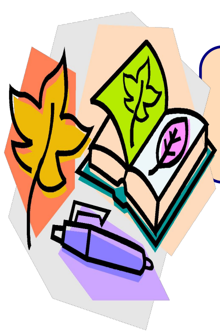
# Предел последовательности.

**10 класс**

# Последовательность

**Определение 1.**

Функцию вида $y = f(x)$, $x \in N$ называют **функцией натурального аргумента** или **числовой последовательностью** и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots,$ или $(y_n)$.

**$(a_n)$ – последовательность**

**$a_1$ ; $a_2$ ; $a_3$ ;…. $a_n$ - члены последовательности**

Первый член послед.

n-ый член послед.

# Способы задания числовой последовательности

## *1. Словесный способ.*

***Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.***

*Пример 1.* **Последовательность простых чисел: 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,… .**

*Пример 2.* **Произвольный набор чисел:**

**1,4,12,25,26,33,39,… .**

*Пример 3.* **Последовательность четных чисел: 2,4,6,8,10,12,14,16,… .**

# Способы задания числовой последовательности

## 2. *Аналитический способ.*

***Любой n-й элемент последовательности можно определить с помощью формулы.***

*Пример 1.* **Последовательность четных чисел: $y = 2n$.**

*Пример 2.* **Последовательность квадратов натуральных чисел:**

**$y = n^2$.**

*Пример 3.* **Стационарная последовательность: $y = C$**

**$C, C, C, C, \ldots, C, \ldots$**

*Пример 4.* **Последовательность $y = n^2 - 3n$**

**$-2, -2, 0, 4, 10, \ldots$**

*Пример 5.* **Последовательность $y = 2^n$**

**$2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$**

# Способы задания числовой последовательности

***3. Рекуррентный способ.***

***Указывается правило, позволяющее вычислить n-й элемент последовательности, если известен ее предыдущий элемент.***

*Пример 1.* $a_1 = 3$ $\quad a_{n+1} = a_n^2$

$a_1 = 3$ $\quad a_3 = 9^2 = 81$

$a_2 = 3^2 = 9$ $\quad a_4 = 81^2 = 6561$

*Пример 2.* Арифметическая прогрессия $a_{n+1} = a_n + d$,

$d$ - разность арифметической прогрессии.

*Пример 3. Геометрическая* прогрессия $b_{n+1} = b_n q$,

$q$ – знаменатель геометрической прогрессии.

# Примеры последовательностей.

Продолжите ряд: 1, 10, 3, 9, 5, 8, 7, 7, 9, 6…

Ответ: Ряд состоит из двух частей: числа на нечетных местах: 1, 3, 5, 7, 9...; числа на четных местах: 10, 9, 8, 7

Продолжите ряд 77, 49, 36, 18…

Ответ: Перемножаются две цифры, входящие в предыдущее число

# Числа Фибоначчи.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610...

Элементы числовой последовательности, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.

Леонардо Фибоначчи - итальянский математик.
(родился около 1170 — умер после 1228),

Последовательность Фибоначчи рекуррентно задать легко, а аналитически – трудно.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

## **Определение 2.**

Последовательность *($y_n$),* называют ***ограниченной сверху***, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность ($y_n$) ***ограничена сверху***, если существует число *M* такое, что для любого *n* выполняется неравенство $y_n \le M$. Число *M* называют ***верхней границей последовательности***.

*Например*: -1, -4, -9, -16,…, $-n^2$ ,…

Верхняя граница - -1

**Определение 3.**

Последовательность $(y_n)$, называют **ограниченной снизу**, если все ее члены не меньше некоторого числа.

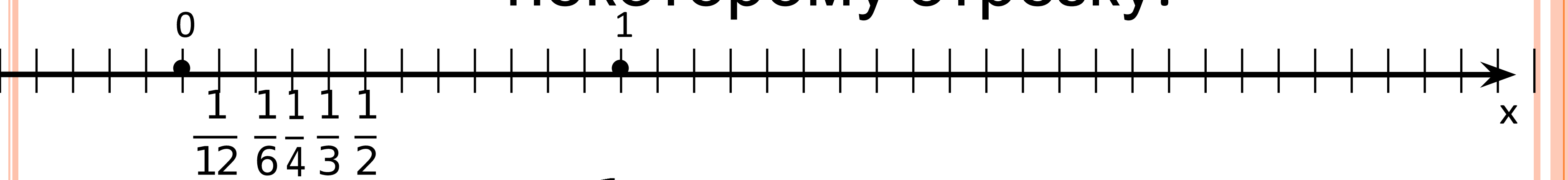
Последовательность $(y_n)$ **ограничена снизу**, если существует число $m$ такое, что для любого $n$ выполняется неравенство $y_n \geq m$. Число $m$ называют **верхней границей последовательности**.

*Например*: 1, 4, 9, 16,…,$n^2$,…

Нижняя граница - 1

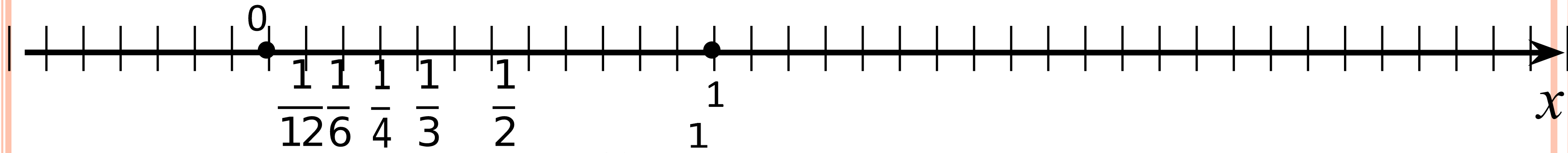
Если последовательность ограничена и снизу и сверху, то ее ***называют ограниченной последовательностью***.

Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности принадлежат некоторому отрезку.




$y_n = \frac{1}{\square}$ - ограниченная последовательность

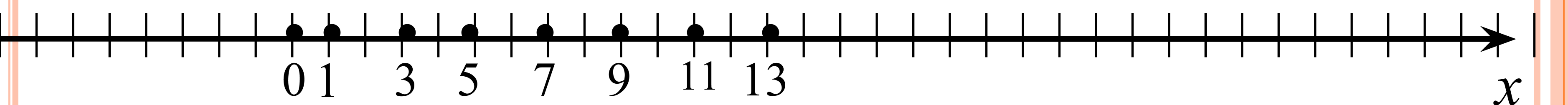
$y_n \in [0;1]$




$y_n = \frac{1}{\square}$ - ограниченная последовательность

Члены последовательности ($y_n$) как бы «сгущаются» около точки 0. Говорят последовательность *($y_n$)* *сходится*.

$y_n = 2n - 1$




У последовательности ($y_n$) такой «точки сгущения» нет. Говорят последовательность *($y_n$)* *расходится*.

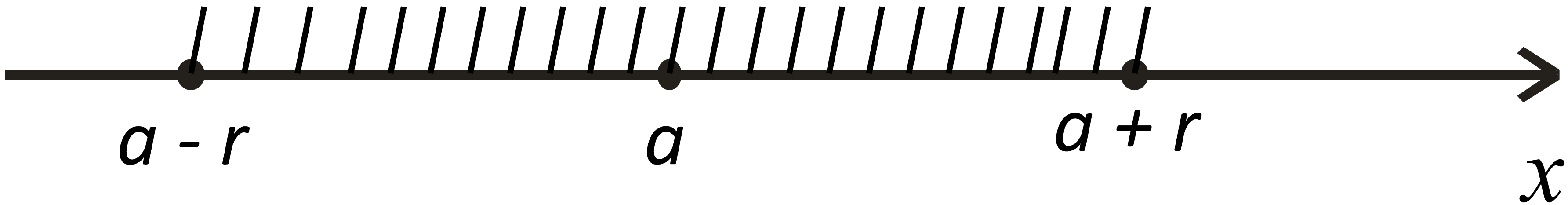
Определение 6.

Число *b* называют **предела последовательности** $(y_n)$, если в любой заранее выбранной окрестности точки *b* содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

$$y_n \to b \qquad \lim_{n \to \infty} y_n = b$$

Читают: *предел последовательности $(y_n)$ при стремлении n к бесконечности равен b или предел последовательности $(y_n)$ равен b.*

# Понятие предела числовой последовательности геометрически




«окрестность»:

интервал (*a – r; a + r* ) называется **окрестностью точки *a***, а число ***r* – радиусом окрестности**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\ \lim_{n\to\infty}q^n=0;\ |q|<1$$

*Если |q| > 1, то последовательность* $y_n = q^n$ *расходится.*

*Предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности*

$$\lim_{n\to\infty} C = C$$

## Свойства сходящихся последовательностей.

***Свойство 1.*** *Если последовательность сходится, то только к одному пределу.*

***Свойство 2.*** *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

***Свойство 3.*** *Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.* ( теорема Вейерштрасса).

# «ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ».

- ***<u>Теорема</u>***

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$ *,то*

***предел суммы*** *равен сумме пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = b + c;$$

***предел произведения*** *равен произведению пределов:* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = bc;$

***предел частного*** *равен частному пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c},\ c \neq 0;$$

***постоянный множитель*** *можно вынести за знак предела:* $\lim\limits_{n\to\infty}(kx_n) = kc$ .

# Внимание!

**Для любого натурального показателя *m* и любого коэффициента *k* справедливо соотношение.**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\square}{\square^{\square}}\right) = 0$$