ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение предела функции (по Гейне)

Число А называется ***пределом*** функции

$$y = f(x)$$

в точке x_0 (при $x \to x_0$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента x_n, $n \in N$, сходящейся к x_0 (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность $f(x_n)$ $n \in N$ соответствующих значений функции, сходится к числу А, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ (ПО ГЕЙНЕ)

Пишут : $$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

То есть <u>любая</u> последовательность аргументов, сходящаяся к x_0 , ведёт соответствующую последовательность значений функции к A.

ПРИМЕР 1:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x}{x+2}=-\frac{1}{2},\textit{так как}$$

$$\forall\{x_n\}: x_n\to 2\ \ \textit{при}\ n\to\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n{}^2-3x_n}{x_n+2}=\frac{2^2-3\cdot 2}{2+2}-\frac{1}{2}$$

ПРИМЕР 2:

$$\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$$ не существует.

Пояснения: возьмем две последовательности аргументов и покажем, что им соответствуют разные пределы последовательностей значений функции

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0, \quad f(x_n) = \sin(2\pi n) \to 0;$$

$$x_n = \frac{2}{\pi(4n+1)} \to 0, \quad f(x_n) = \sin\frac{\pi(4n+1)}{2} =$$

$$= \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) \to 1$$

ПРИМЕР 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}2^x$$ не существует.

Пояснения: возьмем две последовательности аргументов и покажем, что им соответствуют разные пределы последовательностей значений функции

$$f(x)=\begin{cases}2^x, x>0;\\ -2^x, x<0.\end{cases}$$

$$x_n=\frac{1}{n}\to 0,\ \ f(x_n)=2^{\frac{1}{n}}\to 1;$$

$$y_n=-\frac{1}{n}\to 0,\ \ f(y_n)=-2^{-\frac{1}{n}}\to -1$$

ЗАДАНИЯ:

1. Постройте график функции

$$f(x) = \frac{|x|}{x} 2^x$$

2. Найдите предел функции в точке, постройте график функции

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$$

ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ - называется *пределом* функции $f(x)$ в точке $x = a$ *слева*, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется *пределом* функции $f(x)$ в точке $x = a$ *справа*.

Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x = a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также *односторонними пределами* функции $f(x)$ в точке.

ЗАДАНИЯ:

3. Указать односторонние пределы в заданиях 1 и 2.

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ

1. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x+1}{2x^3+3x^2-x}$$

***Решение*:** Имеем неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Наивысшая степень многочлена в знаменателе – третья; вынося за скобки x^3, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{0-0+0}{2+0-0}=0$$

Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ в отношении многочленов при $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_k(x)}{Q_n(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}=\begin{cases}0,\ \text{åñëè}\ \ k<n\\ \dfrac{a_0}{b_0},\ \ \text{åñëè}\ \ k=n\\ \infty,\ \text{åñëè}\ \ k>n.\end{cases}$$

- Если $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Идея решения: вынести в числителе и знаменателе за скобки старшую степень и сократим на неё дробь.

ЗАДАНИЕ: НАЙТИ ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x}$$

Найти $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2+x-6}$

Решение: Имеем неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$

. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители по формуле:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x+3}=\frac{2+4}{2+3}=\frac{6}{5}$$

Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{5-\sqrt{5x+5}}$

***Решение*:**

Для раскрытия неопределённости типа $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, домножим числитель и знаменатель на выражение сопряжённое к знаменателю, получим:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{5-\sqrt{5x+5}}=\left[\frac{0}{0}\right]\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(5+\sqrt{5x+5})}{(5-\sqrt{5x+5})(5+\sqrt{5x+5})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(5+\sqrt{5x+5})}{(5^2-\left(\sqrt{5x+5}\right)^2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(5+\sqrt{5x+5})}{(25-5x-5)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(5+\sqrt{5x+5})}{-5(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{(5+\sqrt{5x+5})}{-5}=\frac{5+5}{-5}=-2$$