МОУ СОШ №5 – «Школа здоровья и развития» г. Радужный

Числовые последовательности

Автор: Елена Юрьевна Семёнова

pptcloud.r

Содержание

Понятие числовой последовательности

Рассмотрим ряд натуральных чисел N:

1, 2, 3, …, n – 1, n, п + 1, …

Функцию $y = f(x)$, $x \in N$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ или $\{y_n\}$.

Величина y_n называется общим членом последовательности.

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой формулой $y_n = f(n)$, позволяющей найти любой член последовательности по его номеру n; эта формула называется формулой общего члена.

Примеры числовых последовательностей

1, 2, 3, 4, 5, … – ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, … – ряд чётных чисел;

1, 4, 9, 16, 25, … – ряд квадратов натуральных чисел;

5, 10, 15, 20, … – ряд натуральных чисел, кратных 5;

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ... – ряд вида 1/n, где $n \in N$;

и т.д.

Способы задания последовательностей

1. Перечислением членов последовательности (словесно).
2. Заданием аналитической формулы.
3. Заданием рекуррентной формулы.

Пример ы:

1. Последовательность простых чисел:
   2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; …
2. Арифметическая прогрессия:
   $a_n = a_1 + (n – 1)d$
3. Геометрическая прогрессия:
   $b_{n + 1} = b_n \cdot q$

Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют ограниченной сверху, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ ограниченна сверху, если существует число М такое, что для любого п выполняется неравенство

$$y_n \leq M$$

Число М называют верхней границей последовательности.

Пример: $-1, -4, -9, -16, \ldots, -n^2, \ldots$ - ограничена сверху 0.

Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют ограниченной снизу, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ ограниченна снизу, если существует число m такое, что для любого п выполняется неравенство

$$y_п \geq m$$

Число m называют нижней границей последовательности.

Пример: 1, 4, 9, 16, …, $п^2$, … - ограничена снизу 1.

Если последовательность ограничена и сверху и снизу, то ее называют ограниченной последовательностью.

Возрастание и убывание числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют **возрастающей последовательностью**, если каждый ее член **больше** предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y4 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots$$

Пример: 1, 3, 5, 7, 9, 2п-1, … - возрастающая последовательность.

Последовательность $\{y_n\}$ называют **убывающей последовательностью**, если каждый ее член **меньше** предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y4 > \ldots > y_n > y_{n+1} > \ldots$$

Пример: 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/(2п–1), … - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности называют **монотонными**

Предел числовой последовательности

Рассмотрим числовую последовательность, общий член которой приближается к некоторому числу **a** при увеличении порядкового номера **n**. В этом случае говорят, что числовая последовательность имеет **предел**.

Это понятие имеет более строгое определение.

Число **a** называется пределом числовой последовательности $\{y_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N = N(\varepsilon)$, зависящее от ε, что $|u_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$

Предел числовой последовательности

Это определение означает, что a есть предел числовой последовательности, если её общий член неограниченно приближается к a при возрастании n. Геометрически это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число N, что начиная с $n > N$ все члены последовательности расположены внутри интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся; в противном случае – расходящейся.

Рассмотрим последовательность:

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$ – гармонический ряд

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Если $|q| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

Если $|q| > 1$, то последовательность $y_n = q^n$ расходится

Свойства пределов

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \text{õ}_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \text{ñ}$, то

1. предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\text{õ}_n + \text{ó}_n\right) = b + c$$

2. предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\text{õ}_n\,\text{ó}_n\right) = bc$$

3. предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\text{õ}_n}{\text{ó}_n}\right) = bc$$

4. постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}\left(k\text{õ}_n\right) = kb$$

Примеры:

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot0=0$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}+3\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}+\lim_{n\to\infty}3=0-0+3=3$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot\ldots\cdot0=0$$

4) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}\right)=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

Если $m \in N$, $k \in R$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n^m} = 0$$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

Приме

Дано: $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + \ldots = 9;$

$(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2 + (b_4)^2 + \ldots + (b_n)^2 + \ldots = 40{,}5.$

Найти: b_5.

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 9, \\[2ex] \dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5; \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = 9(1-q), \\[2ex] \dfrac{9^2(1-q)^2}{1-q^2} = 40{,}5. \end{cases}$$

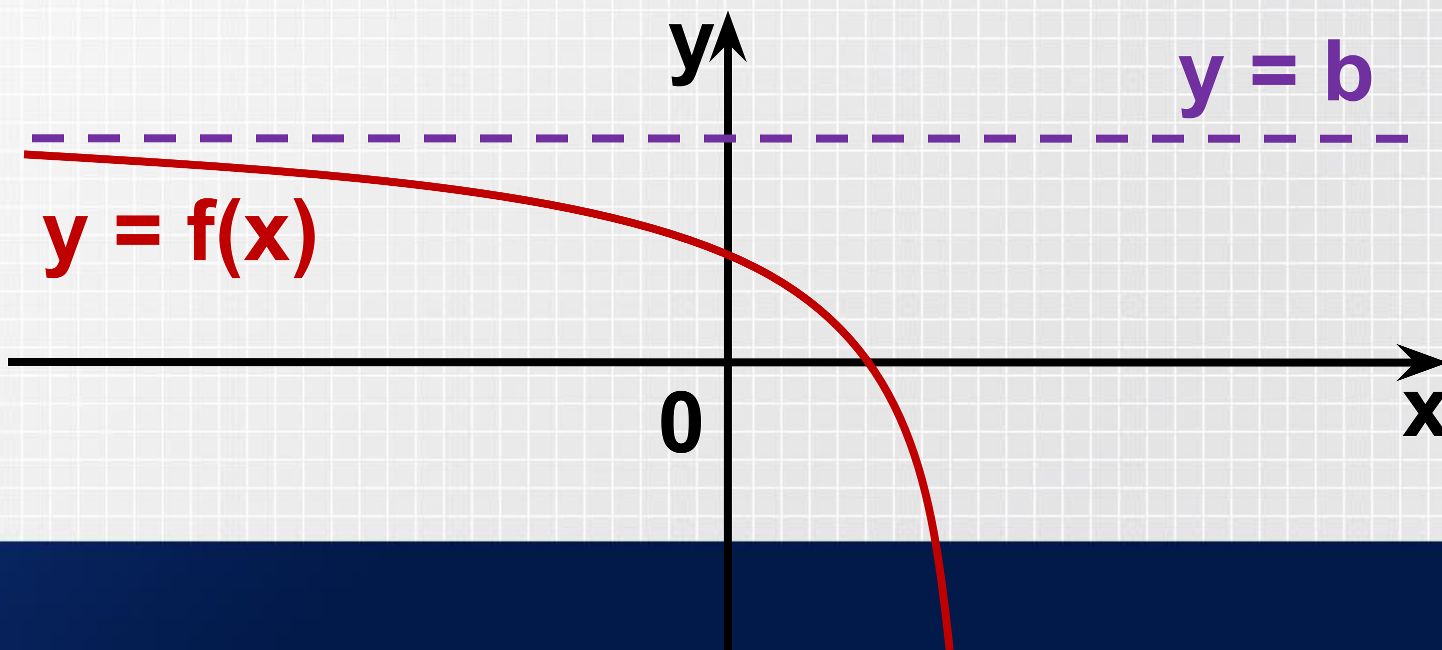
Ответ: $\begin{cases} b_1 = 6, \\ q = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Предел функции на бесконечности

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

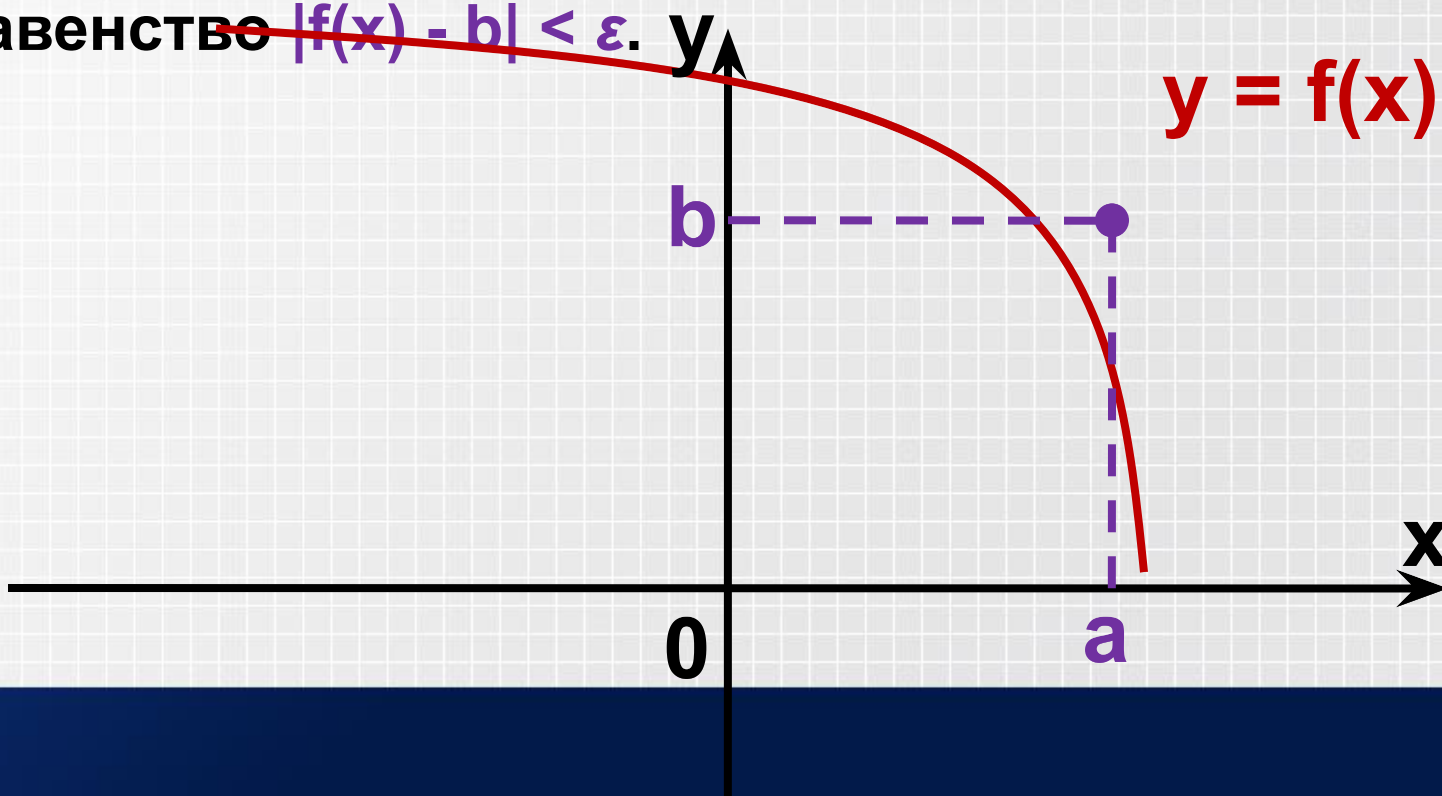
Будем говорить, что функция $f(x)$ стремится к пределу b при $x \to \infty$, если для произвольного малого положительного числа ε можно указать такое положительное число M, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

В этом случае прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.



Предел функции в точке $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \to a$, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$ из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.



Непрерывность функции в точке

Функцию y = f(x) называют непрерывной в точке
x = a, если выполняется условие

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Примеры:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\left(x^3-2x^2+5x+3\right)=1^3-2\cdot 1^2+5\cdot 1+3=7$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sin\pi x}{\sqrt{x}+4}=\frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2}+4}=\frac{0}{\sqrt{2}+4}=0$$

$$3)\ \lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{4x+12}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{4}=\frac{-3-3}{4}=-\frac{3}{2}$$