Предикаты

Определение 1

а) Множество $P \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ называется *n-местным предикатом (отношением)* между элементами множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$;

б) Если $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in P$, то мы говорим, что отношение *P истинно* на наборе $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ и обозначаем $P(a_1, a_2, \ldots a_n) = 1$ или просто $P(a_1, a_2, \ldots a_n)$, если же $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \notin P$, то мы говорим, что *P ложно* на наборе $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ и пишем $P(a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$ или $(a_1, a_2, \ldots a_n)$.

Определение 2

Пусть $P \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ – *n*-местный предикат.

а) При $n=1$ $P \subseteq A_1$ называется *одноместным предикатом* или *свойством*, определенным на множестве A_1;

б) при $n=2$ P называется *двухместным предикатом* или *бинарным предикатом* или просто *отношением*;

в) если $P \subseteq A^2$, то P называется *отношением между элементами* множества A.

Примеры

1) Пусть $A_1 = Z$. Свойство $P(x) \subseteq Z$ определяется условием: $P(x) = 1 \leftrightarrow x$ – четное число, тогда $P=\{...;-4;-2;0;2;4;...\}$.

2) $A_1 = R$, $P \subseteq R$, определяется условием: $P(x) = 1 \leftrightarrow x$ – иррациональное число. Тогда $P(\sqrt{2}) = P(e) = P(\pi) = 1$,

а $P(0) = P(1) = P\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$

3) A_1 – множество всех людей, $P(x) \subseteq A_1$ определим так:

$P(x) = 1 \leftrightarrow x$ – мужчина

4) A_1 – множество треугольников на плоскости, $P(x)=1 \leftrightarrow x$ – равносторонний треугольник

Определение 3

Пусть $P \subseteq A \times B$ – бинарный предикат. Тогда предикат называется *обратным* к P, если для любых $x \in A$ и $y \in B$

$$P(x,y)=1 \leftrightarrow P^{-1}(y,x)=1$$

Обозначим через $I_A \subseteq A \times A$ следующий бинарный предикат:

$$I_A(x,y)=1 \leftrightarrow x=y$$

I_A называется *диагональным отношением* или *отношением равенства* или просто *равенством на множестве A*.

Очевидно, что $I_A^{-1}=I_A$.

Определение 4

Пусть $P \subseteq A \times B,\ Q \subseteq B \times C$ бинарные предикаты, тогда предикат $P \circ Q \subseteq A \times C$ определяется следующим условием: для любых $x \in A,\ z \in C$ $\left(P \circ Q\right)\left(x, z\right) = 1 \leftrightarrow$ существует $y \in B$, такой, что

$$P\left(x, y\right) = 1 \wedge Q\left(y, z\right) = 1$$

$P \circ Q$ называется *суперпозицией* предикатов *P* и *Q*.

Пример 1

A={1,2,3},B={a, b, c},C={x, y, z};

P={(1;a);(1;c);(2;b);(2;c);(3;a)} $\subseteq$ *A* x *B;*

Q={(a; x);(a; y);(b; y);(b; z);(c; x);(c; z)} $\subseteq$ *B* x *C;*

$P \circ Q$ *={(1;x);(1;y);(1;z);(2;x);(2;y);(2;z);(3;x);(3;y)}=*
=(A x *C)/{(3;z)}.*

Теорема 1

Пусть $P \subseteq A \times B$, тогда

а) $I_A \circ P = P$;

б) $P \circ I_B = P$.

Доказательство

а) Возьмем $(x;y) \in I_A \circ P$ существует $z \in A$ $(x;z) \in I_A \wedge (z;y) \in P$. Но $(x;z) \in I_A$ влечет X=Z , значит $(x;y) \in P$, то есть $I_A \circ P \subseteq P$. Теперь возьмем $(x;y) \in P$, тогда можно написать $(x;x) \in I_A \wedge (x;y) \in P$, то есть существует такое $z \in A(z = x)$, что $(x;z) \in I_A \wedge (z;y) \in P$, значит $(x;y) \in I_A \circ P$.

Аналогично доказывается пункт б).

Теорема 2

Пусть $P \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq B \times C$, тогда $\left(P \circ Q\right)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$.

Доказательство

Возьмем

$$\left(z;x\right) \in \left(P \circ Q\right)^{-1} \leftrightarrow \left(x;z\right) \in P \circ Q \leftrightarrow$$

существует $y \in B$, такой, что

$$\left(x;y\right) \in P \wedge \left(y;z\right) \in Q \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(y;x\right) \in P^{-1} \wedge \left(z;y\right) \in Q^{-1} \leftrightarrow \left(z;x\right) \in Q^{-1} \circ P^{-1}.$$

Теорема 3

Пусть $P \subseteq A \times B,\ Q \subseteq B \times C,\ R \subseteq C \times D,$ тогда

$$\left(P \circ Q\right) \circ R = P \circ \left(Q \circ R\right)$$

– ассоциативность суперпозиции.