

Предикаты

Определение 1

- а) Множество $P \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ называется *n*-местным предикатом (отношением) между элементами множеств A_1, A_2, \dots, A_n ;
- б) Если $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in P$, то мы говорим, что отношение P истинно на наборе (a_1, a_2, \dots, a_n) и обозначаем $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ или просто $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$, если же $(a_1, a_2, \dots, a_n) \notin P$, то мы говорим, что P ложно на наборе (a_1, a_2, \dots, a_n) и пишем $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ или $\neg P(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Определение 2

Пусть $P \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ – *n*-местный предикат.

- а) При $n=1$ $P \subseteq A_1$ называется *одноместным предикатом* или *свойством*, определенным на множестве A_1 ;

- б) при $n=2$ P называется *двухместным предикатом* или *бинарным предикатом* или просто *отношением*;
- в) если $P \subseteq A^2$, то P называется *отношением между элементами* множества A .

Примеры

- 1) Пусть $A_1 = Z$. Свойство $P(x) \subseteq Z$ определяется условием: $P(x) = 1 \leftrightarrow x$ – четное число, тогда $P = \{\dots; -4; -2; 0; 2; 4; \dots\}$.
- 2) $A_1 = R$, $P \subseteq R$, определяется условием: $P(x) = 1 \leftrightarrow x$ – иррациональное число. Тогда $P(\sqrt{2}) = P(e) = P(\pi) = 1$,
- а $P(0) = P(1) = P\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$
- 3) A_1 – множество всех людей, $P(x) \subseteq A_1$ определим так:
- $$P(x) = 1 \leftrightarrow x \text{ – мужчина}$$

4) A_1 множество треугольников на плоскости, $P(x) = 1 \leftrightarrow x$
 равносторонний треугольник

Определение 3

Пусть $P \subseteq A \times B$ бинарный предикат. Тогда предикат называется *обратным* к P , если для любых $x \in A$ и $y \in B$

$$P(x, y) = 1 \leftrightarrow P^{-1}(y, x) = 1$$

Обозначим через $I_A \subseteq A \times A$ следующий бинарный предикат:

I_A называется *диагональным отношением* или *отношением равенства* или просто *равенством* на множестве A .

Очевидно, что

$$I_A^{-1} = I_A$$

Определение 4

Пусть $P \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$ бинарные предикаты, тогда предикат $P \circ Q \subseteq A \times C$ определяется следующим условием: для любых $x \in A$, $z \in C$ $(P \circ Q)(x, z) = 1 \leftrightarrow$ существует $y \in B$, такой, что

$$P(x, y) = 1 \wedge Q(y, z) = 1$$

$P \circ Q$ называется *суперпозицией* предикатов P и Q .

Пример 1

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}, C = \{x, y, z\};$$

$$P = \{(1; a); (1; c); (2; b); (2; c); (3; a)\} \subseteq A \times B;$$

$$Q = \{(a; x); (a; y); (b; y); (b; z); (c; x); (c; z)\} \subseteq B \times C;$$

$$P \circ Q = \{(1; x); (1; y); (1; z); (2; x); (2; y); (2; z); (3; x); (3; y)\} = \\ = (A \times C) / \{(3; z)\}.$$

Теорема 1

Пусть $P \subseteq A \times B$, тогда

а) $I_A \circ P = P$;

б) $P \circ I_B = P$.

Доказательство

а) Возьмем $(x; y) \in I_A \circ P$ существует $z \in A$

$(x; z) \in I_A \wedge (z; y) \in P$. Но $(x; z) \in I_A$ влечет $X=Z$, значит

$(x; y) \in P$, то есть $I_A \circ P \subseteq P$. Теперь возьмем $(x; y) \in P$, тогда можно написать $(x; x) \in I_A \wedge (x; y) \in P$, то есть существует такое $z \in A (z = x)$, что $(x; z) \in I_A \wedge (z; y) \in P$, значит $(x; y) \in I_A \circ P$.

Аналогично доказывается пункт б).

Теорема 2

Пусть $P \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq B \times C$, тогда $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$

Доказательство

Возьмем

$$(z; x) \in (P \circ Q)^{-1} \leftrightarrow (x; z) \in P \circ Q \leftrightarrow$$

существует $y \in B$, такой, что

$$(x; y) \in P \wedge (y; z) \in Q \leftrightarrow$$

$$\cdot \leftrightarrow (y; x) \in P^{-1} \wedge (z; y) \in Q^{-1} \leftrightarrow (z; x) \in Q^{-1} \circ P^{-1}$$

Теорема 3

Пусть $P \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$, $R \subseteq C \times D$, тогда
– ассоциативность суперпозиции.

$$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$$