

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ (ПО ГЕЙНЕ)

Число A называется **пределом** функции

$$y = f(x)$$

в точке x_0 (при $x \rightarrow x_0$), если для любой последовательности допустимых

значений аргумента $x_n \in M$, $x_n \neq x_0$,

сходящейся к

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

(т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$), последовательность $f(x_n)$ $n \in N$

соответствующих значений функции $f(x_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$,
сходится к числу A , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ (ПО ГЕЙНЕ)

Пишут : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

То есть любая последовательность аргументов, сходящаяся к x_0 , ведёт соответствующую последовательность значений функции к A .

ПРИМЕР 1:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x}{x + 2} = -\frac{1}{2}, \text{ так как}$$

$$\forall \{x_n\}: x_n \rightarrow 2 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 3x_n}{x_n + 2} = \frac{2^2 - 3 \cdot 2}{2 + 2} = -\frac{1}{2}$$

ПРИМЕР 2:

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует.

Пояснения: возьмем две последовательности аргументов и покажем, что им соответствуют разные пределы последовательностей значений функции

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \rightarrow 0, \quad f(x_n) = \sin(2\pi n) \rightarrow 0;$$

$$x_n = \frac{2}{\pi(4n+1)} \rightarrow 0, \quad f(x_n) = \sin \frac{\pi(4n+1)}{2} =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \rightarrow 1$$

ПРИМЕР 3:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} 2^x$ не существует.

Пояснения: возьмем две последовательности аргументов и покажем, что им соответствуют разные пределы последовательностей значений функции

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0; \\ -2^x, & x < 0. \end{cases}$$

$$x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad f(x_n) = 2^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1;$$

$$y_n = -\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad f(y_n) = -2^{-\frac{1}{n}} \rightarrow -1$$

ЗАДАНИЯ:

1. Постройте график функции

$$f(x) = \frac{|x|}{x} 2^x$$

2. Найдите предел функции в точке, постройте график функции

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$$

ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

Если $f(x) \rightarrow A_1$ при $x \rightarrow a$ только при $x < a$, то $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$ - называется *пределом* функции $f(x)$ в точке $x = a$ *слева*, а если $f(x) \rightarrow A_2$ при $x \rightarrow a$ только при $x > a$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$ называется *пределом* функции $f(x)$ в точке $x = a$ *справа*.

Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x = a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также *односторонними пределами* функции $f(x)$ в точке.

ЗАДАНИЯ:

3. Указать односторонние пределы в заданиях 1 и 2.

РАСКРЫТИЕ

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ

1. Найти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 - x}$$

Решение: Имеем неопределенность типа $\left[\begin{smallmatrix} \infty \\ \infty \end{smallmatrix} \right]$.
Наивысшая степень многочлена в знаменателе – третья; вынося за скобки x^3 , получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{0 - 0 + 0}{2 + 0 - 0} = 0$$

Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ в отношении многочленов при $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_k(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_{k-1} x + a_k}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n} = \begin{cases} 0, & \text{а́ñëè } k < n \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{а́ñëè } k = n \\ \infty, & \text{а́ñëè } k > n. \end{cases}$$

- Если $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Идея решения: вынести в числителе и знаменателе за скобки старшую степень и сократим на неё дробь.

ЗАДАНИЕ: НАЙТИ ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x}$$

Найти

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 6}$$

Решение: Имеем неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$

Разложим числитель и знаменатель дроби на множители по формуле:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ где } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 4)}{(x - 2)(x + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 4}{x + 3} = \frac{2 + 4}{2 + 3} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Найти $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{5-\sqrt{5x+5}}$

Решение:

Для раскрытия неопределённости типа $\left[\frac{0}{0} \right]$, домножим числитель и знаменатель на выражение сопряжённое к знаменателю, получим:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{5-\sqrt{5x+5}} &= \left[\frac{0}{0} \right] \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(5+\sqrt{5x+5})}{(5-\sqrt{5x+5})(5+\sqrt{5x+5})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(5+\sqrt{5x+5})}{(5^2 - (\sqrt{5x+5})^2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(5+\sqrt{5x+5})}{(25-5x-5)} = \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(5+\sqrt{5x+5})}{-5(x-4)} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(5+\sqrt{5x+5})}{-5} = \frac{5+5}{-5} = -2\end{aligned}$$