



Числовые  
последовательности.

Предел числовой  
последовательности.

$$\{a_n\} = 1, 3, 5, 7, 9, 11\dots$$

$a_n$  – общий член последовательности

Назовем **числовой последовательностью**  $\{x_n\}$  числовую функцию, заданную на множестве натуральных чисел:  $x_n = f(n), n \in N$

Значение  $n$  будем называть номером члена  $x_n$ , а само число  $x_n$  – общим членом или  $n$ -м членом последовательности.

## Примеры последовательностей.

Продолжите ряд: 1, 10, 3, 9, 5, 8, 7, 7, 9, 6...

Ответ: Ряд состоит из двух частей: числа на нечетных местах: 1, 3, 5, 7, 9...; числа на четных местах: 10, 9, 8, 7

Продолжите ряд 77, 49, 36, 18...

Ответ: Перемножаются две цифры, входящие в предыдущее число

Назовем *постоянной* последовательность, если она равна константе для любого номера  $n$ :

$$x_n = C, n \in N, C \in R$$

Назовем последовательность *ограниченной*, если найдется такое число  $M$ , для которого модуль любого члена последовательности окажется не больше этого числа:

$$|x_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Квантор  $\forall$ , читается «для любого».

Последовательность **ограничена**, если найдется такое положительное число, для которого все члены последовательности по модулю окажутся не больше этого числа.

*{ограничена если  $M \exists > 0 : |a_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$*

Используемый квантор  $\exists$  читается «существует»,

Последовательность называется *возрастающей*, если:

$$x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Последовательность **возрастает**, если каждый последующий член не меньше предыдущего.

Последовательность **монотонная**, если она возрастающая или убывающая.

# Числа Фибоначчи.

Элементы числовой последовательности, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610...

1. Рукава многих галактик расположены в соответствии с этой последовательностью.
2. Длины фаланг пальцев человека относятся примерно как числа Фибоначчи.

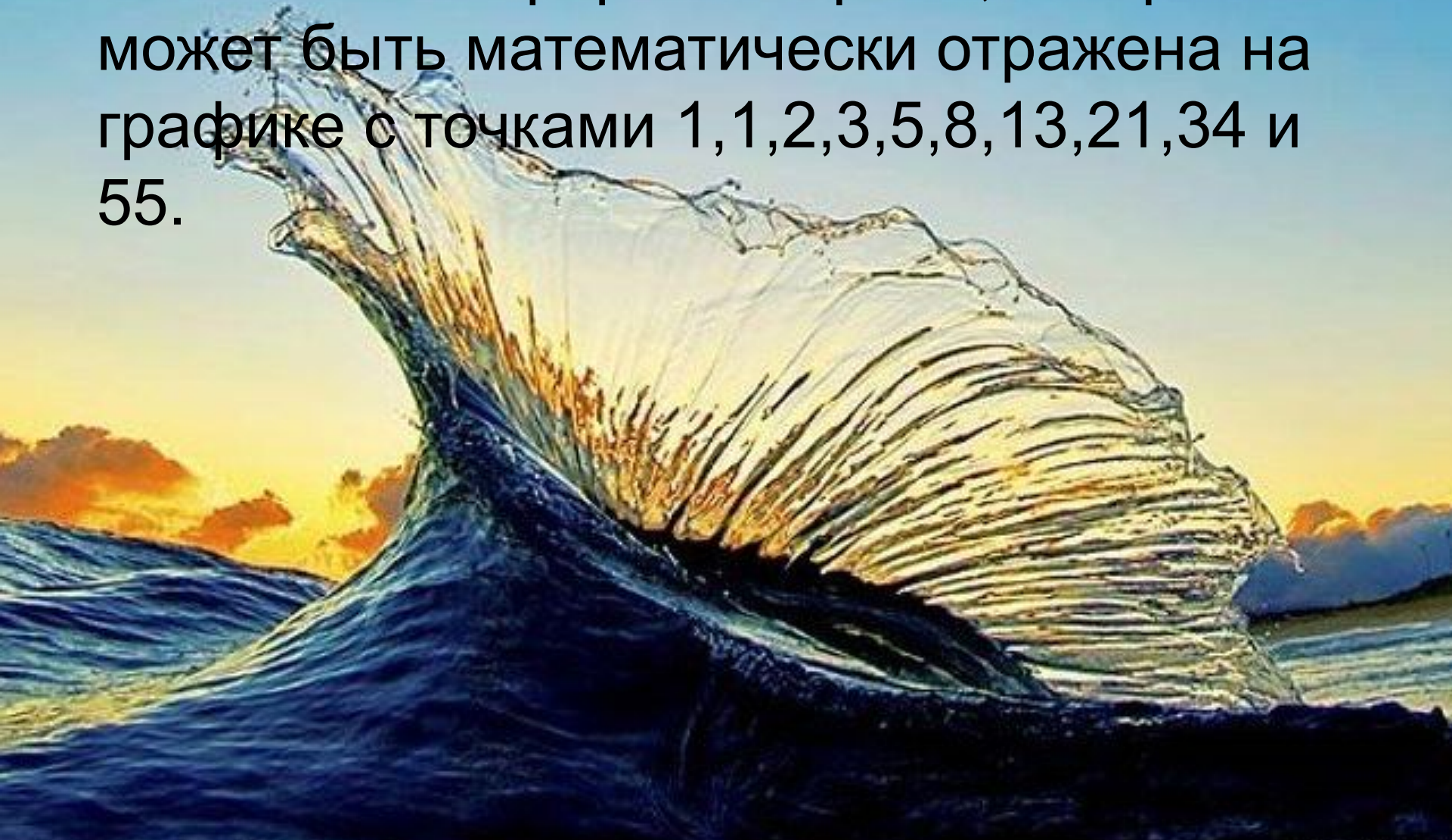


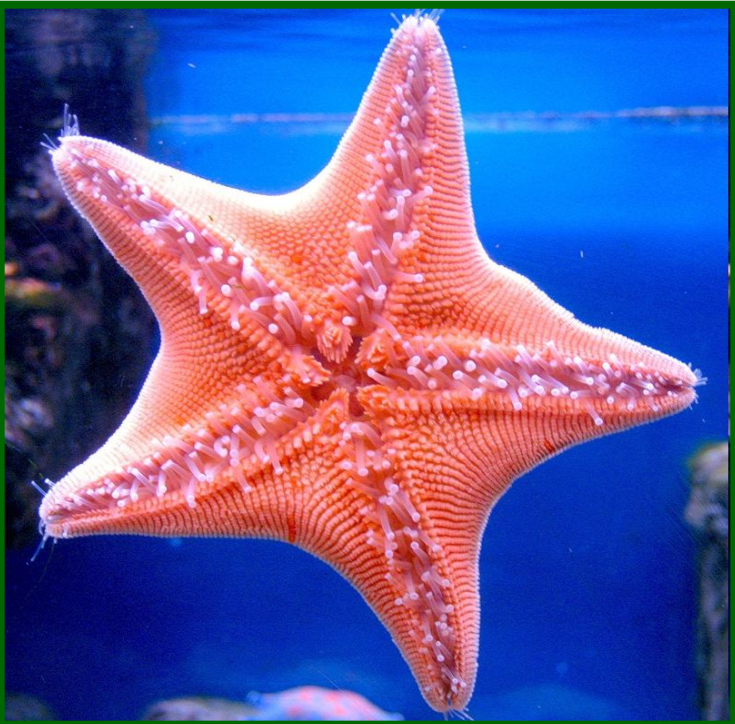
В сосновой шишке, если посмотреть на нее со стороны черенка, можно обнаружить две спирали, одна закручена против, другая по часовой стрелке. Число этих спиралей 8 и 13.





Когда потоки воды двигаются по океану и волны прилива подходят к берегу, они изгибаются в форме спирали, которая может быть математически отражена на графике с точками 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 и 55.





Ветви, листья деревьев, ракушки, морские звезды, ушная раковина человека, тюльпаны и другие цветы, и особенно раковины моллюсков - сформированы по той же самой схеме. С каждым приростом раковина добавляет себе ещё один сегмент в соответствии с масштабом Фибоначчи.

**Паук плетет паутину спиралеобразно по  
тому же принципу.  
Спиралью закручивается ураган...**



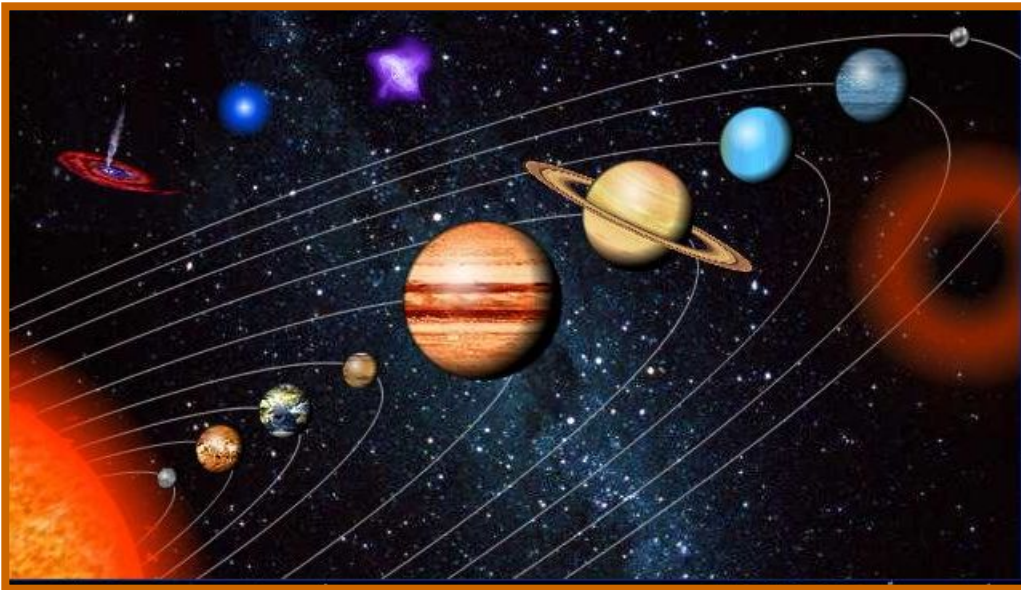


Ячейки ананаса  
расположены в 8  
правосторонних, 13  
левосторонних, 21  
вертикальных спиралей.

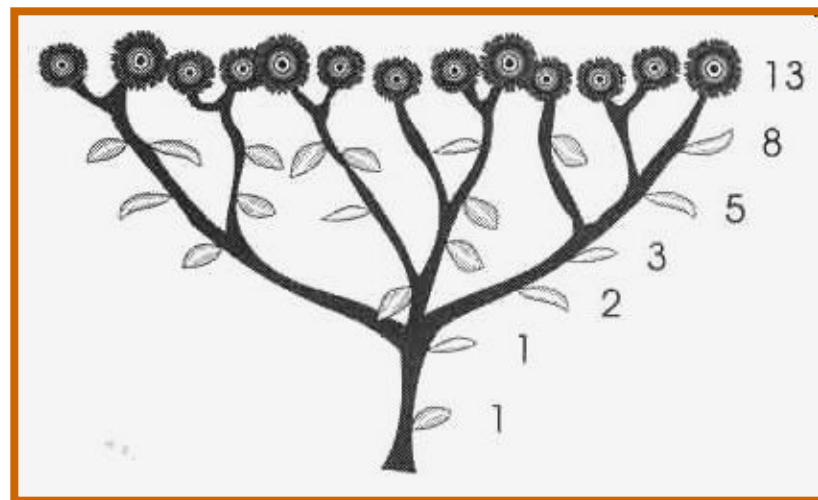
Семена подсолнуха располагаются в двух пересекающихся спиралях с количеством соцветий 34 и 55 или 55 и 89 согласно последовательности Фибоначчи.



Из истории астрономии известно, что И. Тициус, немецкий астроном XVIII в., с помощью этого ряда (Фибоначчи) нашел закономерность и порядок в расстояниях между планетами солнечной системы







Схемы, по которыми сформированы лепестки, листья и семена цветов, соответствуют определённым числам.

Леонардо Пизанский или Фибоначчи



Леонардо Фибоначчи  
(родился около 1170 — умер  
после 1228),  
итальянский математик.

## Последовательность Фибоначчи

рекуррентно задать легко, а аналитически – трудно.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

## Божественная пропорция.

При делении любого числа из последовательности на число, стоящее перед ним в ряду, результатом всегда **будет величина, колеблющаяся около иррационального значения**  
 **$1.61803398875\dots$**

Оказывается что число ФИ -Строительный камень, который господь Бог использовал для создания Мира.



**Блез Паскаль**  
**(1623 – 1662 ).**  
Французский  
математика XVII

Треугольник Паскаля – это бесконечная числовая таблица треугольной формы, в которой на вершине и по боковым сторонам стоят единицы, каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и справа в предшествующей строке:

# Треугольник Паскаля.

1

1

1

1

2

1

1

3

3

1

1

4

6

4

1

1

5

10

10

5

1

1

6

15

20

15

6

1

				1						
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
	1	5		10		10		5		1
1		6	15		20		15	6		1

$$\underline{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;}$$

$$\underline{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;}$$

$$\underline{(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$



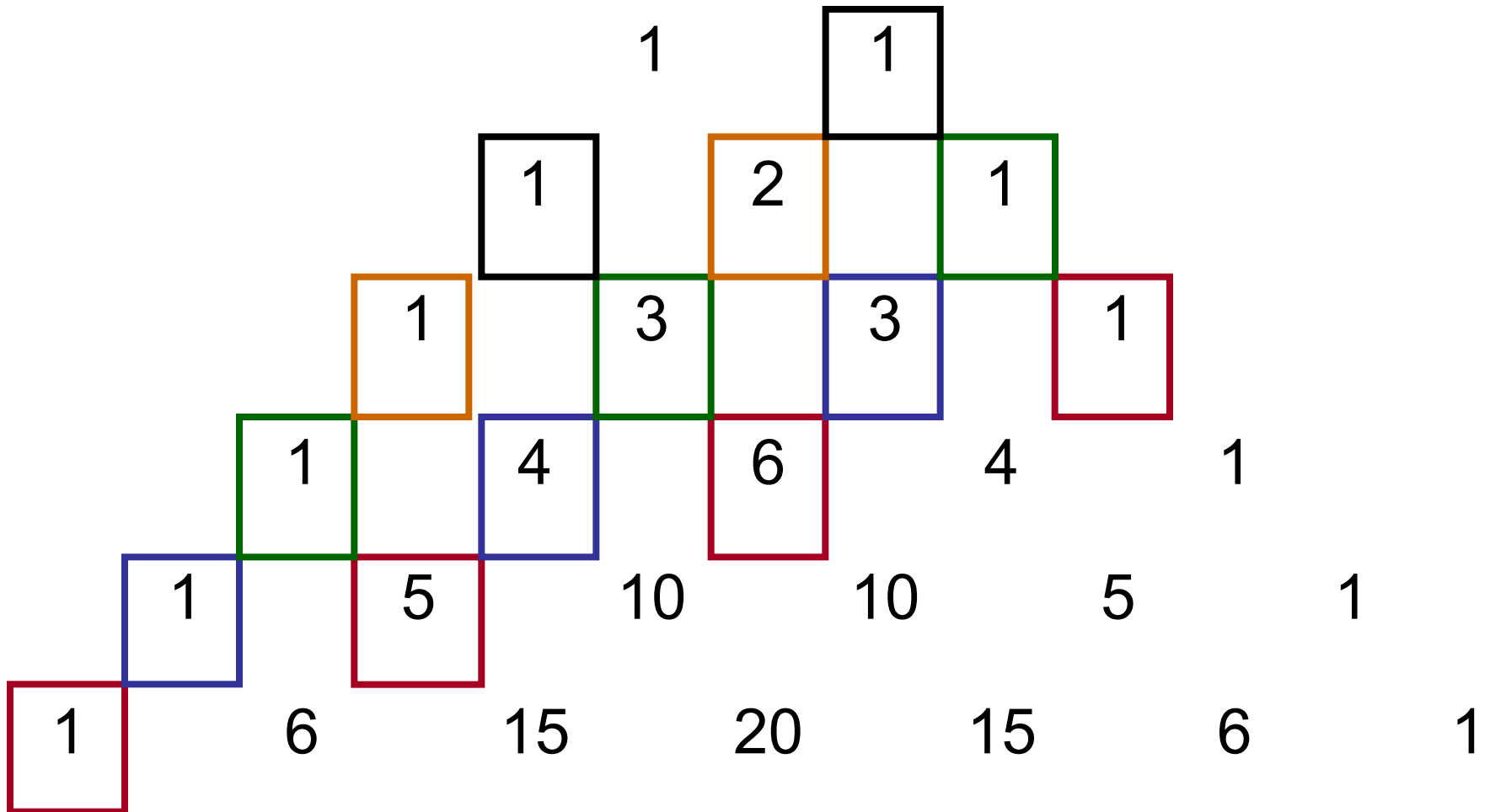
				1								
				1		1						
			1		2		1					
		1		3		3		1				
	1		4		6		4		1			
1		5		10		10		5		1		
1		6		15		20		15		6		1

$$\underline{(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5;}$$

$$\underline{(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.}$$

# Треугольник Паскаля.

1



Подсчитав для каждой восходящей диагонали треугольника Паскаля сумму всех стоящих на этой диагонали чисел, получим числами Фибоначчи :

для 1 диагонали – 1;

для 2 диагонали – 1;

для 3 диагонали –  $1+1=2$ ;

для 4 диагонали –  $1+2=3$ ;

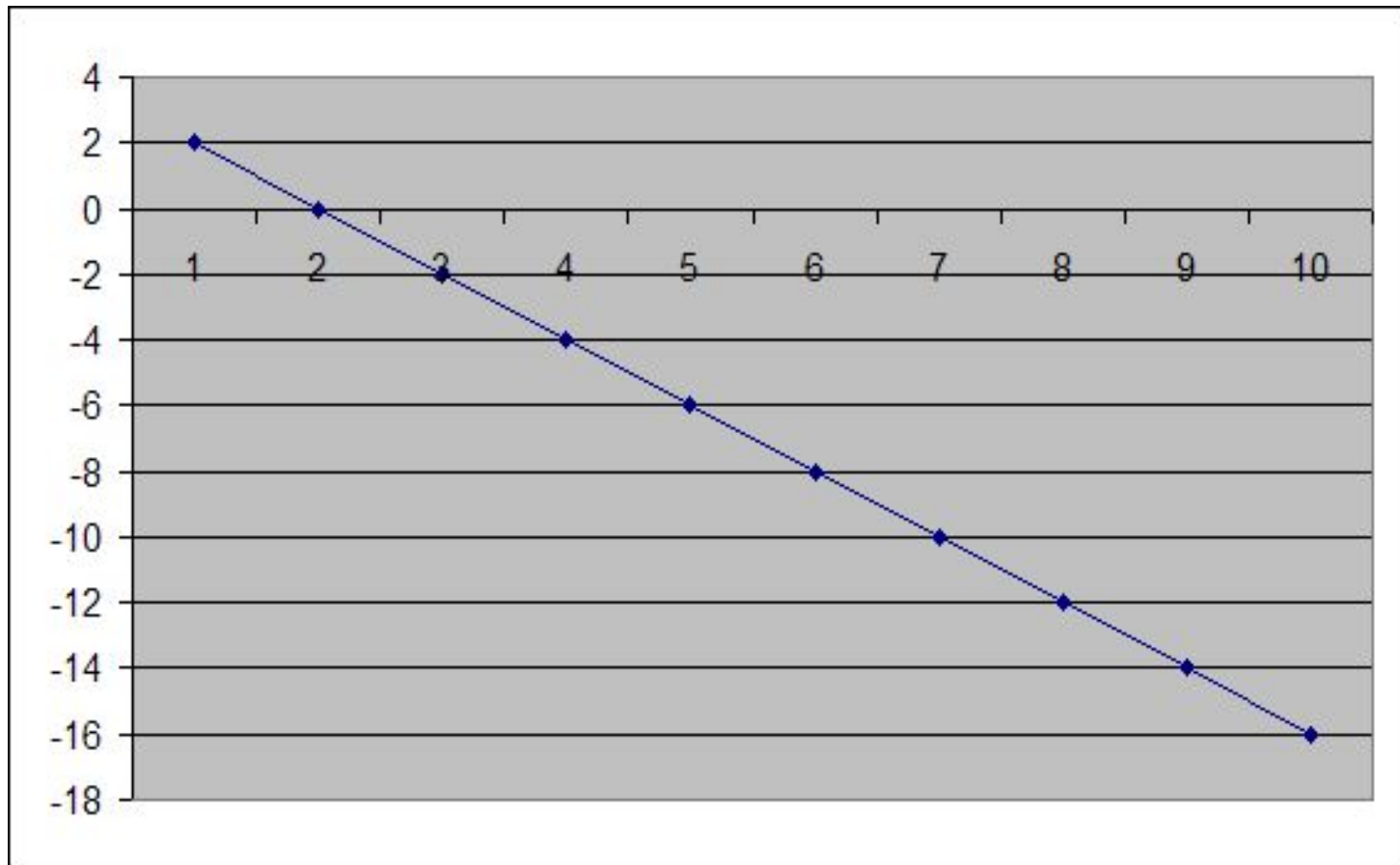
для 5 диагонали –  $1+3+1=5$ ;

для 6 диагонали –  $1+4+3=8$ ;

для 7 диагонали –  $1+5+6+1=13$  ....

График последовательности состоит из  
отдельных точек.

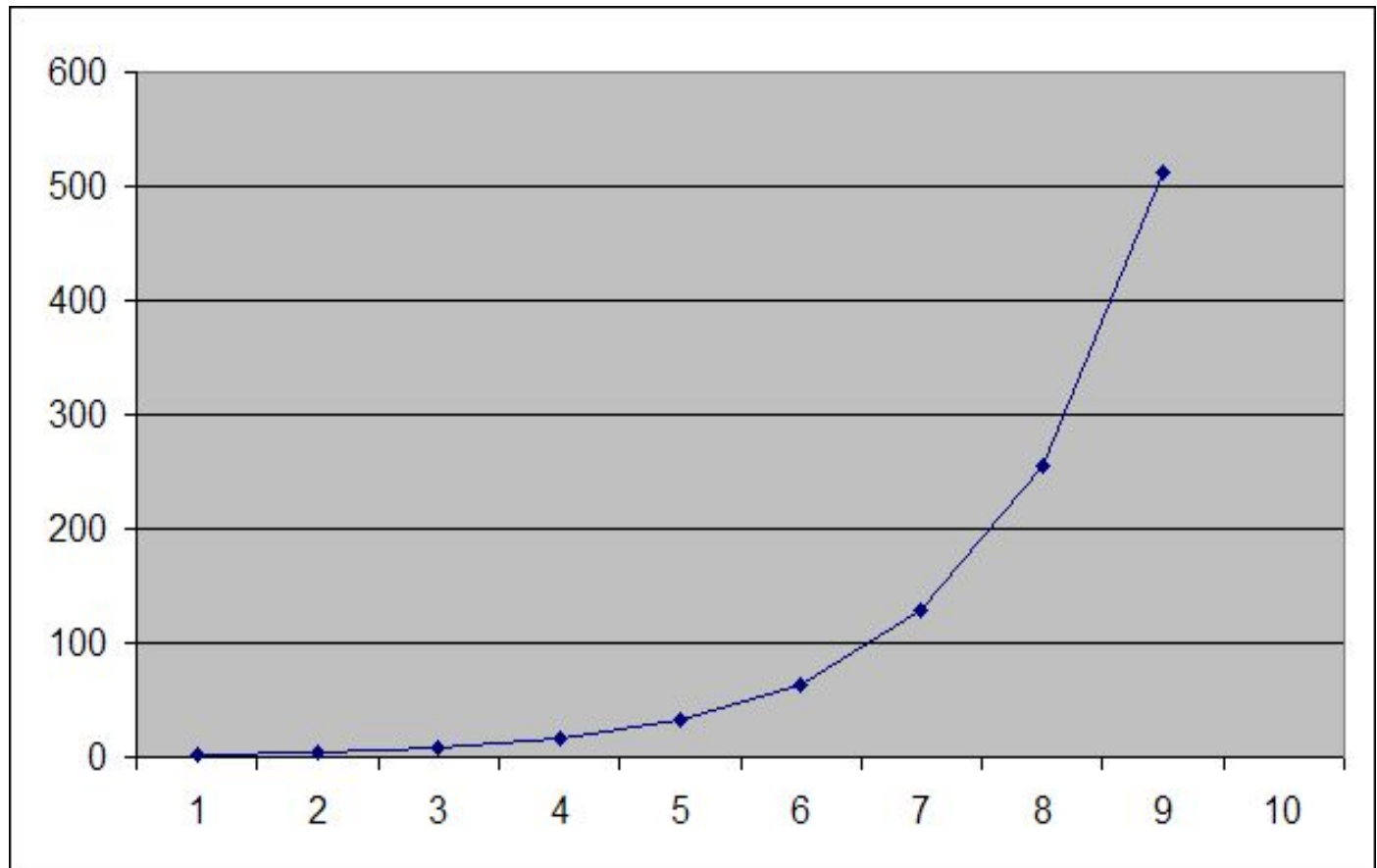
$n$	$y_n$
1	2
2	0
3	-2
4	-4
5	-6
6	-8
7	-10
8	-12
9	-14



Функция  $y = 4 - 2n$

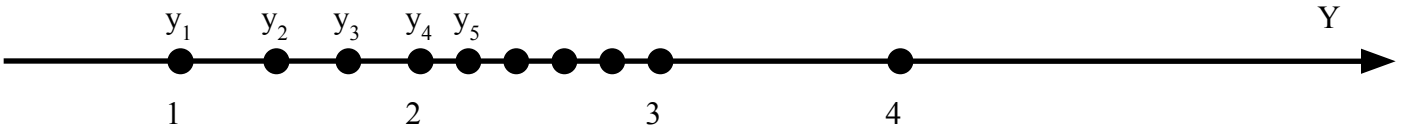
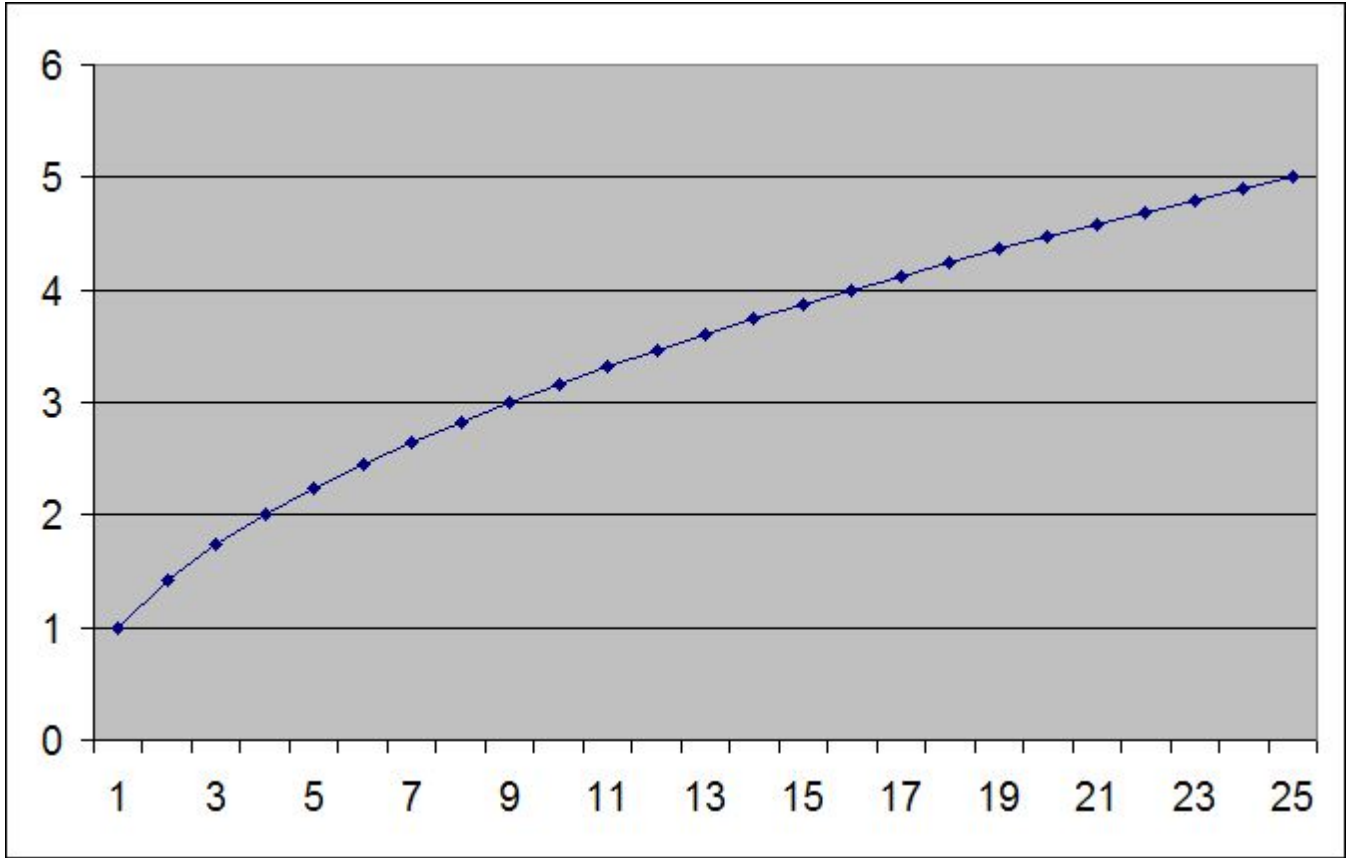
Функция  $y = 2^n$

<b>n</b>	<b>y<sub>n</sub></b>
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512



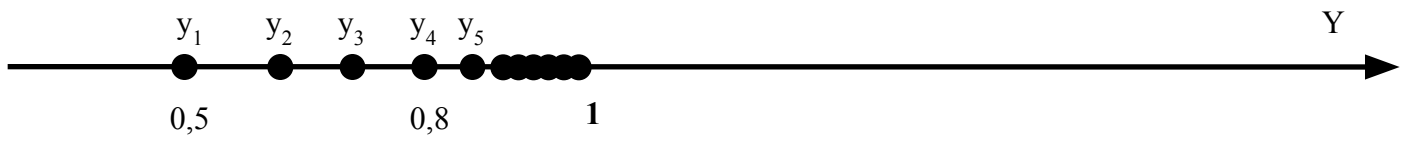
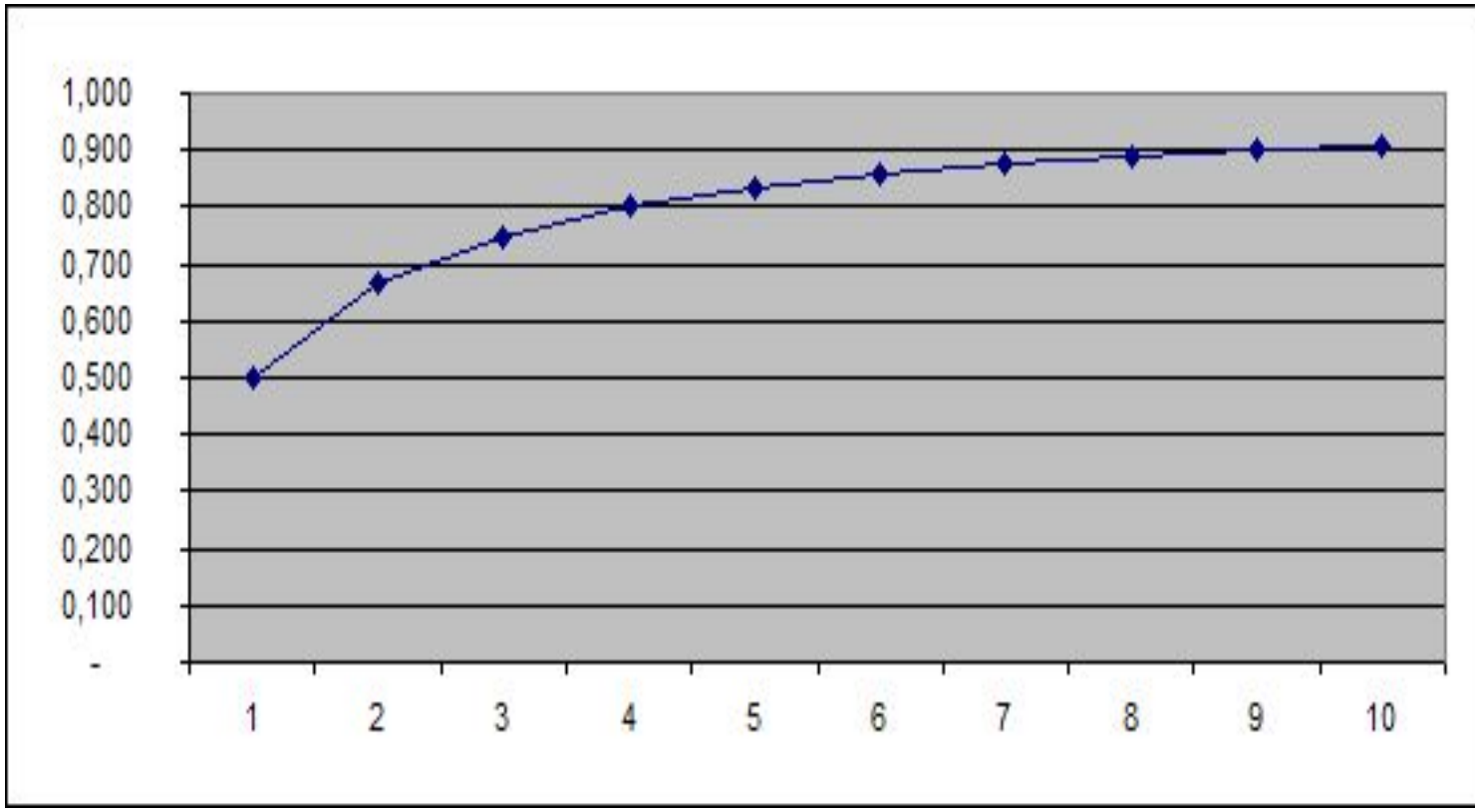
<b>n</b>	<b>y<sub>n</sub></b>
1	1
2	1,414214
3	1,732051
4	2
5	2,23607
6	2,44949
7	2,645751
8	2,828427
9	3

Функция  $y = \sqrt{n}$



$n$	$y_n$
1	0,500
2	0,667
3	0,750
4	0,800
5	0,833
6	0,857
7	0,875
8	0,889
9	0,900
10	0,909

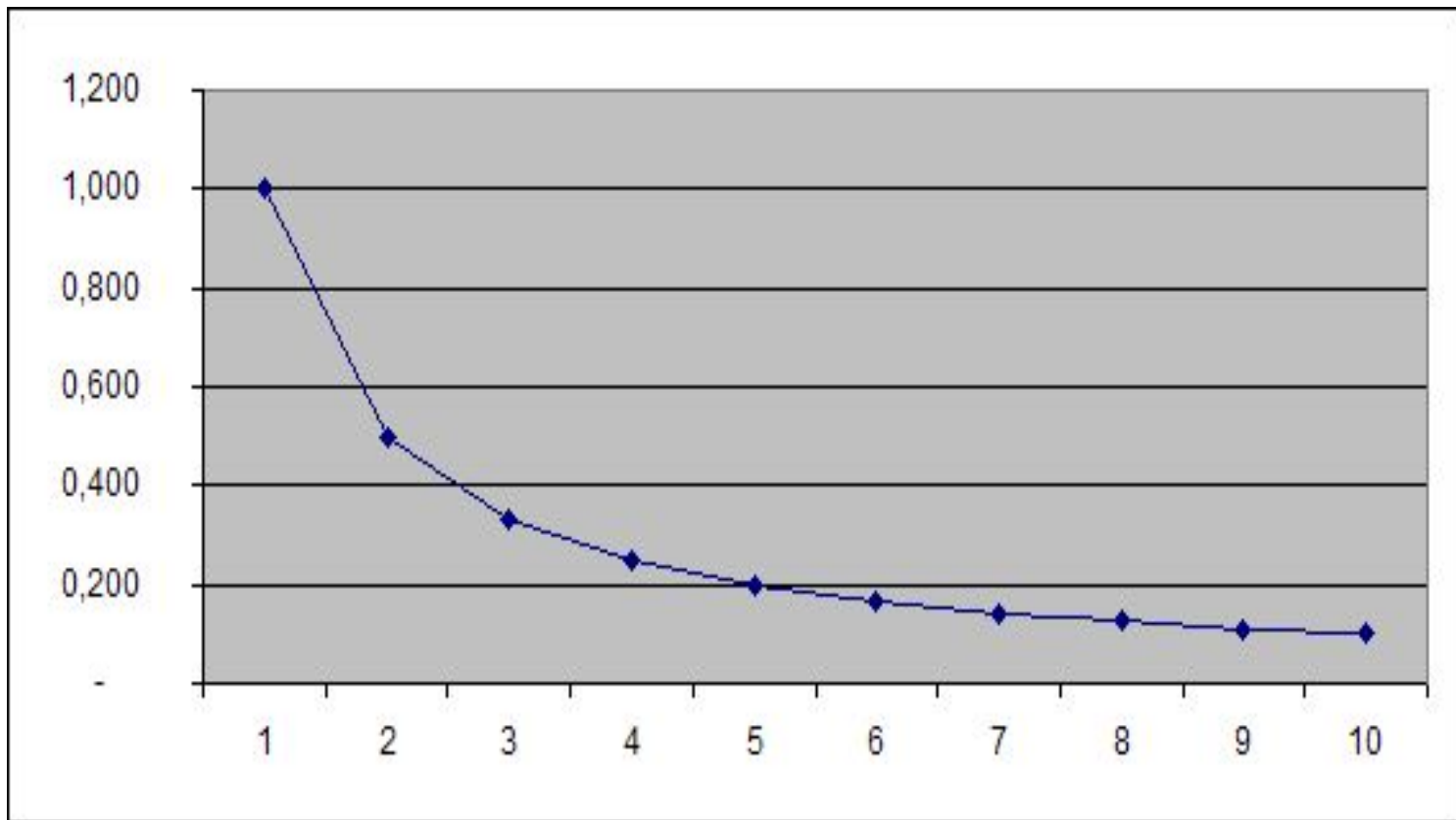
Функция  $y = \frac{n}{n+1}$



<b>n</b>	<b>y<sub>n</sub></b>
1	1,000
2	0,500
3	0,333
4	0,250
5	0,200
6	0,167
7	0,143
8	0,125
9	0,111
10	0,100

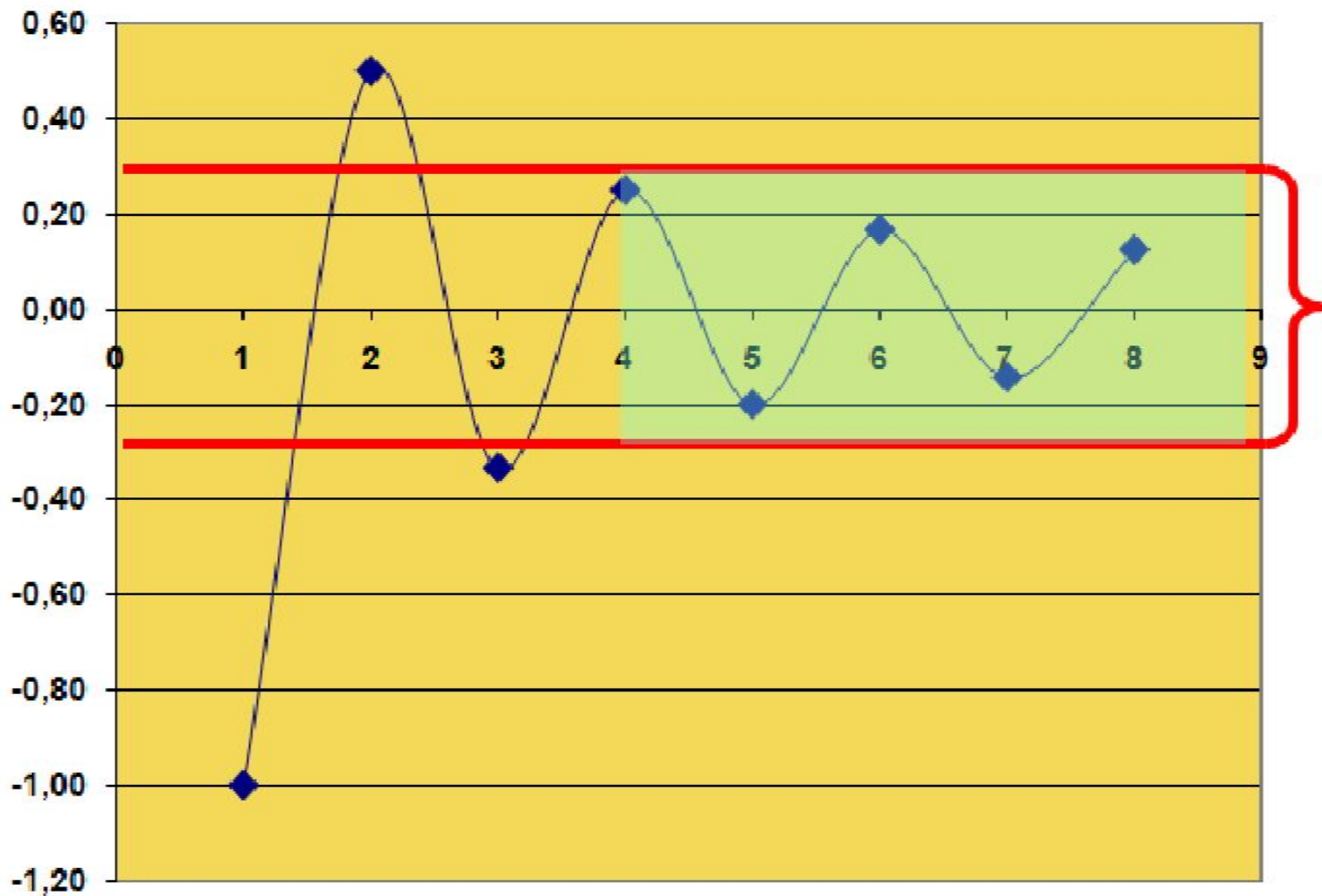
Функция

$$y = \frac{1}{n}$$





Последовательность, которая имеет предел, называется *сходящейся*, в обратном случае последовательность *расходится*.



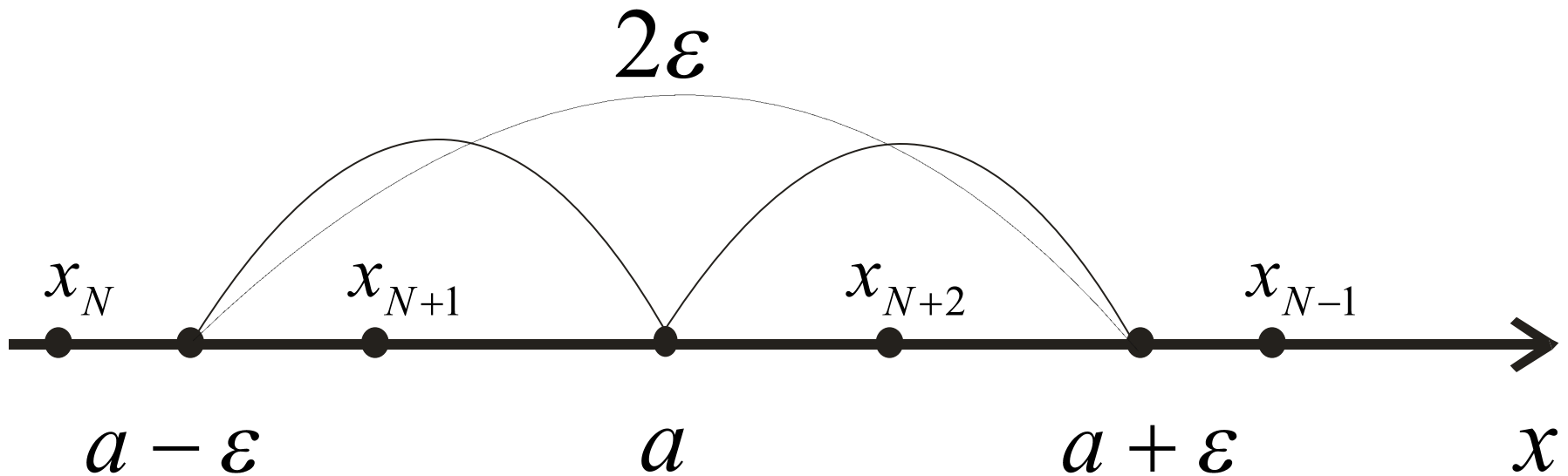
*Все члены последовательности, начиная с некоторого, окажутся в "коридоре"*

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Число  $a$  называется **пределом** **последовательности**  $x = \{x_n\}$ , если для произвольного заранее заданного сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  найдется такое натуральное число  $N$ , что при всех  $n > N$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

# Геометрически понятие предела числовой последовательности.



$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon;$$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Неравенство означает, что все элементы последовательности с номерами  $n > N$  должны лежать в интервале  $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ .

Постоянное число  $\mathbf{a}$  есть предел числовой последовательности  $\{x_n\}$ , если для любой малой окрестности с центром в точке  $\mathbf{a}$  радиуса  $\mathbf{\varepsilon}$  ( $\mathbf{\varepsilon}$  – окрестности точки  $\mathbf{a}$ ) найдется такой элемент последовательности с номером  $\mathbf{N}$ , что все последующие элементы с номерами  $\mathbf{n} > \mathbf{N}$  будут находиться внутри этой окрестности.

Последовательность **сходится**, если она имеет предел.

Доказать, что предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$

такой последовательности равен 1:

Воспользуемся определением предела.  
По виду последовательности  
можно сказать, что с ростом номера  $n$   
общий член последовательности  $x_n$   
приближается к единице,  
а разность  $|x_n - 1|$  приближается к нулю.



Покажем это строго.

Для произвольного числа  $\varepsilon > 0$  в

выберем  $N = \frac{1}{\varepsilon}$

Если номер  $n > N$ , тогда  $n > \frac{1}{\varepsilon}$

и это означает, что  $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Далее:  $|x_n - 1| = \left| 1 - \frac{1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

Тем самым, для произвольного числа  $\varepsilon > 0$  мы указали такой номер  $N$ , что для всех  $n > N$  выполняется

неравенство  $|x_n - 1| < \varepsilon$

Мы доказали, что единица есть предел рассматриваемой последовательности.

# **Теорема о единственности предела последовательности:**

Последовательность не может иметь больше одного предела.

Это следует из того, что последовательность не может одновременно приближаться к двум разным числам одновременно.

Формально, выберем  $\varepsilon$  значительно меньше разницы между числами  $a$  и  $b$ .

Тогда очевидно, что мы не сможем указать такого номера  $N$ , начиная с которого одновременно будут выполнены два условия:

$$\left| x_n - a \right| < \varepsilon \quad \left| x_n - b \right| < \varepsilon$$

## Теорема:

Если последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  сходятся, то сходится и их сумма  $\{a_n + b_n\}$  и, кроме того, предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

## Теорема:

Постоянную величину можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C \cdot a_n) = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

## Теорема:

Если последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  сходятся, то сходится и их произведение  $\{a_n \cdot b_n\}$  и, кроме того, предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

## Теорема:

Если последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$

сходятся, причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

Предел отношения равен отношению

пределов.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$



## *Признак существования предела.*

### **Теорема:**

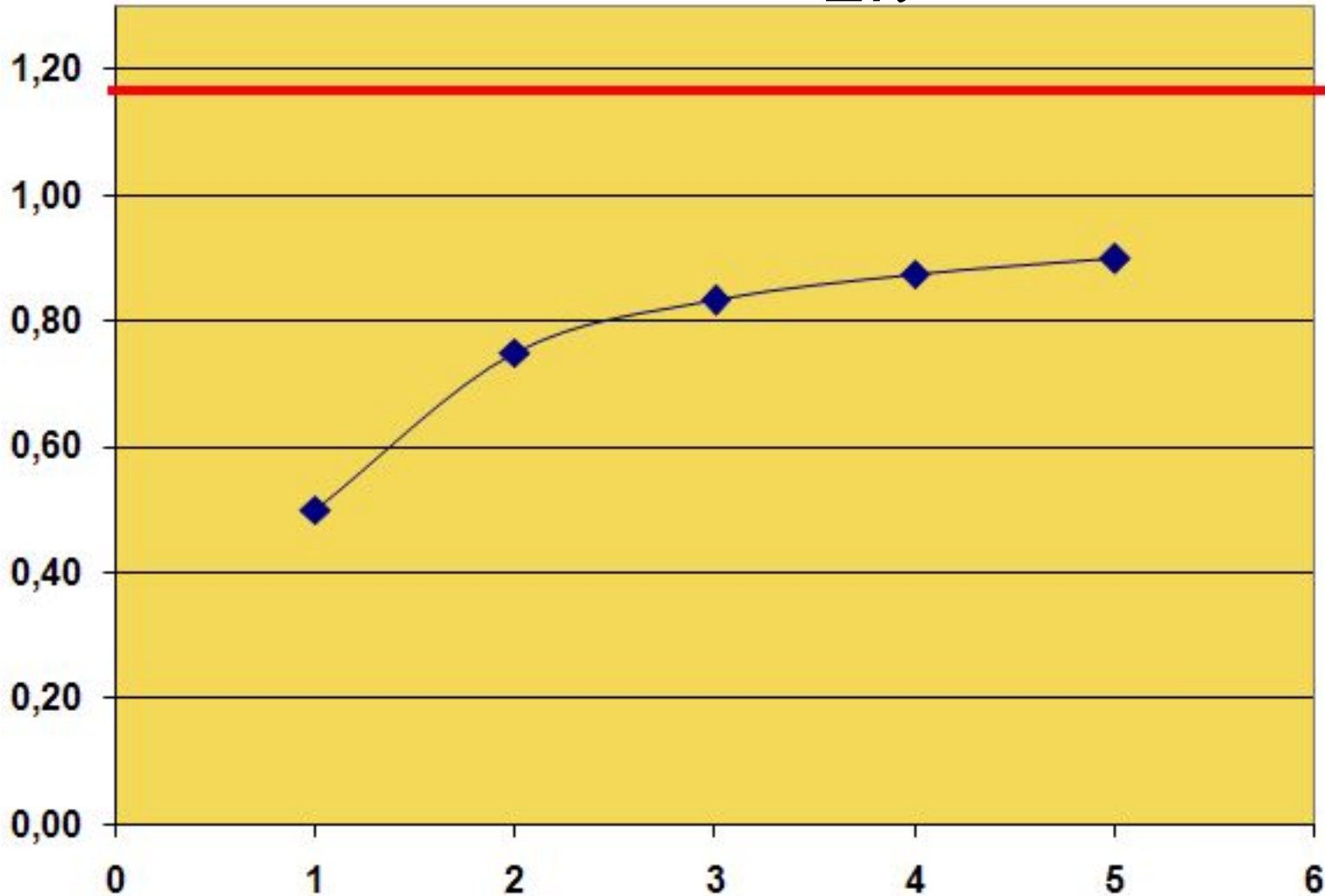
Если последовательность ограничена и монотонна, то она сходится.

Пример такой последовательности, которая ограничена, возрастает и потому имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2n} \right) = 1$$

Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

$$a_n = 1 - \frac{1}{2n}$$



## Теорема о двух милиционерах

**Теорема** (признак существования предела):

Если одна последовательность заключена между двумя другими, имеющими одинаковый предел, то она имеет тот же предел.

*Если  $a_n \leq b_n \leq c_n$  и выполняется условие :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$$

*Тогда предел последовательности  $b_n$  тоже  $A$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$$

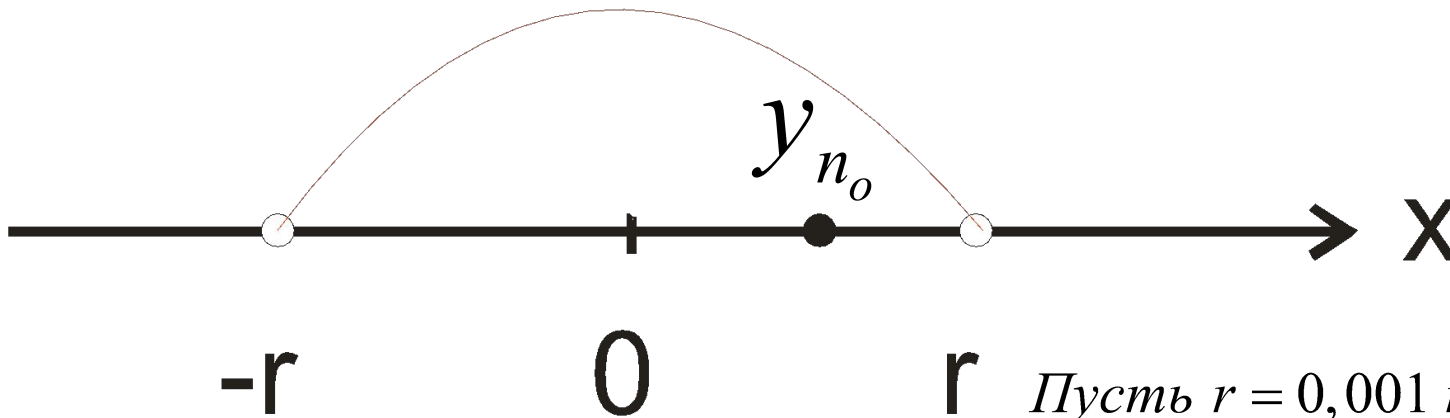
Название теоремы связано с такой ее интерпретацией. Если два милиционера ведут с двух сторон под руки подвыпившего гражданина и направляются в отделение, туда же придет и гражданин.

Дана последовательность

$$\{y_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$y_n = \frac{1}{n}.$$

Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$



Пусть  $r = 0,001$  то в качестве  
можно взять 1001

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

*Если  $|q| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e = 2,7182818284590\dots$$

## Ссылки на материалы из интернета:

- <http://bmcapital.blog.ru/?page=5>
- [http://forexaw.com/TERMs/Theory\\_of\\_market/I725\\_%D0%A4%D0%B8%D0%B1%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%87%D1%87%D0%B8\\_Fibonacci](http://forexaw.com/TERMs/Theory_of_market/I725_%D0%A4%D0%B8%D0%B1%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%87%D1%87%D0%B8_Fibonacci)
- <http://sceptic-ratio.narod.ru/rep/kn15.htm>
- <http://geana.hiblogger.net/tag/%F2%E2%EE%F0%E5%F6/>
- <http://www.skilpadde.ru/25-chisla-fibonachchi.html>
- <http://blog.i.ua/user/1577787/226447/>
- <http://best-mama.info/publ/pochemuchka/biolog/34>
- <http://kinder-online.ru/blog/lady-gaga-ili-njusha/page/2/>
- [http://klen20078.ya.ru/replies.xml?item\\_no=3858](http://klen20078.ya.ru/replies.xml?item_no=3858)
- <http://www.vlad-amelin.ru/stihi-o-zhizni/2256-zhizn-yeto-cep-sluchajnyx-chisel.html>
- <http://www.liveinternet.ru/users/daemaken/>