

Предикаты и кванторы.

Действия над предикатами и их свойства

Ирина Борисовна

Просвирнина

- Предикаты
- Кванторы
- Ограничительные кванторы
- Логические эквивалентности выражений, содержащих кванторы
- Отрицания выражений, содержащих кванторы
- Вложенные кванторы

Предикаты

Предложения, содержащие переменные, часто встречаются в

- математических утверждениях;
- компьютерных программах;
- спецификациях систем.

Предикаты

Примеры таких предложений:

- “ $x > 3$ ”, “ $x = y + 3$ ”, “ $x = y + z$ ”,
- “компьютер x подвергается атаке хакера”,
- “компьютер x функционирует в нормальном режиме”.

Если значения переменных, входящих в эти предложения, не специфицированы, то эти предложения не являются ни истинными, ни ложными.

Предикаты

$$“x > 3”$$

• Предложение “ x больше трех” состоит из двух частей:

- первая часть: **переменная x** , – подлежащее предложения;
- вторая часть: “больше трех”, – **предикат** – объясняет, каким свойством обладает подлежащее предложения.

Обозначим предложение “ x больше трех” через $P(x)$, где P обозначает предикат, а x – переменную.

Предикаты

Предложение $P(x)$ еще называют значением **пропозициональной функции P** в точке x .

Как только переменной x будет присвоено определенное значение, утверждение $P(x)$ станет высказыванием, принимающим логическое значение “Истина” или логическое значение “Ложь”.

Предикаты

Пример 1

Пусть $P(x)$ обозначает утверждение “ $x > 3$ ”.
Найдем логические значения высказываний
 $P(4)$ и $P(2)$.

$P(4)$ – высказывание “ $4 > 3$ ”, которое является
ИСТИННЫМ.

$P(2)$ – высказывание “ $2 > 3$ ”, которое является
ЛОЖНЫМ.

Предикаты

Пример 2

Пусть $A(c, n)$ обозначает утверждение “Компьютер c подсоединен к сети n ”.

Предположим, что компьютер $MATH1$ подсоединен к сети $CAMPUS2$, но не подсоединен к сети $CAMPUS1$. Найдем логические значения $A(MATH1, CAMPUS2)$ и $A(MATH1, CAMPUS1)$:

$$A(MATH1, CAMPUS2) = T;$$

$$A(MATH1, CAMPUS1) = F.$$

Предикаты

Пример 3

Пусть $R(x, y, z)$ обозначает утверждение “ $x + y = z$ ”. Найдем логические значения высказываний $R(1, 2, 3)$ и $R(0, 0, 1)$.

Утверждение $R(1, 2, 3)$ – это высказывание “ $1 + 2 = 3$ ”, которое истинно.

Утверждение $R(0, 0, 1)$ – это высказывание “ $0 + 0 = 1$ ”, которое ложно.

Предикаты

Предложение, содержащее n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , обозначают через $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Предложение $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ еще называют значением **пропозициональной функции** P на n -наборе (x_1, x_2, \dots, x_n) ,

а P называют n – **местным предикатом** или n – **арным предикатом**.

Предикаты

- Если переменным, входящим в состав пропозициональной функции, присвоить некоторые значения, то в результате получится высказывание, имеющее определенное истинностное значение.
- Имеется еще один способ образования высказываний из пропозициональных функций, известный как **квантификация**.
- Раздел логики, изучающие предикаты и кванторы, называется **исчислением предикатов**.

Кванторы

Определение 1 Пусть предикат $P(x)$ определен на некоторой области рассуждений U (называемой далее для краткости «область»).

Универсальной квантификацией предиката $P(x)$ относительно области U называется высказывание

$\forall xP(x) \equiv$ " $P(x)$ для всех значений x из области U ".

Высказывание $\forall xP(x)$ истинно тогда и только тогда, когда $P(x)$ принимает значение "Истина" для всех значений x из области U .

Кванторы

- $\forall xP(x)$

Символ \forall называется **универсальным квантором**.

Мы читаем $\forall xP(x)$ так:

- "для всех x $P(x)$ ";
- "для каждого x $P(x)$ ".

Элемент x , для которого высказывание $P(x)$ ложно, называется **контрпримером** для высказывания $\forall xP(x)$.

Кванторы

Высказывание $\forall xP(x)$ ложно тогда и только тогда, когда $P(x)$ не является истинным для всех элементов x из области рассуждений U . Таким образом, высказывание $\forall xP(x)$ ложно тогда и только тогда, когда имеется контрпример для высказывания $\forall xP(x)$ из области рассуждений U .

Кванторы

Пример 4 Пусть $P(x)$ – предикат “ $x^2 < 10$ ”, определенный на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$. Найти логическое значение высказывания $\forall x P(x)$.

Кванторы

Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, тогда

$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n).$$

Кванторы

Пример 5 Пусть $N(x)$ – предикат “Компьютер x подсоединен к сети”, определенный на множестве всех компьютеров кампуса. Что означает высказывание $\forall x N(x)$?

Кванторы

Пример 6 Найдите логическое значение высказывания $\forall x(x^2 \geq x)$, если

- 1) область предиката $x^2 \geq x$ состоит из всех вещественных чисел;
- 2) область предиката $x^2 \geq x$ состоит из всех целых чисел.

Кванторы

Определение 2 Пусть предикат $P(x)$ определен на некоторой области U .

Экзистенциальной квантификацией предиката $P(x)$ относительно области U называется высказывание

$\exists xP(x) \equiv$ "Существует значение x из области U , для которого $P(x)$ ".

Высказывание $\exists xP(x)$ истинно тогда и только тогда, когда $P(x)$ принимает значение "Истина" для некоторого значения x из области U .

Кванторы

- $\exists xP(x)$

Символ \exists называется

квантором существования.

Мы читаем $\exists xP(x)$ так:

- "существует x , такой что $P(x)$ ";
- "для некоторого x $P(x)$ ".

Кванторы

Высказывание $\exists xP(x)$ ложно тогда и только тогда, когда $P(x)$ не является истинным для некоторого элемента x из области рассуждений U .

Таким образом, высказывание $\exists xP(x)$ ложно тогда и только тогда, когда $P(x)$ ложно для любого элемента x из области рассуждений U .

Кванторы

Пример 7

Пусть $P(x)$ обозначает утверждение “ $x > 3$ ”.

Найти логическое значение высказывания

$$\exists x P(x),$$

если область предиката $P(x)$ состоит из всех вещественных чисел.

Кванторы

Пример 8

Пусть $Q(x)$ обозначает утверждение “ $x = x + 1$ ”.

Найти логическое значение высказывания

$$\exists x Q(x),$$

если область предиката $Q(x)$ состоит из всех вещественных чисел.

Кванторы

Пример 9

Пусть $P(x)$ – предикат “ $x^2 < 10$ ”, определенный на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$.

Найти логическое значение высказывания $\exists x P(x)$.

Кванторы

Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, тогда

$$\exists x P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n).$$

Ограничительные кванторы

Пример 10 Выясним, что означает утверждение $\forall x < 0 (x^2 > 0)$, где областью является множество вещественных чисел.

Утверждение $\forall x < 0 (x^2 > 0)$ означает: для любого вещественного числа x со свойством $x < 0$ имеет место неравенство $x^2 > 0$, т.е. “Квадрат любого отрицательного числа является числом положительным”.

Это утверждение эквивалентно такому утверждению: $\forall x (x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$.

Ограничительные кванторы

Пример 11

$$\forall x < 0 (x^2 > 0) \equiv \forall x (x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$$

Заметим, что ограничение универсальной квантификации сводится к универсальной квантификации условного высказывания.

Ограничительные кванторы

Пример 12 Выяснить, что означает утверждение $\forall y \neq 0 (y^3 \neq 0)$, где областью является множество вещественных чисел.

Ограничительные кванторы

Пример 13 Выясним, что означает утверждение $\exists z > 0 (z^2 = 2)$, где областью является множество вещественных чисел.

Утверждение $\exists z > 0 (z^2 = 2)$ означает: существует вещественное число z со свойством: $z > 0$, для которого имеет место равенство $z^2 = 2$, т.е.

“Существует арифметический квадратный корень из числа 2”.

Это утверждение эквивалентно такому утверждению: $\exists z (z > 0 \wedge z^2 = 2)$.

Ограничительные кванторы

Пример 14

$$\exists z > 0 (z^2 = 2) \equiv \exists z (z > 0 \wedge z^2 = 2)$$

Заметим, что ограничение экзистенциальной квантификации сводится к экзистенциальной квантификации конъюнкции.

Логические эквивалентности

Определение 3

Утверждения, содержащие предикаты и кванторы, **ЛОГИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫ** тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые логические значения для любых логических значений переменных из области рассуждений.

Если два утверждения S и T , содержащие предикаты и кванторы, логически эквивалентны, то пишут: $S \equiv T$.

Логические эквивалентности

Пример 15 Показать, что

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \quad \text{и} \quad \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$$

логически эквивалентны при условии что предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ заданы на одной области U .

Следует доказать два утверждения:

- если истинно $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$, то $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ истинно;
- если $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ истинно, то $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ истинно.

Логические эквивалентности

Пример 15

Докажем, что если истинно $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$, то $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ также истинно.

Предположим, что $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) = \text{Т}$. Это означает, что если элемент a принадлежит области U , то $P(a) \wedge Q(a) = \text{Т}$. Следовательно, $P(a) = \text{Т}$ и $Q(a) = \text{Т}$ для любого элемента a из области U .

Значит, $\forall xP(x) = \text{Т}$ и $\forall xQ(x) = \text{Т}$. Отсюда следует, что $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) = \text{Т}$.

Логические эквивалентности

Пример 15

Докажем, что если истинно $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$, то $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ также истинно.

Предположим, что $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x) = \text{Т}$. Отсюда следует, что $\forall xP(x) = \text{Т}$ и $\forall xQ(x) = \text{Т}$.

Следовательно, если элемент a принадлежит области U , то $P(a) = \text{Т}$ и $Q(a) = \text{Т}$. Значит, для всех a из области U имеет место равенство $P(a) \wedge Q(a) = \text{Т}$. Отсюда следует, что $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) = \text{Т}$.

Доказательство закончено.

Отрицания квантифицированных выражений

Пример 16

Рассмотрим отрицание утверждения «Каждый студент Вашей группы изучает курс математического анализа». Это утверждение запишем в виде $\forall xP(x)$, где $P(x)$ – утверждение «студент x Вашей группы изучает курс математического анализа», а область состоит из студентов Вашей группы.

Отрицание исходного утверждения:

«Неверно, что каждый студент Вашей группы изучает курс математического анализа».

Отрицания квантифицированных выражений

Пример 16

Отрицание исходного утверждения:

«Неверно, что каждый студент Вашей группы изучает курс математического анализа».

Это можно сказать по-другому:

«В Вашей группе есть студент, который не изучает курс математического анализа»:

$$\exists x \neg P(x).$$

Отрицания квантифицированных выражений

• Первый закон Де Моргана для кванторов:

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

Доказательство

$\neg \forall x P(x) = T$ тогда и только тогда, когда
 $\forall x P(x) = F$.

$\forall x P(x) = F$ тогда и только тогда, когда
найдется элемент a из области, для которого
 $\neg P(a) = T$.

$\neg P(a) = T$ тогда и только тогда, когда
 $\exists x \neg P(x) = T$. ■

Отрицания квантифицированных выражений

Пример 17 Рассмотрим отрицание утверждения «В Вашей группе есть студент, который изучает курс математического анализа».

Это утверждение запишем в виде $\exists xP(x)$, где $P(x)$ – утверждение «студент x Вашей группы изучает курс математического анализа», а область состоит из студентов Вашей группы.

Отрицание исходного утверждения:

«Неверно, что в Вашей группе есть студент, который изучает курс математического анализа».

Отрицания квантифицированных выражений

Пример 17

Отрицание исходного утверждения: «Неверно, что в Вашей группе есть студент, который изучает курс математического анализа».

Это можно сказать по-другому:

«В Вашей группе ни один студент не изучает курс математического анализа»:

$$\forall x \neg P(x).$$

Отрицания квантифицированных выражений

- Второй закон Де Моргана для кванторов:

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

Вложенные кванторы

Пример 18

Записать предложение «Сумма двух положительных чисел – число положительное» в виде логического выражения.

Решение

$$\forall x \forall y ((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (x + y) > 0),$$

где множество целых чисел – область для обеих переменных.

Вложенные кванторы

Пример 19

Записать определение предела вещественной функции f вещественного аргумента x в точке a из ее области определения.

Решение

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Вложенные кванторы

Пример 20

Записать на русском языке следующее логическое выражение:

$\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x, y)))$, где

$C(x)$ – « x имеет компьютер», $F(x, y)$ – « x и y – друзья», области для x и y – все студенты первого курса математического факультета.

Решение

Каждый студент первого курса математического факультета имеет компьютер или имеет друга, у которого есть компьютер.

Вложенные кванторы

Пример 21

Постройте отрицание утверждения

$$\forall x \exists y (xy = 1)$$

так, чтобы отрицания не стояли перед кванторами.

Решение

$$\exists x \forall y (xy \neq 1)$$

Вложенные кванторы

Пример 22

Постройте отрицание определения предела вещественной функции f вещественного аргумента x в точке a из ее области определения, т.е. отрицание выражения

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Решение

$$\forall L \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon),$$

где множество вещественных чисел – область для всех переменных.

Вложенные кванторы

Пример 23

Пусть $Q(x, y)$ означает « $x + y = 0$ ». Определите логические значения высказываний

$$\exists y \forall x Q(x, y) \text{ и } \forall x \exists y Q(x, y),$$

если области переменных x и y – все вещественные числа.

Решение

$$\exists y \forall x Q(x, y) = F, \forall x \exists y Q(x, y) = T$$

Вывод: порядок кванторов в выражениях с вложенными кванторами является существенным.