Математический анализ

Составитель: Никулина Л.С.,
старший преподаватель кафедры
Математики и Моделирования

Введение

Назначение курса

Математический анализ является фундаментальной дисциплиной, составляющей основу математического образования. Курс предназначен для ознакомления студентов с основными понятиями математического анализа и их применением к решению задач. В курсе излагаются традиционные классические методы математического анализа

Цели преподавания дисциплины

Развитие интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению;

Обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования технических и других задач.

Задачи преподавания

На примерах продемонстрировать студентам сущность математических методов, научить приемам исследования и решения математически формализованных простейших задач, привить навыки самостоятельной работы с математической литературой.

Литература

Основная литература:

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа, т. 1, 2.- М.: высшая школа, 1981

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1987.

Н. С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1, 2. - М.: Наука, 1984.

Литература

Дополнительная литература:

Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики.-М.: Наука, 1978.

Учебно-методические разработки:

Л. Я. Дубинина, Л. С. Никулина, И. В. Пивоварова. Курс лекций по высшей математике, ч. 1, 2.-Владивосток, изд. ВГУЭиС, 2001.

Сборник задач по высшей математике. Сост. И. В. Пивоварова, Л. Я. Дубинина, Л. С. Никулина. -Владивосток, изд. ВГУЭиС, 2002.

Контроль

Виды контроля: В процессе обучения студенты должны выполнить 2 контрольных работы, 3 ИДЗ и сдать теорию. Кроме того, студенты должны пройти промежуточную аттестацию. ***Итоговая аттестация предусмотрена в виде экзамена (компьютерное тестирование).***

Аттестации

Способы проведения промежуточных аттестаций, способ проведения итоговой аттестации и условия получения на ней положительной оценки.

Для получения положительной оценки на экзамене студент должен выполнить все контрольные работы, выполнить и защитить все ИДЗ, проявлять активность на занятиях и регулярно выполнять все домашние задания.

Пределы и непрерывность

1. Определение предела функции.
2. Односторонние пределы.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие.
4. Теоремы о пределах.
5. Некоторые признаки существования предела.
6. Замечательные пределы.
7. Непрерывность.
8. Свойства непрерывных функций.

Лекция 1

Пределы функций

Определение функции

Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y=f(x) \in У$, где X и Y -данные числовые множества, и при этом каждому элементу $y \in У$ поставлен в соответствие хотя бы один элемент $x \in X$, то y ***называется функцией от x, определенной на множестве X.***

Обратная функция

Пусть между элементами множеств X и Y функция $y=f(x)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие, то есть $\forall x \in X$ соответствует один и только один его образ $y=f(x) \in Y$ и обратно, для $\forall$ y $\in Y$ найдется единственный прообраз $x \in X$ такой, что $f(x) = y$. Тогда функция $x = f^{-1}(y)$,где y $\in Y$, устанавливающая соответствие между элементами множеств Y и X, называется ***обратной*** для функции $y = f(x)$.

Определение окрестности

Окрестностью О (а) точки *а* называется любой интервал $\alpha < x < \beta$, окружающий эту точку, из которого, как правило, удалена сама точка *а*.

Под ***окрестностью О(∞)*** символа бесконечность понимается внешность любого отрезка $[\alpha,\beta]$, то есть $O(\infty) = (-\infty,\alpha) \cup (\beta,+\infty)$.

Определение предельной точки

δ-окрестностью точки a называется интервал $(a-\delta, a+\delta)$, не содержащий точку a, т.е. $O(a, \delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X, кроме быть может точки a.

Точку а мы будем называть предельной точкой множества Х,

если в любой δ -окрестности точки *а* содержится бесконечно много точек $x \in X$, то есть $O(a) \cap X \neq \varnothing$ для $\forall\ O(a)$.

Определение предела

Число A называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in X$, удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$, следует неравенство

$|f(x) - A| < \varepsilon$.

Другое определение предела

Говорят, что число А является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для $\forall\ \varepsilon > 0$ существует δ-окрестность точки a $O(a,\delta) = \{x |\ 0 < |x-a| < \delta\}$,где $\delta = \delta(\varepsilon)$, такая, что для $\forall\ x \in O(a, \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

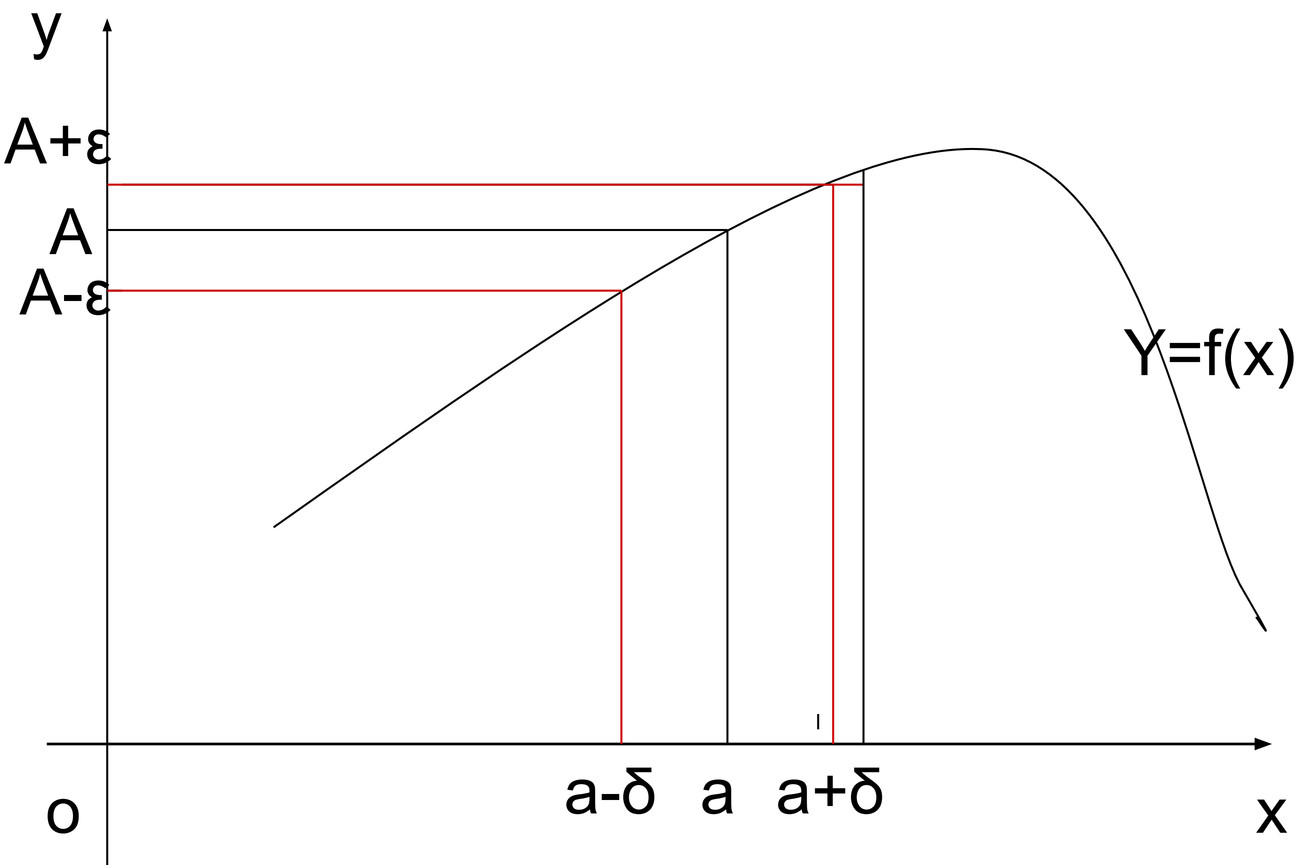
При этом пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Утверждение $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ эквивалентно следующему:

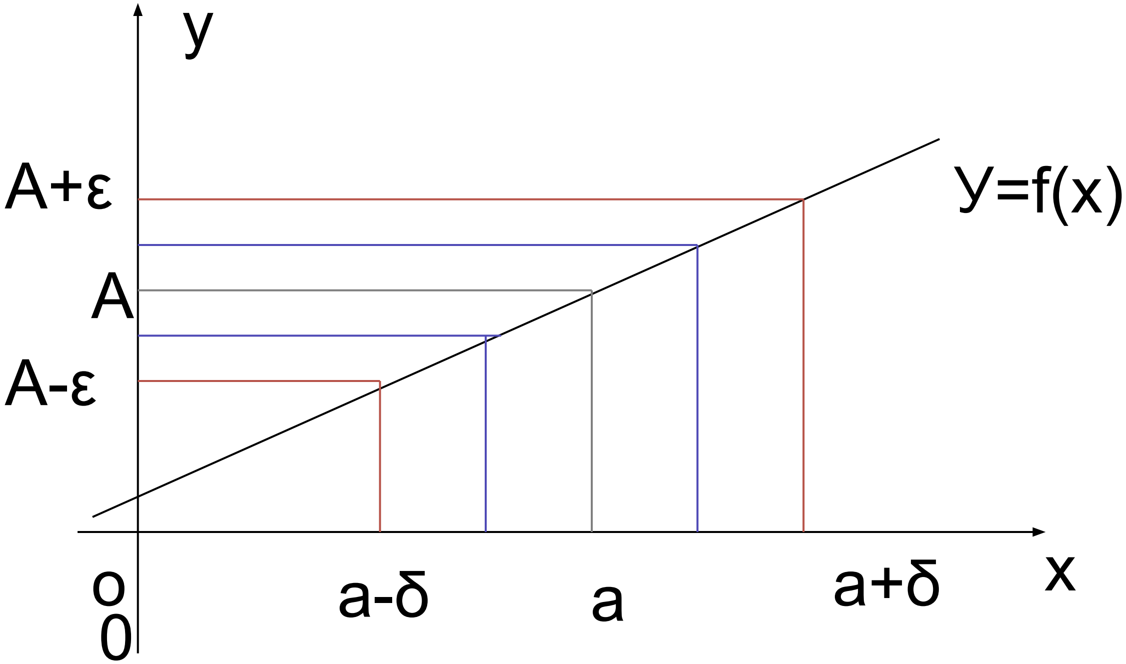
$|f(x) – A| < \varepsilon$ при $|x| > \Delta$, где $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ зависит от ε и по смыслу определения является достаточно большим положительным числом.

Множество всех точек x, для которых $|x| > \Delta$, очевидно является симметричной окрестностью символа ∞.

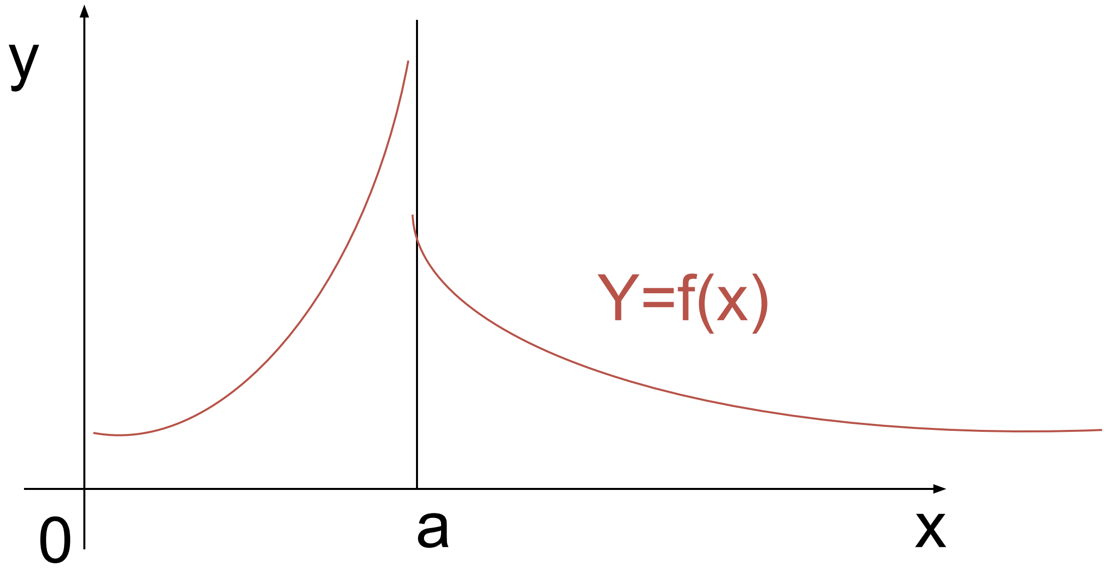
Геометрическая <u>иллюстрация</u>



Приведем еще один рисунок, поясняющий определение предела.



На этом рисунке изображена функция, которая в точке *a* не имеет предела.



Односторонние пределы

Односторонние пределы

Любой интервал (α, *a*), правым концом которого является точка *a*, называется *левой окрестностью* точки *a*.

Аналогично любой интервал (*a*, *β*), левым концом которого является точка *a*, называется ее *правой окрестностью*.

Односторонние пределы

Символически запись $x \to a+0$ означает, что *x* стремится к *a* справа, оставаясь большим *a*, то есть при $x > a$;

запись $x \to a-0$

означает, что *x* стремится к *a* слева, то есть при $x < a$.

Односторонние пределы

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$ будем называть **левосторонним пределом** функции (при $x \to a$ слева),

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$ - это **правосторонний предел** функции.

Односторонние пределы

Теорема о существовании предела

Функция $y = f(x)$ имеет $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ в том и только том случае, когда существуют и равны друг другу ее левосторонний и правосторонний пределы при $x \to a$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) =$

$= \lim\limits_{x \to a} f(x) = A.$

Бесконечно малые и <u>бесконечно большие</u>

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \alpha\left(x\right) = 0.$$

Ясно, что тогда $|\alpha(x)| \angle \varepsilon$ для всех $x \in O(a, \delta)$ и $\forall\ \varepsilon > 0$.

Например, функция $f(x) = x^2$ является бесконечно малой при $x \to 0$.

Функция *f(x)* называется ***бесконечно большой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Это равносильно тому, что каким бы ни было число *M* > 0, найдется такая окрестность O (*a*, *δ*), что для всех

x ∈ O (*a*, *δ*) $|f(x)|$ > *M*.

Например, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ – бесконечно большая при $x \to 0$.

Лемма.

Если $f(x) \to \infty$ при $x \to a$,

$\dfrac{1}{f(x)} \to 0$ при $x \to a$.

Если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)} \to \infty$ при $x \to a$ и $\alpha(x) \neq 0$.

Лекция 2

Свойства бесконечно малых.

Теорема 1.

Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть функция бесконечно малая при $x \to a$.

Теорема 2.

Произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Теорема 3.

Произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции на функцию, ограниченную при $x \to a$, есть бесконечно малая при $x \to a$.

Следствие.

Целая положительная степень бесконечно малой при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to a$.

$$(\alpha(x))^n$$

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то в силу определения предела функции получаем: $|f(x)-A|<\varepsilon$ при $x \in O(a,\delta)$, что означает, что $f(x) - A$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Тогда, полагая $f(x)-A=\alpha(x)$, получим: $f(x) = A + \alpha(x)$, где

$\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$.

Таким образом, имеем:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ <=> $f(x) = A + \alpha(x)$,

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$.

Теоремы о пределах

Теорема.

Если функция *f(x)* = с постоянна в некоторой окрестности точки *a*, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = c.$$

Теорема.

Если *f(x)* имеет предел при $x \to a$, то этот предел единствен.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной на данном множестве X*, если существует такое положительное число M, что $|f(x)| \le M$ при всех $x \in X$.

Если такое число M не существует, то функция $f(x)$ называется *неограниченной*

Лемма. Если функция *f(x)* имеет предел *A* при $x \to a$, то она ограничена в некоторой окрестности точки *x = a.*

Теорема. *Пусть существует* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ *и пусть M < f(x) < N в некоторой окрестности точки x = a. Тогда M ≤ A ≤ N.*

Положительная функция не может иметь отрицательного предела.

Теорема 1.

Если в точке *a* существуют пределы функций *f(x)* и *g(x),* то в этой точке существует и предел суммы *f(x)±g(x),*причём

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

Теорема 2.

Если в точке *a* существуют пределы функций *f (x)* и *g (x)*, то существует и предел произведения *f(x)* · *g(x)*, причем

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

Следствие.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Теорема 3. Если в точке *a* существуют пределы функций *f(x)* и *g (x)* и при этом $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, то существует и предел частного , причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

.

Пример

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-x-2}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}.$$

По теореме о пределе частного

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{x^2-x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2})}=1$$

Пример

Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

Преобразуем данную функцию так, чтобы выделить в числителе и знаменателе множитель $x-1$, на который и разделим далее числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)}=0.$$

Пример

Найти $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

Преобразуем данную функцию, умножив числитель и знаменатель на $\sqrt{x-1}+3$.

$$\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\frac{(\sqrt{x-1}-3)(\sqrt{x-1}+3)}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)}=\frac{x-1-9}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)}=$$

$$=\frac{x-10}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}+3.}$$

$$\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\lim_{x\to 10}\frac{1}{\sqrt{x-1}+3}=\frac{1}{6}.$$

Пример

Еще один пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

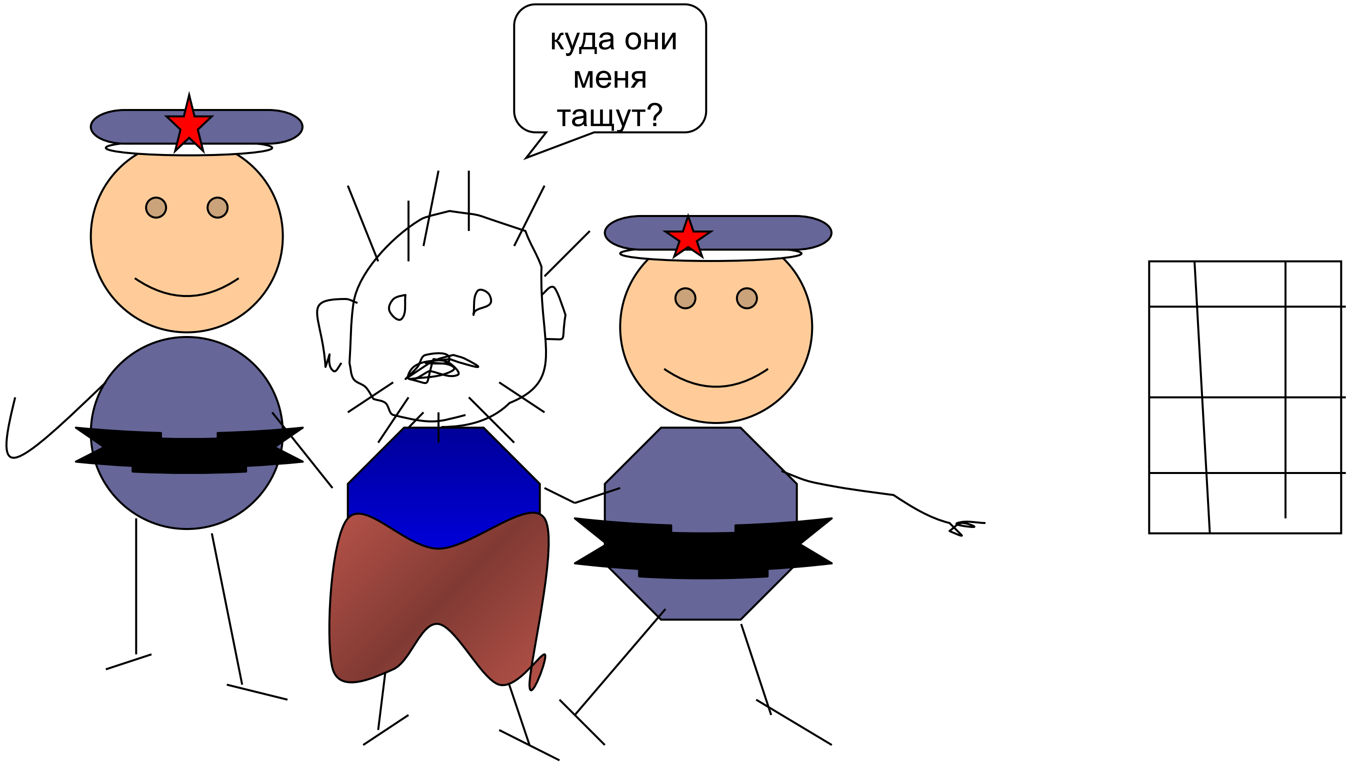
Положим $x = y^{12}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \lim_{y\to 1}\frac{y^4-1}{y^3-1} = \lim_{y\to 1}\frac{\left(y^2-1\right)\left(y^2+1\right)}{\left(y-1\right)\left(y^2+y+1\right)} =$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{\left(y-1\right)\left(y+1\right)\left(y^2+1\right)}{\left(y-1\right)\left(y^2+y+1\right)} = \lim_{y\to 1}\frac{\left(y+1\right)\left(y^2+1\right)}{y^2+y+1} = \frac{4}{3}.$$

Признаки существования предела

«Теорема о двух милиционерах»



Теорема (***о промежуточной функции***).

Пусть в некоторой окрестности О (*а*) точки *а* функция *f(x)* заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, имеющими одинаковый предел *А* при $x \to a$, то есть

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x) \qquad \text{и}$$

$$\lim_{x\to a}\varphi(x) = \lim_{x\to a}\psi(x) = A.$$

Тогда функция *f(x)* имеет тот же предел:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Первый замечательный предел

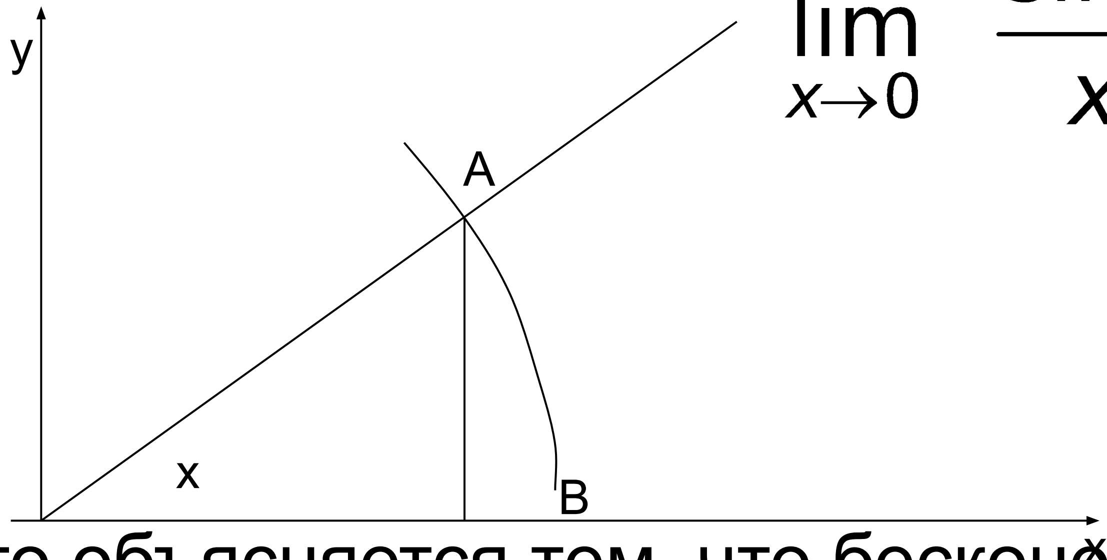
Теорема. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице, то есть

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Этот предел называют первым замечательным пределом.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



Это объясняется тем, что бесконечно малая дуга почти не успевает изменить свое направление, т.е. искривиться.

Второй замечательный предел

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \text{ или}$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+a(x))^{\frac{1}{a(x)}}=e$$

Примеры

Вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=$$

$$=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=5.$$

Примеры

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$. Полагая $\dfrac{3}{x}=y$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{x}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{3}{y}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{3}=e^{3}.$$

Сравнение бесконечно малых

Две бесконечно малые при *x*→*a* функции *α(x)* и *β(x)* называются *бесконечно малыми одинакового порядка*, если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} =$ k, где k ≠0 и конечно.

При этом пишут: *α(x)* =O(*β(x)*)

Две бесконечно малые при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \quad .$$

Это записывают так: $\alpha(x) \approx \beta(x)$ при $x \to a$.

Бесконечно малая при $x \to a$ функция $\alpha(x)$ называется ***функцией более высокого порядка*** по сравнению с функцией $\beta(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \qquad .$$

В этом случае пишут $\alpha(x) = o\,(\beta(x))$ при $x \to a$.

Приведем некоторые замечательные примеры в дополнение к первому и второму замечательным пределам.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a.$$

Теорема. Если при $x \to a$ бесконечно малые $\varphi(x) \approx \psi(x)$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{f(x)}.$$

Пример.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{e^{2x}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x} = 0.$$