

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

Математика

10 класс



Последовательность

Определение 1.

Функцию вида $y = f(x)$, $x \in \mathbb{N}$ называют **функцией натурального аргумента** или **числовой последовательностью** и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$, или (y_n) .

(a_n) – последовательность

$a_1 ; a_2 ; a_3 ; \dots ; a_n$ – члены последовательности

Первый
член послед.

n-ый
член послед.



Способы задания числовой последовательности

1. Словесный способ.

Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.

Пример 1. Последовательность простых чисел:

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,... .

Пример 2. Произвольный набор чисел:

1,4,12,25,26,33,39,... .

Пример 3. Последовательность четных чисел:

2,4,6,8,10,12,14,16,... .



Способы задания числовой последовательности

2. Аналитический способ.

Любой n -й элемент последовательности можно определить с помощью формулы.

Пример 1. Последовательность четных чисел: $y = 2n$.

Пример 2. Последовательность квадратов натуральных чисел:
 $y = n^2$.

Пример 3. Стационарная последовательность: $y = C$
 $C, C, C, C, \dots, C, \dots$

Пример 4. Последовательность $y = n^2 - 3n$
 $-2, -2, 0, 4, 10, \dots$

Пример 5. Последовательность $y = 2^n$
 $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$



Способы задания числовой последовательности

3. Рекуррентный способ.

Указывается правило, позволяющее вычислить n -й элемент последовательности, если известен ее предыдущий элемент.

Пример 1. $a_1 = 3$ $a_{n+1} = a_n^2$

$a_1 = 3$	$a_3 = 9^2 = 81$
$a_2 = 3^2 = 9$	$a_4 = 81^2 = 6561$

Пример 2. Арифметическая прогрессия $a_{n+1} = a_n + d$,
 d - разность арифметической прогрессии.

Пример 3. Геометрическая прогрессия $b_{n+1} = b_n q$,
 q — знаменатель геометрической прогрессии.



Примеры последовательностей.

Продолжите ряд: 1, 10, 3, 9, 5, 8, 7, 7, 9, 6...

Ответ: Ряд состоит из двух частей: числа на нечетных местах: 1, 3, 5, 7, 9...; числа на четных местах: 10, 9, 8, 7

Продолжите ряд 77, 49, 36, 18...

Ответ: Перемножаются две цифры, входящие в предыдущее число



Числа Фибоначчи.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610..

Элементы числовой последовательности, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.



Леонардо Фибоначчи - итальянский математик.

(родился около 1170 — умер после 1228),

Последовательность Фибоначчи рекуррентно задать легко, а аналитически — трудно.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Определение 2.

Последовательность (y_n) , называют **ограниченной сверху**, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность (y_n) **ограничена сверху**, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \leq M$. Число M называют **верхней границей последовательности**.

Например: $-1, -4, -9, -16, \dots, -n^2, \dots$

Верхняя граница - -1



Определение 3.

Последовательность (y_n) , называют **ограниченной снизу**, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Последовательность (y_n) **ограничена снизу**, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geq m$. Число m называют **верхней границей последовательности**.

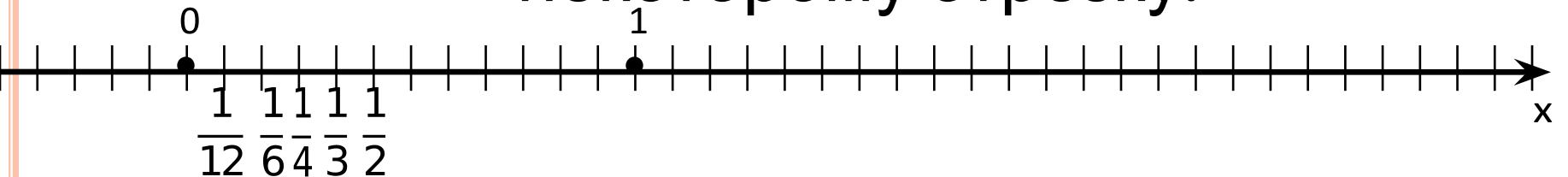
Например: $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$

Нижняя граница - 1



Если последовательность ограничена и снизу и сверху, то ее **называют ограниченной последовательностью**.

Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности принадлежат некоторому отрезку.



$$y_n = \frac{1}{n} - \text{ограниченная последовательность}$$

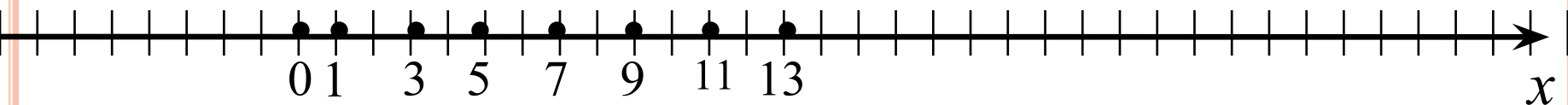
$$y_n \in [0; 1]$$





Члены последовательности (y_n) как бы «сгущаются» около точки 0. Говорят последовательность (y_n) *сходится*.

$$y_n = 2n - 1$$



У последовательности (y_n) такой «точки сгущения» нет. Говорят последовательность (y_n) *расходится*.



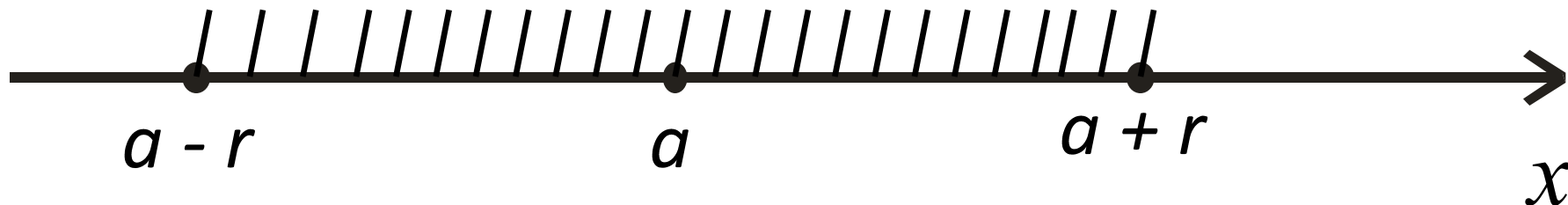
Определение 6.

Число b называют **пределом последовательности** (y_n) , если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

$$y_n \rightarrow b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

Читают: *предел последовательности (y_n) при стремлении n к бесконечности равен b или предел последовательности (y_n) равен b .*

Понятие предела числовой последовательности геометрически



«окрестность»:

интервал $(a - r; a + r)$ называется **окрестностью точки a** , а число r – **радиусом окрестности**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0; \quad |q| < 1$$

Если $|q| > 1$, то последовательность $y_n = q^n$ расходится.

Предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$$



Свойства сходящихся последовательностей.

Свойство 1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

Свойство 2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Свойство 3. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.
(теорема Вейерштрасса).



«ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ».

▣ Теорема

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$, то

предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = b + c ;$$

предел произведения равен произведению

пределов: $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = bc ;$

предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{b}{c} , c \neq 0 ;$$

постоянный множитель можно вынести

за знак предела: $\lim_{n \rightarrow \infty} (kx_n) = kc .$

$n \rightarrow \infty$



ВНИМАНИЕ!

Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k^n}{n^m} \right) = 0$$

