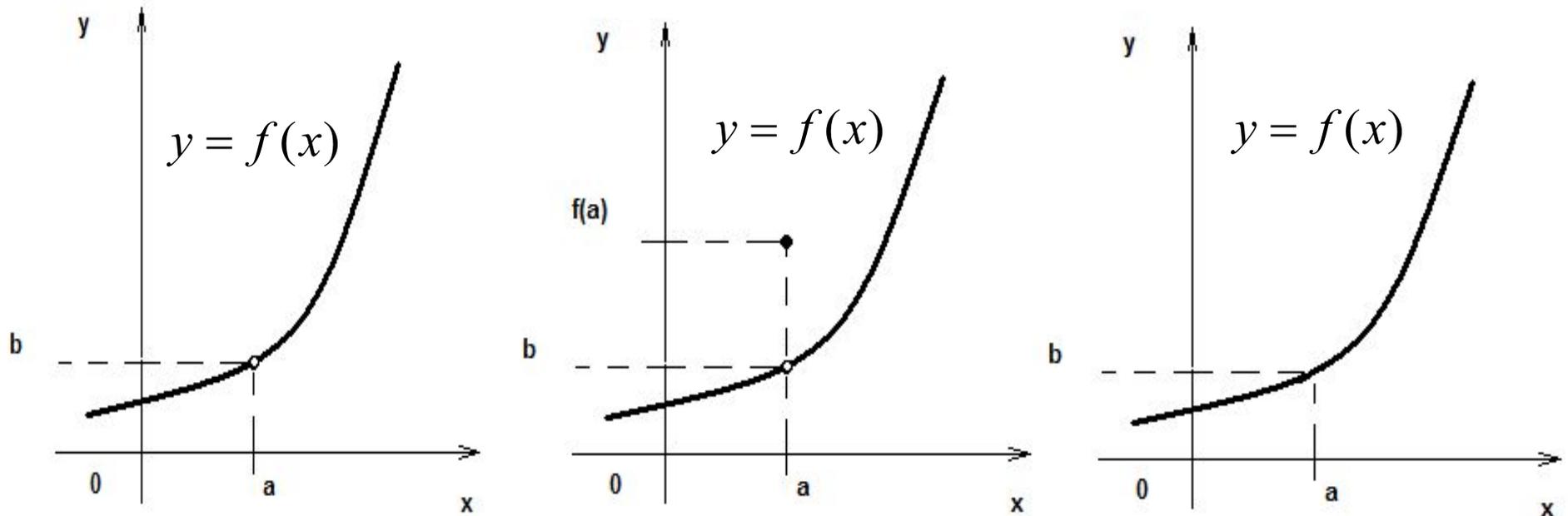




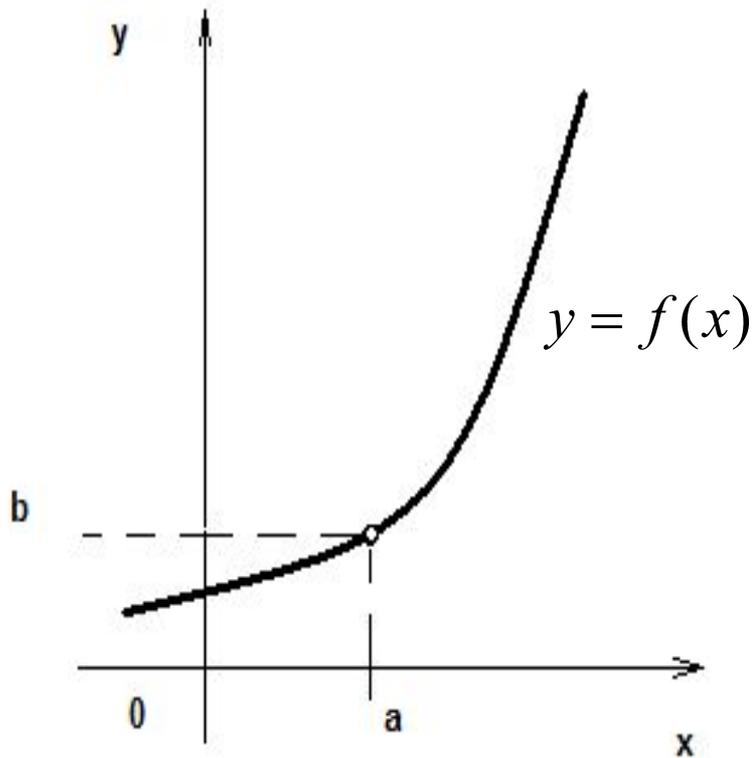
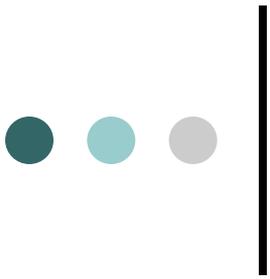
Предел функции в точке

Рассмотрим функции, графики которых изображены на следующих рисунках:

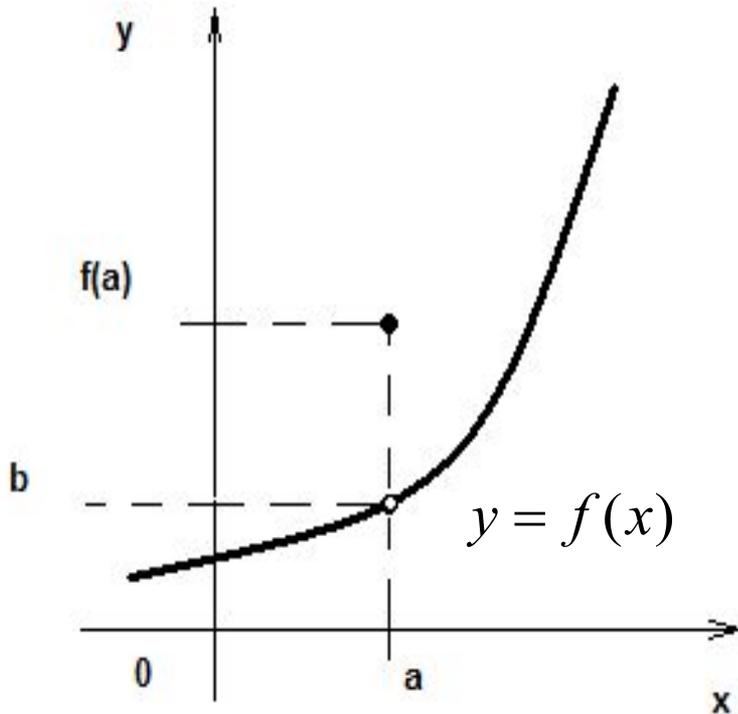
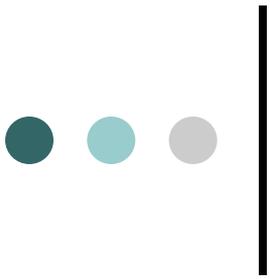


Во всех трех случаях изображена одна и та же кривая, но все же изображают они три разные функции, отличающиеся друг от друга своим поведением в точке $x = a$.

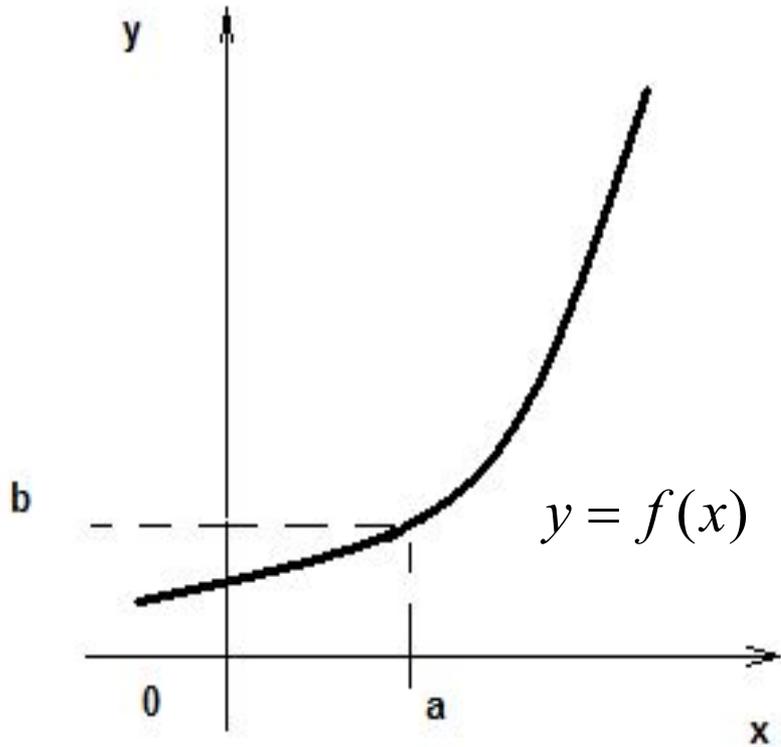
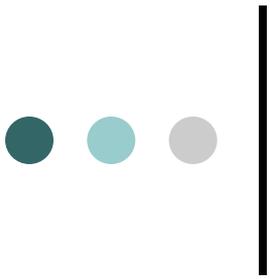
Рассмотрим каждый из этих графиков подробнее:



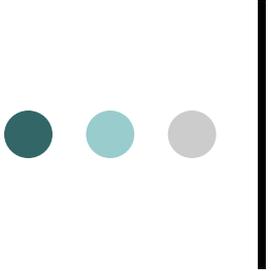
Для функции $y = f(x)$,
график которой изображен на
этом рисунке, значение $f(a)$
не существует, функция
в указанной точке не
определена.



Для функции $y = f(x)$ график которой изображен на этом рисунке, значение $f(a)$ существует, но оно отличное от, казалось бы, естественного значения b , точка (a, b) как бы выколота.



Для функции $y = f(x)$,
график которой изображен на
этом рисунке, значение $f(a)$
существует и оно вполне
естественное.



Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

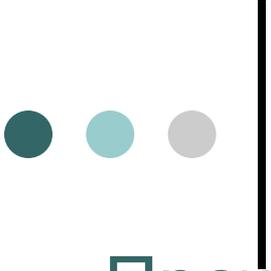
которую читают: «предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b ».

Содержательный смысл этой фразы следующий: *если значения аргумента выбирать все ближе и ближе к значению $x = a$, то значения функции все меньше и меньше отличаются от предельного значения b .*

Или можно сказать так: в достаточно малой окрестности точки a справедливо приближенное равенство:

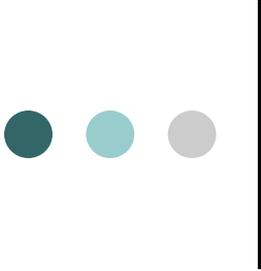
$$f(x) \approx a$$

При этом сама точка $x = a$ исключается из рассмотрения.



Прежде чем перейти к разбору решений примеров заметим, что если предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке $x = a$, то в таком случае функцию называют *непрерывной*.

График такой функции представляет собой сплошную линию, без «проколов» и «скачков».

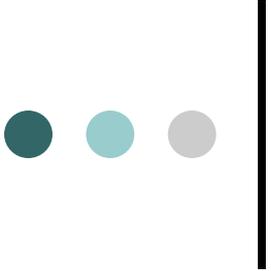


Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной на промежутке** X , если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Примерами непрерывных функций на всей числовой прямой являются: $y = C$, $y = kx + b$, $y = ax^2 + by + c$,

$y = |x|$, $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0, +\infty)$, а функция $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ непрерывна на промежутках $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. А функции $y = \operatorname{tg}x$, $y = \operatorname{ctg}x$ непрерывны на каждом промежутке из области их определения.



Математики доказали утверждение,
которое мы будем использовать при
вычислении пределов функции в точке:

Если выражение $f(x)$ составлено из
рациональных, иррациональных,
тригонометрических выражений, то функция
 $y = f(x)$ непрерывна в любой точке, в любой
точке, в которой определено выражение $f(x)$.

Примеры

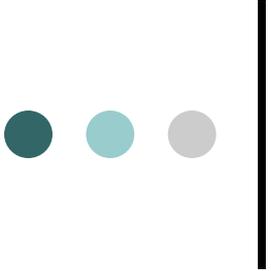
Вычислить:

$$а) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5); \quad б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{2\pi}{x}}{3x - 1}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3}.$$

Решение.

Выражение $(x^2 - 3x + 5)$ определено в любой точке x , в частности, в точке $x = 1$. Следовательно, функция $y = x^2 - 3x + 5$ непрерывна в точке $x = 1$, а потому предел функции при стремлении x к 1 равен значению функции в точке $x = 1$.

$$\text{Имеем: } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = 3.$$



б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{2\pi}{x}}{3x-1}$.

Решение.

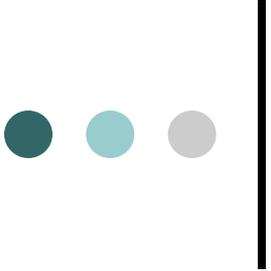
Выражение $f(x) = \frac{\cos \frac{2\pi}{x}}{3x-1}$ определено в любой точке x ,

за исключением $x = 0$ и $x = \frac{1}{3}$. В частности, в точке $x = 2$

функция определена. Следовательно, функция $f(x) = \frac{\cos \frac{2\pi}{x}}{3x-1}$

непрерывна в точке $x = 2$, а потому предел функции при стремлении x к 2 равен значению функции в точке $x = 2$.

Имеем:
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{2\pi}{x}}{3x-1} = \frac{\cos \pi}{3 \cdot 2 - 1} = \frac{-1}{5} = -0,2.$$



в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

Решение.

Выражение $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$ не определено в точке $x = 3$,

поскольку при подстановке этого значения переменной в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0, а на 0 делить нельзя.

Однако, заданную алгебраическую дробь можно сократить

$$\frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \frac{x(x - 3)}{x - 3} = x.$$

Значит, функции $y = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$ и $y = x$ тождественны при условии $x \neq 3$. Но при вычислении предела функции при $x \rightarrow 3$ саму точку $x = 3$ можно исключить из рассмотрения (об этом

говорилось выше). Поэтому: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x = 3$.



Первый замечательный предел

В математике есть пределы, вычисление которых довольно громоздко, поэтому некоторые пределы берут как табличные.

Рассмотрим один из таких пределов.

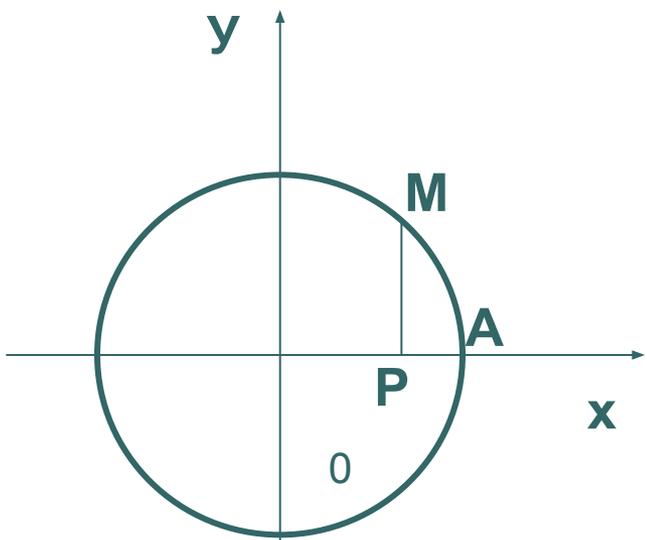
Возьмем числовую окружность, выберем достаточно малое $t > 0$, отметим на окружности точку $M(t)$ и её ординату, т. е. $\sin t$, t - это длина дуги AM , $\sin t$, - это длина перпендикуляра MP .

Для достаточно малых значений t выполняется равенство $AM = MP$, т. е. $\sin t \approx t$, и, следовательно, $\frac{\sin t}{t} \approx 1$.

Например, $\frac{\sin 1}{1} \approx 0,84147$;

$$\frac{\sin 0,1}{0,1} \approx 0,99833; \quad \frac{\sin 0,01}{0,01} \approx 0,99998.$$

Так вот, в математике доказано, что $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.





Практические задания

Выполни из предлагаемого задачника следующие упражнения:

678; 679(а, б);

680(а, б); 681(б, г);

682 (а, б); 683(а, б);

684(а, б); 686.