



Предел

последовательности

и функции



## Цели:

- Сформировать понятие предела последовательности, функции;
- Ввести понятие сходящихся и расходящихся последовательностей, горизонтальной асимптоты;
- Сформировать умения вычисления пределов.

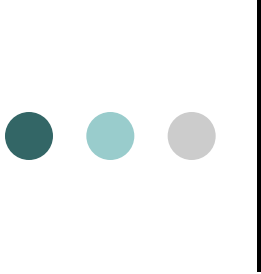


# Пояснительная записка

Изучение данного учебного элемента разбито на несколько этапов. После каждого этапа вам необходимо будет выполнить практические задания в своей рабочей тетради.

По окончании изучения элемента вам предстоит выполнить контрольную работу по этой теме также в своей тетради. Рабочую тетрадь по окончании изучения сдать на проверку учителю.

Желаем удачи!



# Сопутствующие учебные материалы


- Алгебра и начала анализа. 10 -11 кл.: Учебник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович. : 2-е – изд. – М.: Мнемозина, 2001;
- Алгебра и начала анализа. 10 -11 кл.: Задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович, Л. О. Денисова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчикова. - 2-е – изд. – М.: Мнемозина, 2001;
- Рабочая тетрадь.



# Опорные знания

Для успешного изучения данного учебного элемента вы должны знать:

- Что такое функция;
- Что такое числовая последовательность;
- Какими свойствами обладают числовые последовательности.



# Предел числовой последовательности

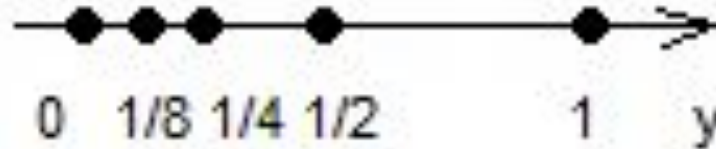
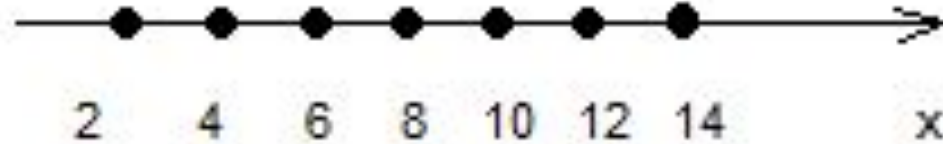
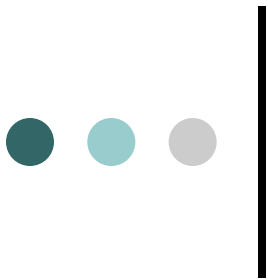
Рассмотрим две числовые последовательности:

$$(x_n) : 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots;$$

$$(y_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатных прямых.

Обратите внимание как ведут себя члены последовательности.

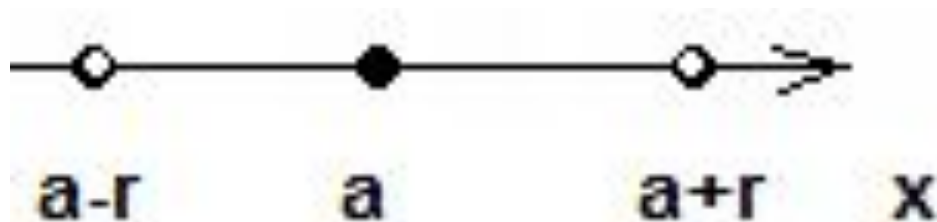


Замечаем, что члены последовательности  $y_n$  как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности  $x_n$  таковой точки не наблюдается.

Но, естественно, не всегда удобно изображать члены последовательности, чтобы узнать есть ли точка «сгущения» или нет, поэтому математики придумали следующее...

**Определение 1.** Пусть  $a$  - точка прямой, а  $r$  - положительное число. Интервал  $(a-r, a+r)$  называют **окрестностью точки  $a$** , а число  $r$  - **радиусом окрестности**.

Геометрически это выглядит так:







## Например

$(-0.1, 0.5)$  – окрестность точки  $0.2$ , радиус окрестности равен  $0.3$ .

Теперь можно перейти к определению точки «сгущения», которую математики называли «*пределом последовательности*».

● ● ●

**Определение 2.** Число  $b$  называют **пределом** последовательности  $y_n$  если в любой заранее выбранной окрестности точки  $b$  содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Пишут:  $y_n \rightarrow b$ .

Читают:  $y_n$  стремится к  $b$ .

Либо пишут:  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ .

Читают: предел последовательности  $y_n$  при стремлении  $n$  к бесконечности равен  $b$ .



# Комментарий

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . Возьмем окрестность точки  $b$  радиуса,

$r$ , то есть  $(b-r, b+r)$ . Тогда существует такой номер  $n_1$ ,

начиная с которого все последующие члены

последовательности содержатся внутри указанной

окрестности, например,  $y_{n+1}$ ,  $y_{n+8}$  и т. д., а вне этой

окрестности содержится конечное число членов

последовательности  $y_1$ ,  $y_{n-1}$ ,  $y_{n-5}$  и т. д.

При этом, если выбрать другую окрестность (другого радиуса), то для нее также найдется какой – то номер, начиная с которого все последующие члены последовательности будут попадать в указанный интервал.

# Пример.

Существует ли номер  $n_0$ , начиная с которого все члены последовательности  $(x_n)$  попадают в окрестность точки  $a$  радиуса  $r = 0.1$ , если

1.  $x_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $a = 0$ ;

Решение.

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < 0.1$$

$$\left| \frac{1}{n^2} \right| < 0.1$$

$$\frac{1}{n^2} < 0.1$$

$$n^2 > 10 \Rightarrow (\sqrt{10}; +\infty) \ni n \Rightarrow n_0 = 4$$

# Пример

Существует ли номер  $n_0$ , начиная с которого все члены последовательности  $(x_n)$  попадают в окрестность точки  $a$  радиуса  $r=0.1$ , если  $a=0$ ,  $x_n = \frac{1}{n^2}$

## Решение

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < 0.1$$

$$\left| \frac{1}{n^2} \right| < 0.1$$

$$\frac{1}{n^2} < 0.1$$

$$n^2 > 10 \Rightarrow (\sqrt{10}; +\infty) \ni n \Rightarrow n_0 = 4$$

**Ответ:** начиная с  $n_0=4$  все члены последовательности  $(x_n)$  попадают в окрестность  $(-0.1; 0.1)$

# Практические задания

1. Запишите окрестность точки  $a$  радиуса  $r$  в виде интервала, если:

а)  $a = 0, r = 0.1$ ;

б)  $a = -3, r = 0.5$ ;

2. Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал:

а)  $(2.1, 2.3)$ ;

б)  $(-7, -5)$ ?

3. Принадлежит ли точка  $x_1$  окрестности точки  $a$  радиуса  $r$ , если:


а)  $x_1 = 1, a = 2, r = 0.5$ ; б)  $x_1 = -0.2, a = 0, r = 0.3$ ?



# Содержание

- Сходящиеся последовательности и их свойства, расходящиеся последовательности;
- Вычисление пределов числовой последовательности;
- Графический смысл предела;
- Сумма бесконечной геометрической прогрессии;
- Предел функции на бесконечности;
- Предел функции в точке.

Итоговое задание



# Итоговое практическое задание

1. Существует ли номер  $n_0$ , начиная с которого все члены последовательности  $(x_n)$  попадают в окрестность точки  $a$  радиуса  $r$ :

$$a) x_n = \frac{1}{2n}, \quad a = 0, \quad r = 0,1; \quad б) x_n = 3 + \frac{1}{n^2}, \quad a = 3, \quad r = 0,2.$$

2. Постройте график последовательности  $y_n$  и составьте, если это возможно, уравнение горизонтальной асимптоты графика:

$$a) y_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n; \quad б) y_n = 5 - \frac{2}{n}.$$



# Итоговое практическое задание

3. Найдите  $n$ -й член геометрической прогрессии  $(b_n)$ , если:

$$a) S = 21, q = \frac{2}{3}, n = 3; \quad б) S = 20, q = 22, n = 4.$$

4. Вычислить:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n-3)}{n^2}; \quad б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-2n)(1+n)}{(n+2)^2};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(12 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(-\frac{8}{x^2} - 2\right); \quad г) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{x+3};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}; \quad е) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{64 - x^3}.$$