ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ И В ТОЧКЕ

Понятие предела функции *y=f(x)* связано с понятием предела числовой последовательности

$$a_n = f(n)$$

У числовой последовательности переменная *n*, возрастая, принимает только целые значения, а у функции переменная *x* может принимать любые значения.

Число А называется пределом функции y=f(x), при x стремящемся к бесконечности, если для любого, сколь угодно малого числа ε>0, найдется такое положительное число S, что при всех |x|>S, выполняется неравенство:

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

смысл определения:

При достаточно больших по модулю значениях x, значения функции f(x) очень мало отличаются от числа A (меньше, чем на число ε , каким бы малым оно не было).

Рассмотрим геометрический смысл этого определения.

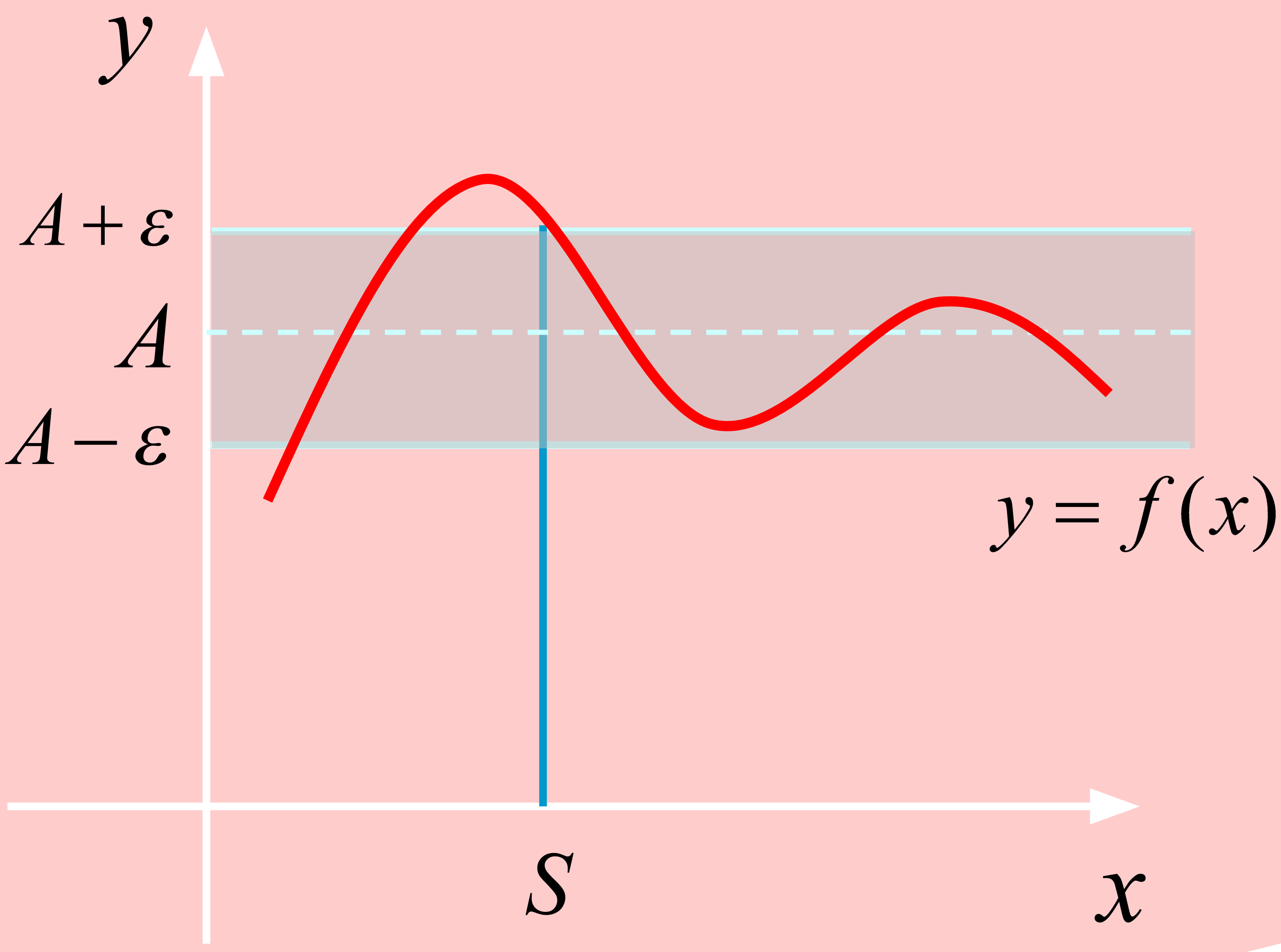
Неравенство

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$$

равносильно двойному неравенству

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

что соответствует расположению части графика *y=f(x)* в полосе шириной *2ε*.



y
$A+\varepsilon$
A
$A-\varepsilon$
$y=f(x)$
S
x

Т.е. число *A* есть предел функции

$$y = f(x)$$

если для любого, сколь угодно малого числа *ε>0*, найдется такое число *S*, что при всех

$$|x| < S$$

соответствующие ординаты графика функции *y=f(x)* будут заключены в полосе

$$A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$$

какой бы узкой она не была.

Пример.

Доказать, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x+1}{x} = 5$$

Решение.

Для любого *ε>0* $\left|\left(\frac{5x+1}{x}\right)-5\right|<\varepsilon \Rightarrow$

$$\left|5+\frac{1}{x}-5\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \Rightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}$$

Т.е. для любого *ε* >0 существует число $S=\frac{1}{\varepsilon}>0$

Такое, что для всех *x*, таких что |*x*|>*S*, выполняется неравенство:

$$|f(x)-5|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+1}{x}=5$$

Замечание 1.

Рассмотренное определение предела при x стремящемся к бесконечности предполагает неограниченное возрастание x по абсолютной величине.

Можно сформулировать понятие предела при стремлении x к бесконечности любого знака, т. е. при

$$x \to +\infty$$

$$x \to -\infty$$

В случае, когда $x \to +\infty$ неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

должно выполняться при всех *x* таких, что *x*>*s*.

В случае, когда $x \to -\infty$ неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

должно выполняться при всех *x* таких, что *x*<-*s*.

Перейдем к понятию предела функции в точке. Рассмотрим некоторую функцию *y=f(x)*. Пусть эта функция задана в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой этой точки.

Число А называется пределом функции $y=f(x)$, при $x \to x_0$, (или в точке x_0) если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$, найдется такое положительное число δ, что при всех $|x-x_0|< \delta$, выполняется неравенство:

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

смысл определения:

При всех значениях x, достаточно близких к x_0, значения функции y=f(x) очень мало отличаются по абсолютной величине от числа A (меньше, чем на число ε, каким бы малым оно не было).

Неравенство $$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$$

равносильно двойному неравенству

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

Аналогично неравенство $\left|x-x_0\right|<\delta$

равносильно неравенству $x_0-\delta<x<x_0+\delta$

Это соответствует расположению части графика

$$y=f(x)$$

в полосе шириной 2ε и попаданию точки x в δ - окрестность точки x_0.

Т.е. число A есть предел функции $y = f(x)$

при $x \to x_0$, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$

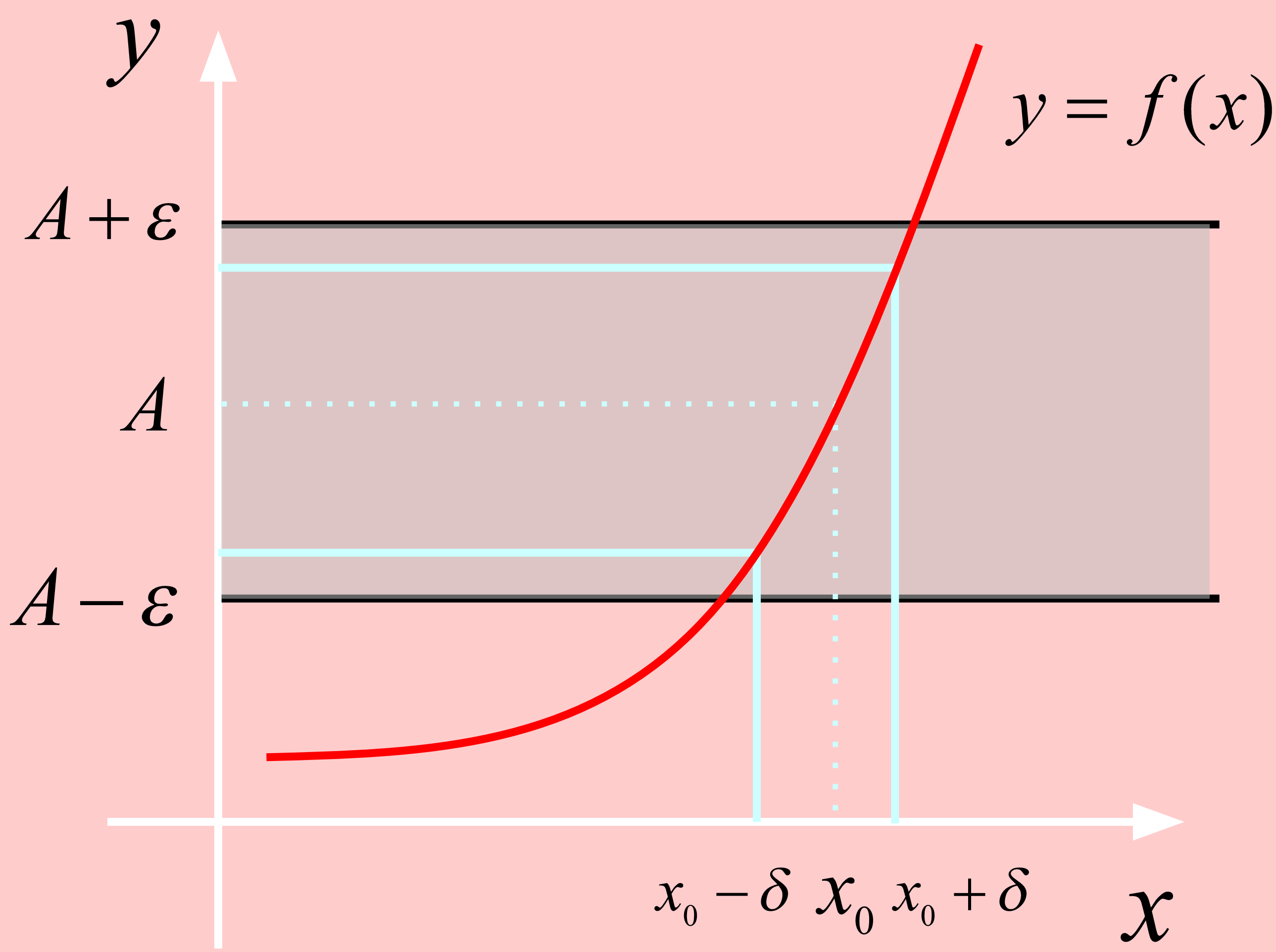
найдется такая δ–окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности соответствующие ординаты графика функции

$$y = f(x)$$

будут заключены в полосе

$$A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$$

какой бы узкой она не была.



y
$y = f(x)$
$A + \varepsilon$
A
$A - \varepsilon$
$x_0 - \delta$
x_0
$x_0 + \delta$
x

Пример.

Доказать, что

$$\lim_{x \to 1}(2x+3) = 5$$

Решение.

Пусть *ε=0.1*

Тогда неравенство $|2x+3-5|<0.1$

будет выполняться при $|x-1|<0.05$

Аналогично, при *ε=0.01*

Неравенство будет выполняться при

$$|x-1|<0.005$$

Т.е. для любого *ε* >0 неравенство $|2x+3-5|<\varepsilon$

выполняется при

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Т.е. для любого *ε* >0 существует число $\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$

что для всех x, таких что $|x-1|<\delta$, выполняется неравенство:

$$|f(x)-5|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(2x+3)=5$$

Замечание 2.

Определение предела не требует существования функции в самой точке x_0, т. к. рассматриваются значения функции в некоторой окрестности точки x_0.

Т.е. рассматривая предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

мы предполагаем, что $x \to x_0$

но не достигает значения x_0.

Замечание 3.

Если при $x \to x_0$

переменная х принимает значения только меньше x_0 ***или, наоборот, больше*** x_0***, и при этом функция f(x) стремится к некоторому числу А, то говорят об односторонних пределах соответственно справа и слева:***

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \qquad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$$

Определение этих пределов будет аналогично рассмотренному выше при $x \to x_0$

Вместо значений *x*, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta$$

рассматриваются такие *x*, что $x_0 - \delta < x < x_0$

при $x \to x_0 - 0$

и значения *x*, такие что $x_0 < x < x_0 + \delta$

при $x \to x_0 + 0$

Если пределы функции *f(x)* слева и справа одинаковы и равны *A*, то существует общий предел этой функции, также равный *A*:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$