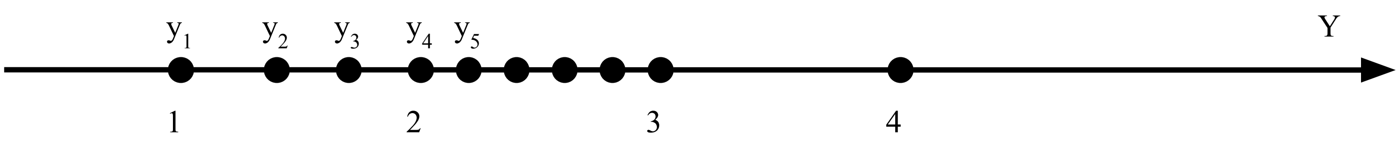
n	y_n
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512



n	y_n
1	1
2	1,414214
3	1,732051
4	2
5	2,23607
6	2,44949
7	2,645751
8	2,828427
9	3

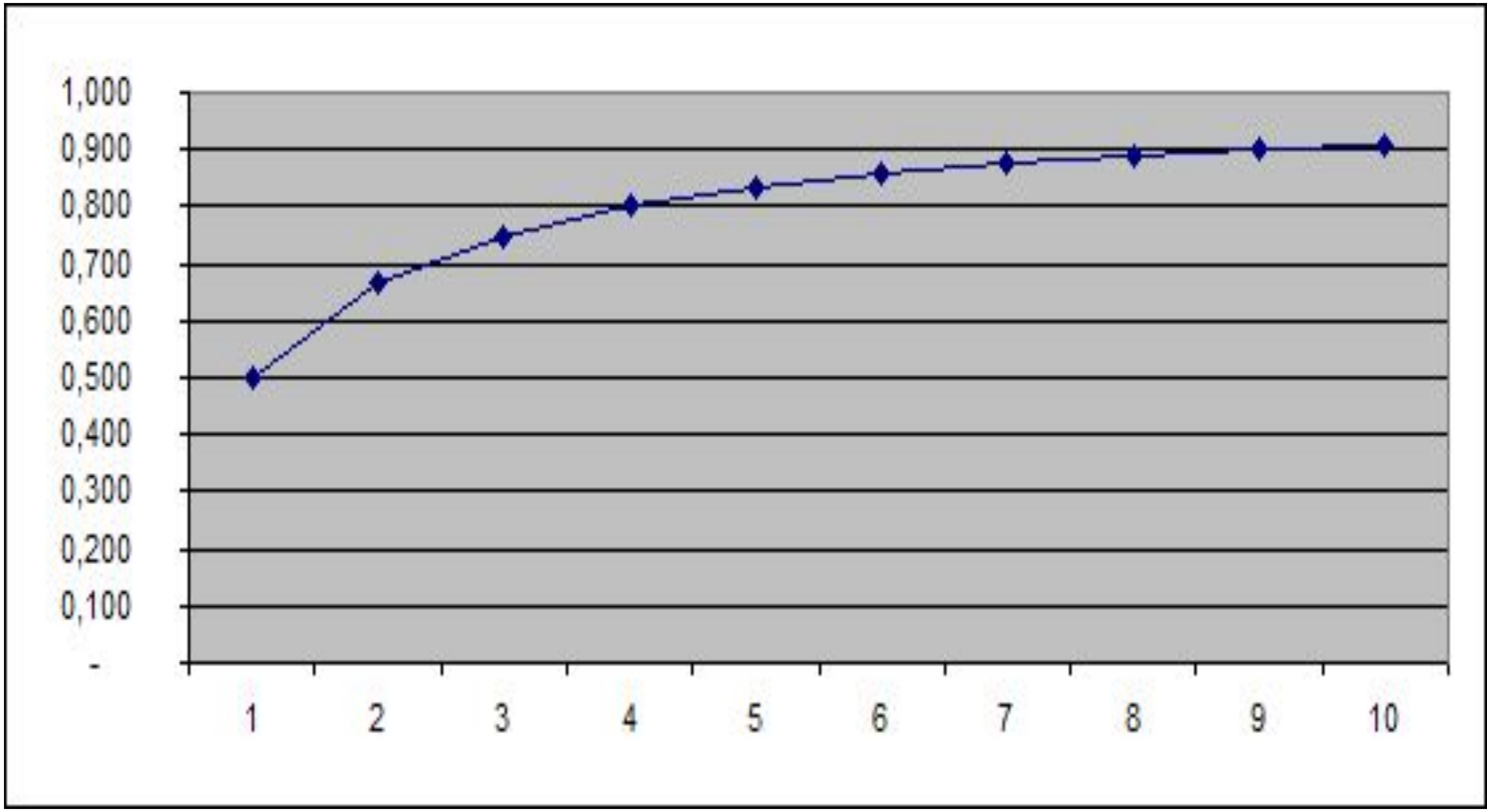
Функция $y = \sqrt{n}$

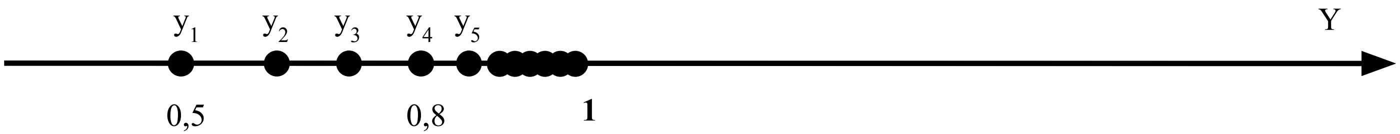




n	y_n
1	0,500
2	0,667
3	0,750
4	0,800
5	0,833
6	0,857
7	0,875
8	0,889
9	0,900
10	0,909

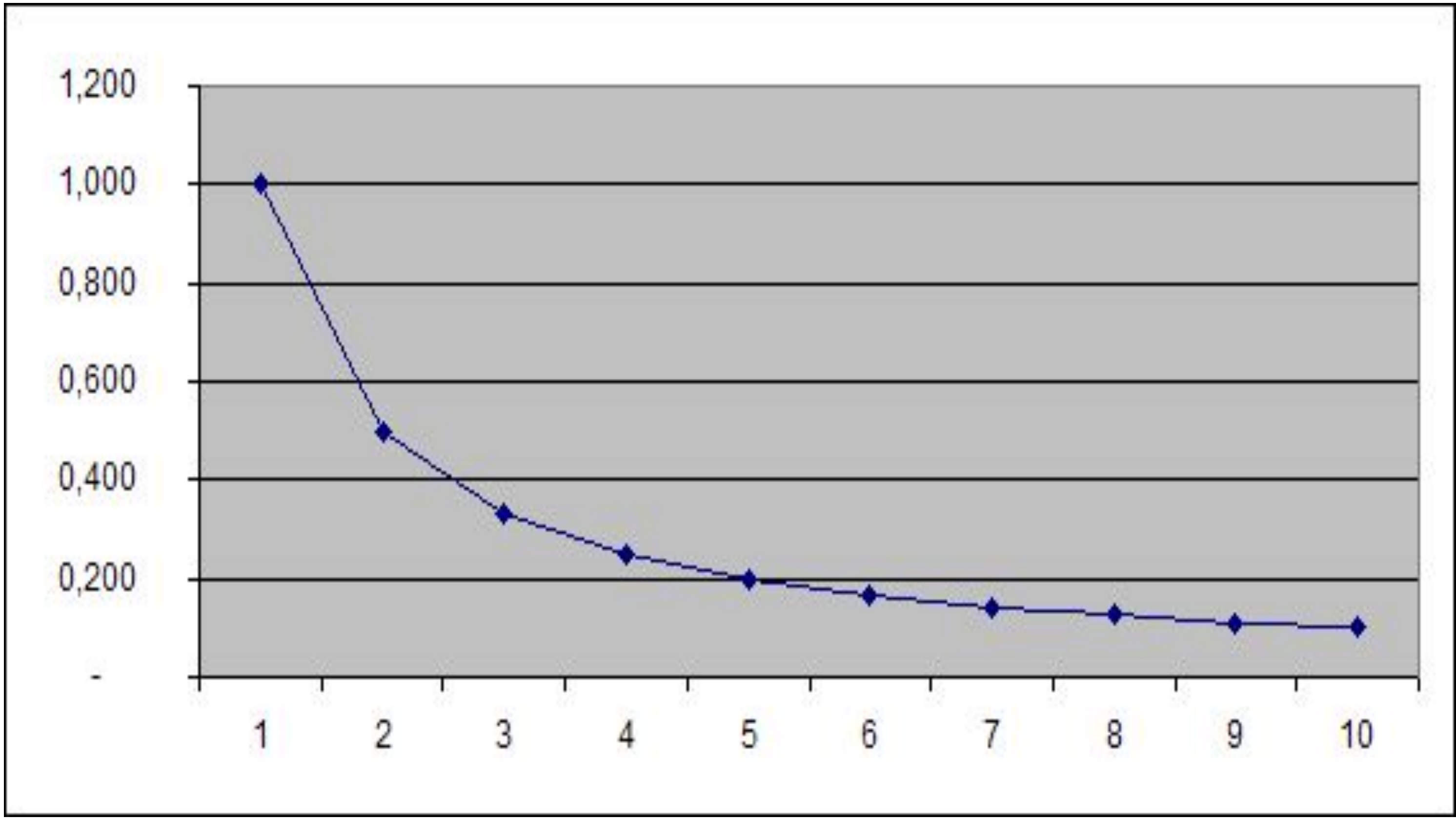
Функция $y = \frac{n}{n+1}$



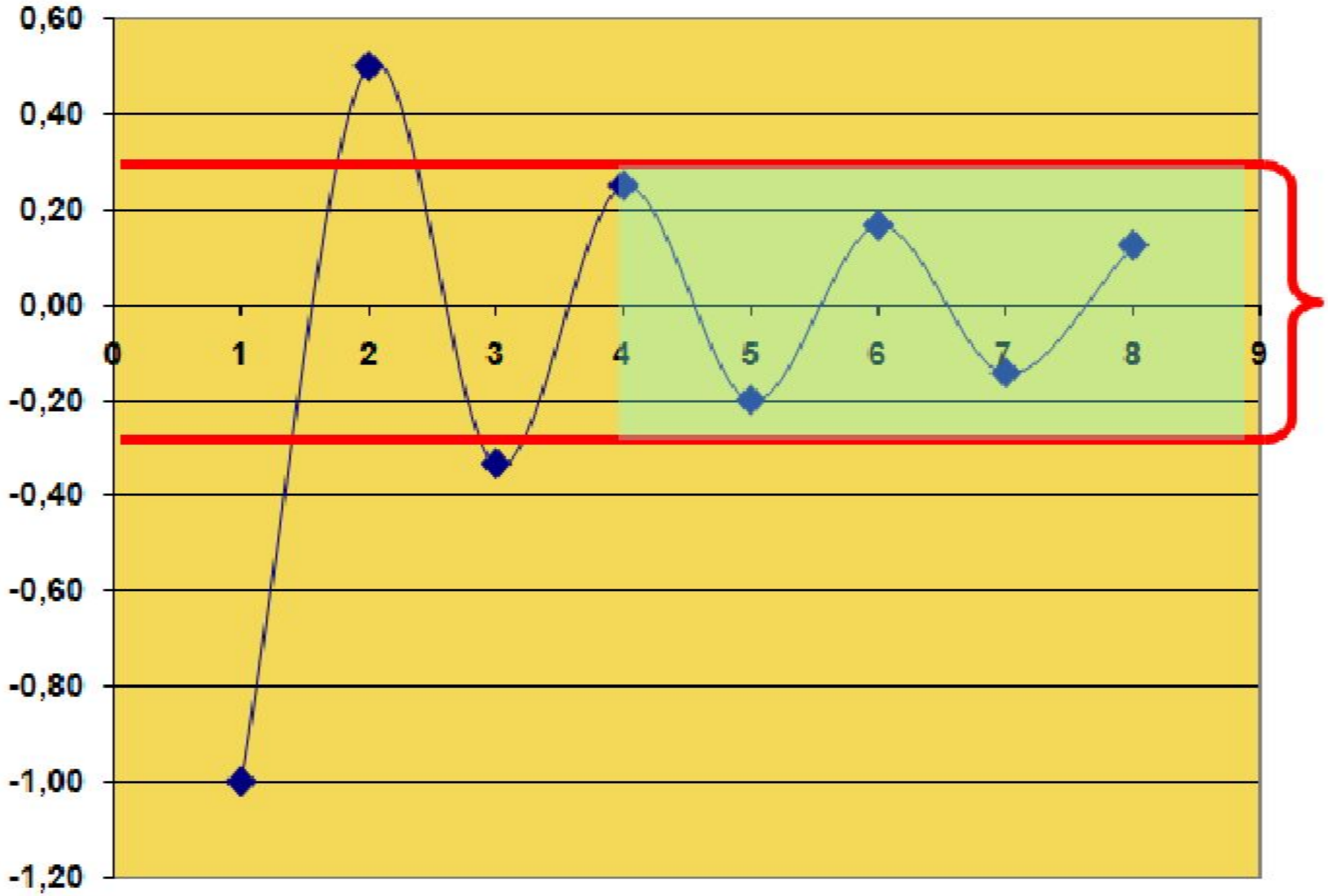


n	y_n
1	1,000
2	0,500
3	0,333
4	0,250
5	0,200
6	0,167
7	0,143
8	0,125
9	0,111
10	0,100

Функция $y = \frac{1}{n}$



Последовательность, которая имеет предел, называется *сходящейся*,
в обратном случае последовательность *расходится*.



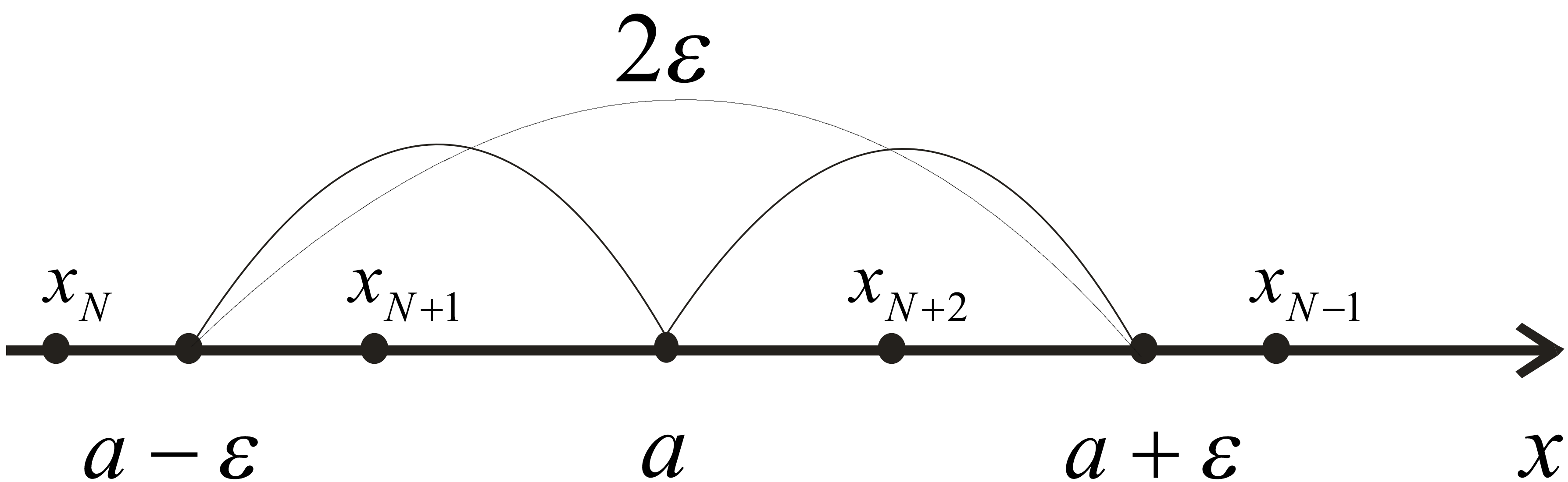
Все члены последовательности, начиная с некоторого, окажутся в "коридоре"

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Число a называется пределом последовательности $x = \{x_n\}$, если для произвольного заранее заданного сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to\infty} x_n = a$$

Геометрически понятие предела числовой последовательности.



$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon;$$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Неравенство означает, что все элементы последовательности с номерами n>N должны лежать в интервале (а – ε; а + ε).

Постоянное число **a** есть предел числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой малой окрестности с центром в точке **a** радиуса **ε** (**ε** – окрестности точки **a**) найдется такой элемент последовательности с номером **N**, что все последующие элементы с номерами **n>N** будут находиться внутри этой окрестности.

Последовательность **сходится**, если она имеет предел.

Доказать, что предел $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

такой последовательности равен 1:

Воспользуемся определением предела.
По виду последовательности
можно сказать, что с ростом номера n
общий член последовательности x_n
приближается к единице,
а разность $|x_n - 1|$ приближается к нулю.

Покажем это строго.
Для произвольного числа ε > 0 в

выберем $N = \frac{1}{\varepsilon}$

Если номер *n* > *N*, тогда $n > \frac{1}{\varepsilon}$

и это означает, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Далее: $$\left|x_n - 1\right| = \left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Тем самым, для произвольного числа ε > 0 мы указали такой номер *N*, что для всех *n* > *N* выполняется

неравенство $$\left|x_n - 1\right| < \varepsilon$$

Мы доказали, что единица есть предел рассматриваемой последовательности.

Теорема о единственности предела последовательности:

Последовательность не может иметь больше одного предела.

Это следует из того, что последовательность не может одновременно приближаться к двум разным числам одновременно.

Формально, выберем ε значительно меньше разницы между числами *a* и *b.*

Тогда очевидно, что мы не сможем указать такого номера *N*, начиная с которого одновременно будут выполнены два условия:

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad |x_n - b| < \varepsilon$$

Теорема:

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то сходится и их сумма $\{a_n + b_n\}$ и, кроме того, предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

Теорема:
 Постоянную величину можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}\left(C\cdot a_n\right)=C\cdot\lim_{n\to\infty}a_n$$

Теорема:

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то сходится и их произведение $\{a_n \cdot b_n\}$ и, кроме того, предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

Теорема:

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$

сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Предел отношения равен отношению

пределов. $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

Признак существования предела.

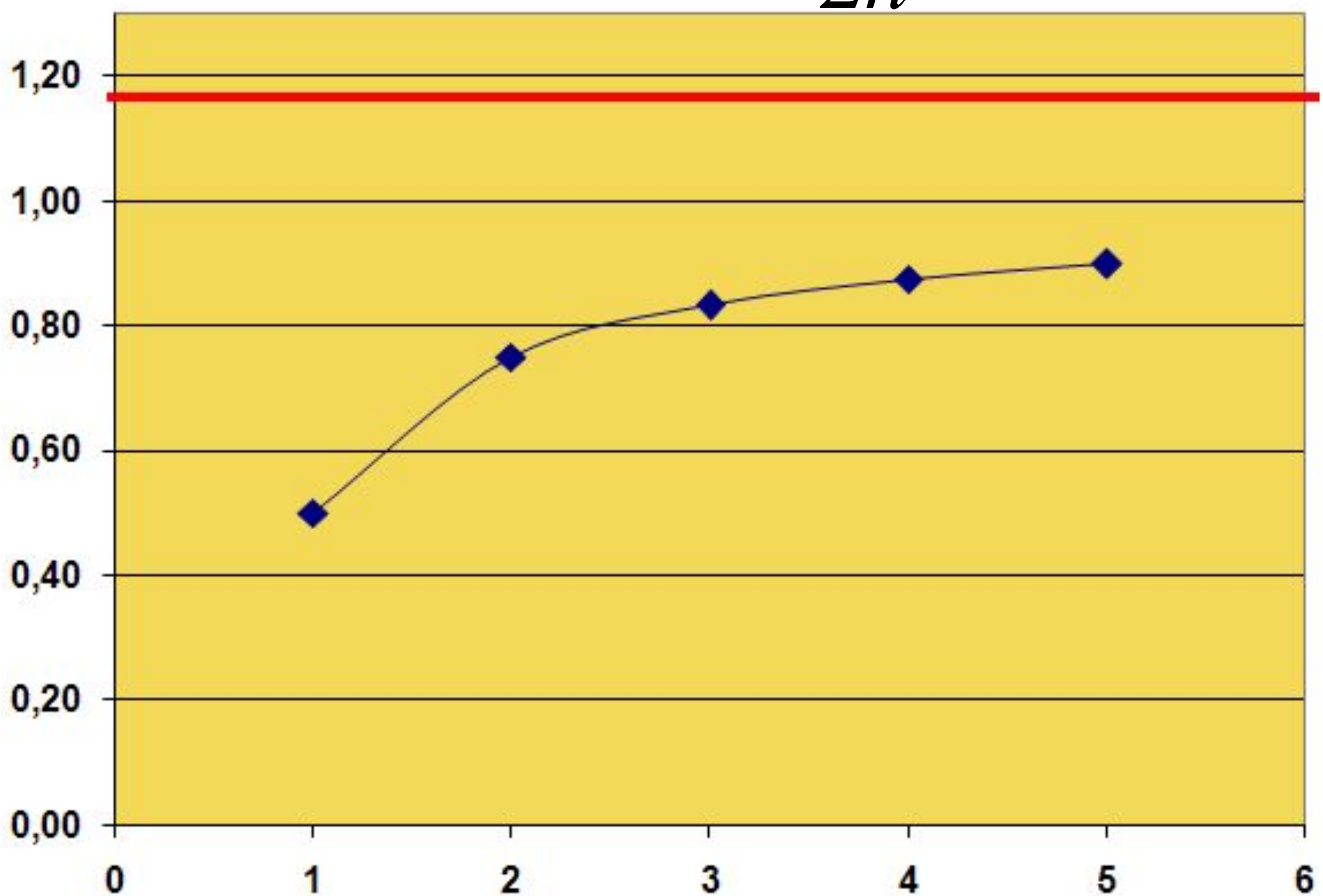
Теорема:
Если последовательность ограничена и монотонна, то она сходится.

Пример такой последовательности, которая ограничена, возрастает и потому имеет предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)=1$$

Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

$$a_n = 1 - \frac{1}{2n}$$



Теорема о двух милиционерах

Теорема (признак существования предела):
Если одна последовательность заключена между двумя другими, имеющими одинаковый предел, то она имеет тот же предел.

$$\text{Если } a_n \le b_n \le c_n \text{ и выполняется условие}:$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$$

$$\text{Тогда предел последовательности } b_n \text{ тоже } A$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A$$

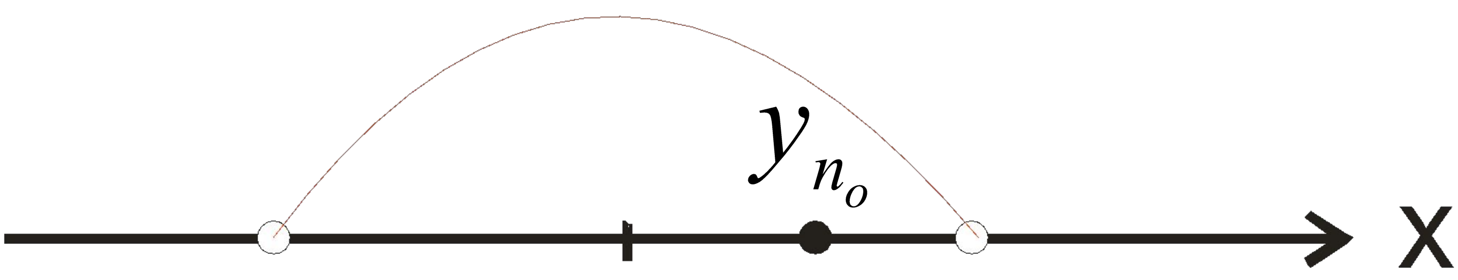
Название теоремы связано с такой ее интерпретацией. Если два милиционера ведут с двух сторон под руки подвыпившего гражданина и направляются в отделение, туда же придет и гражданин.

Дана последовательность

$$\{y_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots .$$

$$y_n = \frac{1}{n}.$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$



Пусть $r = 0{,}001$ *то в качестве* n_0 *можно взять* 1001

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;$$

$$Если\,|q|<1,\ то\ \lim_{n\to\infty}q^n=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2,7182818284590...$$

Ссылки на материалы из интернета:

- http://bmcapital.blog.ru/?page=5
- http://forexaw.com/TERMs/Theory_of_market/l725_%D0%A4%D0%B8%D0%B1%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%87%D1%87%D0%B8_Fibonacci
- http://sceptic-ratio.narod.ru/rep/kn15.htm
- http://geana.hiblogger.net/tag/%F2%E2%EE%F0%E5%F6/
- http://www.skilpadde.ru/25-chisla-fibonachchi.html
- http://blog.i.ua/user/1577787/226447/
- http://best-mama.info/publ/pochemuchka/biolog/34
- http://kinder-online.ru/blog/lady-gaga-ili-njusha/page/2/
- http://klen20078.ya.ru/replies.xml?item_no=3858
- http://www.vlad-amelin.ru/stihi-o-zhizni/2256-zhizn-yeto-cep-sluchajnyx-chisel.html
- http://www.liveinternet.ru/users/daemaken/