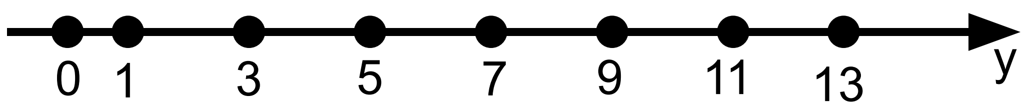
Предел последовательности и предел функции

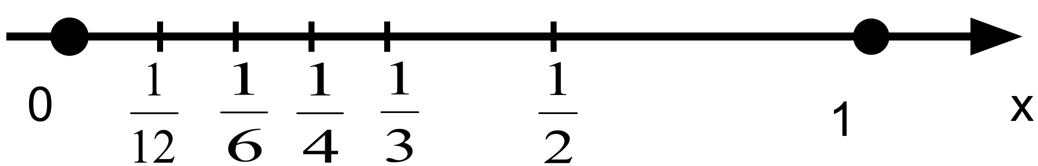
Предел последовательности

Рассмотрим две числовые последовательности (y_n) и (x_n) и изобразим их члены точками на координатной прямой.

(y_n): 1, 3, 5, 7, 9,…, 2n – 1,…;



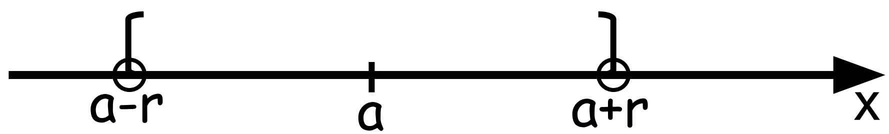
(x_n): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$



Обрати внимание, что члены последовательности (x_n) как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности (y_n) такой точки нет. В подобных случаях говорят, что последовательность (x_n) сходится, а последовательность (y_n) расходится.

Чтобы узнать является ли конкретная точка, взятая на прямой, «точкой сгущения» для членов заданной последовательности, введем следующее понятие.

Определение 1. Пусть a – точка прямой, а r – положительное число. Интервал $(a-r; a+r)$ называют окрестностью точки a, а число r – радиусом окрестности.



Пример. $(3{,}97; 4{,}03)$ – *окрестность точки 4, радиус равен 0,03.*

В математике «точку сгущения» для членов заданной последовательности принято называть «пределом последовательности».

Определение 2. Число b называют пределом последовательности (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Обозначение: 1. $y_n \to b$ (y_n стремится к b или y_n сходится к b);

2. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ (предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b)

Примеры

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$;

2. Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$;

   Если $|q| > 1$, то последовательность q^n расходится.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = 2$.

Обсудим результаты, полученные в примерах с геометрической точки зрения. Для этого построим графики последовательностей:

$$y_n = \frac{1}{n},$$

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$y_n = \frac{2n}{n+1}.$$

$$y_n = \frac{1}{n}$$

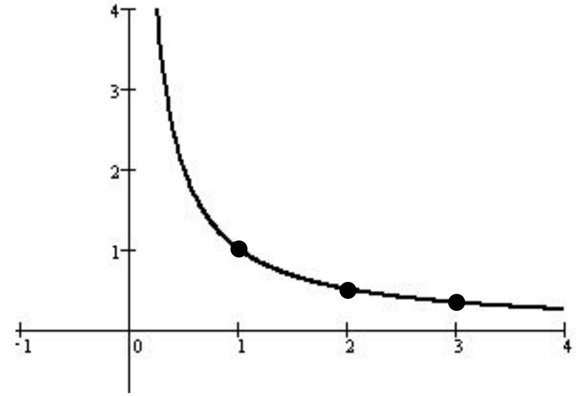


Рис. 1

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

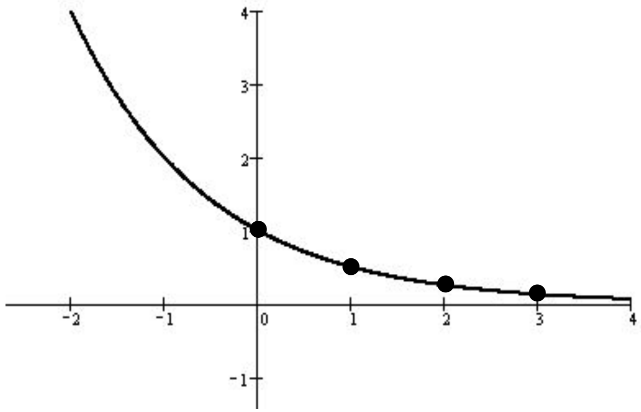


Рис. 2

$$y_n = \frac{2n}{n+1}$$

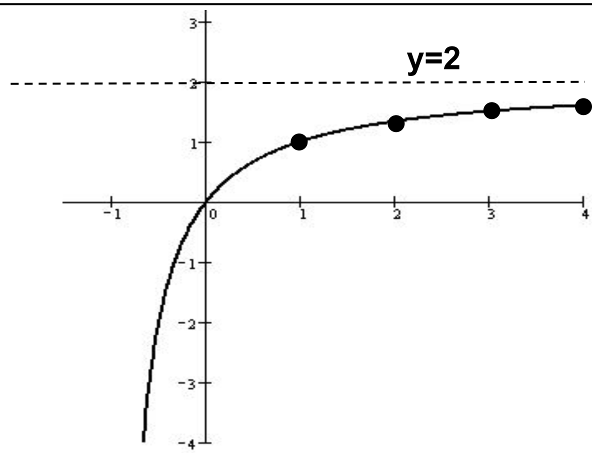


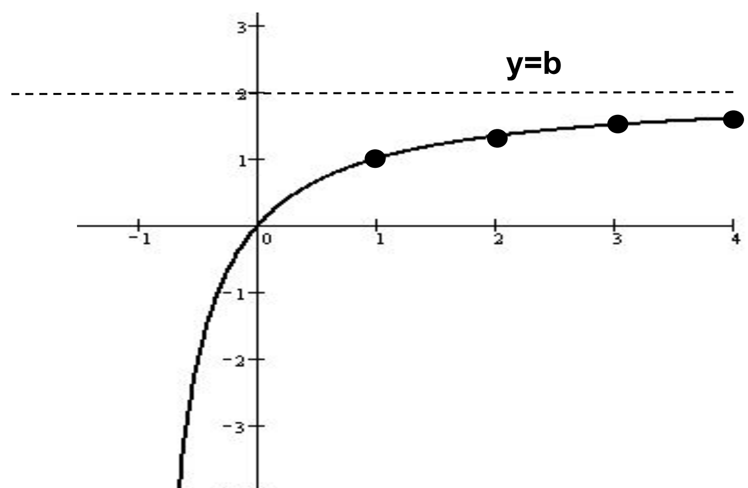
Рис. 3

Обрати внимание, что на всех трех рисунках точки графика, по мере их ухода вправо, все ближе и ближе подходят к некоторой горизонтальной прямой:

- на рис 1 – к прямой $y=0$,
- на рис 2 – к прямой $y=0$,
- на рис 3 – к прямой $y=2$.

Каждую из этих прямых называют *горизонтальной асимптотой* графика.

Вообще равенство $\lim_{n\to\infty} f(n) = b$ означает, что прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика последовательности, $y_n = f(n)$ т.е. графика функции $y = f(x),\ x \in N.$



Свойства сходящихся последовательностей

Свойство 1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

Свойство 2. Если последовательность сходится, то она ограничена, обратное неверно.

Свойство 3. Если последовательность монотонна и ограниченна, то она сходится.

Вычисление пределов последовательности

I. Предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} C = C$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

II. Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = b + a$$

Пример.

III. Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \to \infty}(x_n \cdot y_n) = b \cdot a$$

Пример.

IV. Предел частного равен частному от пределов (при условиях, что $y_n \neq 0, \ \forall n, a \neq 0$:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{b}{a}$$

Пример.

V. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} kx_n = kb$$

Пример.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$

Вычислим суммы двух, трех и т.д. членов прогрессии:

$$S_1 = b_1;$$

$$S_2 = b_1 + b_2;$$

$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3;$$

$$\dots$$

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n;$$

$$\dots$$

Получилась последовательность

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

Она может сходиться или расходиться. Если последовательность S_n сходится к пределу S, то число S называется суммой геометрической прогрессии. Если расходится, то о сумме геометрической прогрессии не говорят.

Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии следующая:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Теорема. Если знаменатель q геометрической прогрессии (b_n) удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, то сумма S прогрессии вычисляется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Пример.

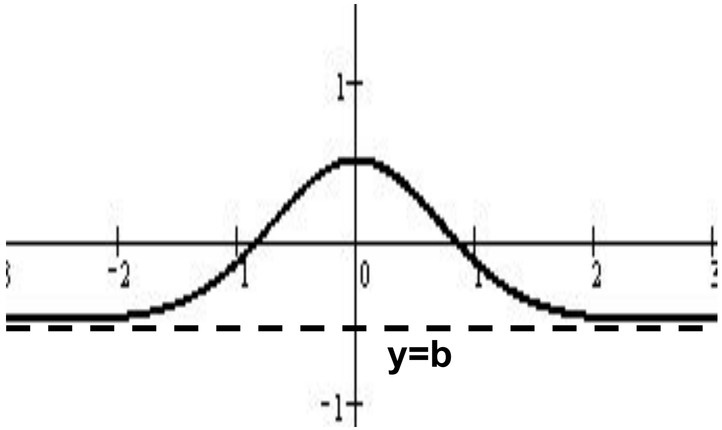
Предел функции

1. Предел функции на бесконечности.
2. Предел функции в точке.

Предел функции на бесконечности

Пусть дана функция $y = f(x)$,
в области определения
которой содержится отрезок
$(-\infty; +\infty)$, и пусть прямая $y = b$
Является горизонтальной
асимптотой графика функции
тогда $y = f(x)$,

$\lim\limits_{x \to \frac{+\infty}{-\infty}} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b.$



Вычисление предела функции на бесконечности

1. Для $\forall m \in N$ и $\forall k$ справедливо соотношение

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{k}{x^m}\right) = 0$$

2. Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b,\ \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = a$,то

а) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) = b + a$$

б) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x)) = b\cdot a$$

в) предел частного равен частному от пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{b}{a}$$

г) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to\infty} kf(x)=kb$$

Пример.

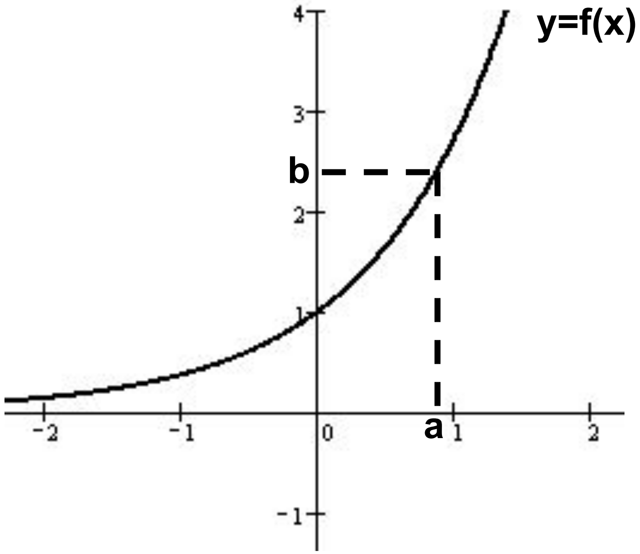
Предел функции в точке

Пусть дана функция $y = f(x)$ и пусть дана точка $x = a$.

Пусть значение функции в этой точке существует и равно b, тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

(читают: предел функции $y = f(x)$, при стремлении x к a равен b)



Пример.

Проверь себя!

Дорогой друг, теперь тебе предстоит проверить свои знания. Для этого нужно ответить на тест, который состоит из 10 вопросов, К каждому вопросу дается на выбор три ответа, один из которых верный.

Желаю удачи!

1. Окрестность какой точки является интервал (2,1; 2,3)?

а) 2;

б) 2,15;

в) 2,2.

Неверно!

[Попробуй еще!]

Верно!

Дальше!

2. Интервал (7; 5) окрестность точки 6, чему равен радиус этой окрестности?

а) 2;

б) 1;

в) 1,5.

Неверно!

Попробуй еще!

Верно!

Дальше!

3. Последовательность $y_n = \dfrac{1}{2n}$ **является:**

а) сходящейся;

б) расходящейся;

в) ничего определенного сказать нельзя.

Неверно!

[Попробуй еще!]

Верно!

Дальше!

4. Число b называют пределом последовательности (y_n), если:

а) в любой окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера;

б) в любой окрес тности точки b содержатся некоторые члены последовательности, начиная с некоторого номера;

в) в любой окрестности точки b не содержатся члены последовательности.

Неверно!

Попробуй еще!

Верно!

Дальше!

5. Равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = b$ означает, что прямая $y = b$ является для графика $y_n = f(n)$:

а) горизонтальной асимптотой;

б) вертикальной асимптотой;

в) наклонной асимптотой.

Неверно!

Попробуй еще!

Верно!

Дальше!

6. Какое из утверждений верно?

а) если последовательность имеет предел, то она монотонна;

б) если последовательность не монотонна, то она не имеет предела;

в) если последовательность ограничена, то она имеет предел.

Неверно!

Попробуй еще!

Верно!

Дальше!

7. Предел последовательности $y_n = \dfrac{(2n+1)(n-3)}{n^2}$ равен:

а) 0;

б) 1;

в) 2.

Неверно!

Попробуй еще!

Верно!

Дальше!

8. Сумма геометрической прогрессии

$27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots$ **равна:**

а) 40;

б) 41;

в) 40,5.

Неверно!

[Попробуй еще!]

Верно!

Дальше!

9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x+9}{6x-1}$:

а) 0;

б) $1\frac{1}{6}$;

в) $2\frac{1}{6}$.

Неверно!

<u>**Попробуй еще!**</u>

Верно!

Дальше!

10. Найти $\lim_{x \to 1}(x^2 - 3x + 5):$

а) 1;

б) 3;

в) 2.

Неверно!

[Попробуй еще!]

Верно!

Дальше!

Конец

Пример. Найти предел последовательности

$$y_n = \frac{1}{n} + 3.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+3\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}3 = 0+3=3$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2-1}$.

Решение. Делим числитель и знаменатель дроби почленно на наивысшую из имеющихся степень переменной *n*, т.е. на n^2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{2+0}{1-0}=\frac{2}{1}=2$$

Пример. Найти предел последовательности

$$y_n = \frac{1}{n^2}$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\cdot 0 = 0$$

Пример. Найти предел последовательности

$$y_n = \frac{5}{n}.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(5\cdot\frac{1}{n}\right) = 5\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 5\cdot 0 = 0$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{4x + 12}$.

Решение.

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \to -3} \frac{x - 3}{4} = \frac{-3 - 3}{4} = -1{,}5.$$

Ответ: -1,5.

Дано (yn)= $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Решение. Возьмем любую окрестность точки 0, с радиусом r. Подберем натуральное число n_0 так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{n} < r$

Если например, r=0,001, то в качестве n_0 можно взять 1001; если $r = \frac{3}{5774}$, то n_0=5774.

Член данной последовательности с номером n_0 попадает в выбранную окрестность точки 0. В этой же окрестности будут находиться все последующие члены, тогда по определению 2 следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Пример. Найти сумму геометрической прогрессии $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

Решение. Здесь $b_1 = 4,\ q = \frac{1}{2}.$ Так как знаменатель прогрессии удовлетворяет неравенству $|q| < 1,$, то воспользовавшись формулой $S = \frac{b_1}{1-q}$, получим

$$S = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

Ответ: $S = 8.$

Если $|q|<1$ **, то** $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

Пусть $q=\dfrac{1}{2}$, получим $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dots, \left(\dfrac{1}{2}\right)^n, \dots$

По аналогии с первым примером, здесь последовательность сходится к 0, значит

.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Если $|q|<1$ **, то последовательность** q^n **расходится.**

Пусть $q=2$, получим $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n, \dots$ Эта последовательность явно не имеет предела, значит она расходится.

Дана последовательность $\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \dots, \frac{2n}{n+1}, \dots$

найти ее предел.

Выполним некоторые преобразования выражения $\frac{2n}{n+1}$:

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2-2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{2}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}$$

Это значит, в частности, что $\frac{2}{2} = 2 - \frac{2}{1+1}$; $\frac{4}{3} = 2 - \frac{2}{2+1}$; $\frac{6}{4} = 2 - \frac{2}{3+1}$; $\frac{8}{5} = 2 - \frac{2}{4+1}$ и т. д.,

Данную последовательность перепишем так:

$$2-\frac{2}{2},\ 2-\frac{2}{3},\ 2-\frac{2}{4},\ 2-\frac{2}{5}, \dots, 2-\frac{2}{n+1}, \dots$$

Видно, что «точкой сгущения» является 2, значит

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = 2$$

Рассмотрим пример.

Дана последовательность $(x_n)=1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots, 1, 2, 3, \ldots$. Эта последовательность ограничена, но не является сходящейся.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{x^2 4}\right)$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{4}{x^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x^2}}=\frac{2+0}{1-0}=\frac{2}{1}=2$$

твет: 2.