Предикаты

Определение 1

а) Множество $P \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ называется *n-местным предикатом (отношением)* между элементами множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$;

б) Если $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in P$, то мы говорим, что отношение *P истинно* на наборе $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ и обозначаем $P(a_1, a_2, \ldots a_n)=1$ или просто $P(a_1, a_2, \ldots a_n)$, если же $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \notin P$, то мы говорим, что *P ложно* на наборе $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ и пишем $P(a_1, a_2, \ldots a_n)=0$ или $(a_1, a_2, \ldots a_n)$.

Определение 2

Пусть $P \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ – *n*-местный предикат.

а) При $n=1$ $P \subseteq A_1$ называется *одноместным предикатом* или *свойством*, определенным на множестве A_1;

б) при *n=2 P* называется *двухместным предикатом* или *бинарным предикатом* или просто *отношением*;

в) если $P \subseteq A^2$, то *P* называется *отношением между элементами* множества *A*.

Примеры

1) Пусть $A_1 = Z$. Свойство $P(x) \subseteq Z$ определяется условием: $P(x) = 1 \leftrightarrow x$ – четное число, тогда *P={...;-4;-2;0;2;4;...}*.

2) $A_1 = R$, $P \subseteq R$, определяется условием: $P(x) = 1 \leftrightarrow x$ – иррациональное число. Тогда $P(\sqrt{2}) = P(e) = P(\pi) = 1$,

а $P(0) = P(1) = P\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$

3) A_1 – множество всех людей, $P(x) \subseteq A_1$ определим так:

$P(x) = 1 \leftrightarrow x$ – мужчина

4) A_1 – множество треугольников на плоскости, $P(x)=1\leftrightarrow x$ – равносторонний треугольник

Определение 3

Пусть – $P\subseteq A\times B$ бинарный предикат. Тогда предикат называется *обратным* к P, если для любых $x\in A$ и $y\in B$

$$P(x,y)=1\leftrightarrow P^{-1}(y,x)=1$$

Обозначим через $I_A\subseteq A\times A$ следующий бинарный предикат:

$$I_A(x,y)=1\leftrightarrow x=y$$

I_A называется *диагональным отношением* или *отношением равенства* или просто *равенством на множестве A*.

Очевидно, что $I_A^{-1}=I_A$.

Определение 4

Пусть $P \subseteq A \times B,\ Q \subseteq B \times C$ бинарные предикаты, тогда предикат $P \circ Q \subseteq A \times C$ определяется следующим условием: для любых $x \in A,\ z \in C$ $\left(P \circ Q\right)\left(x, z\right) = 1 \leftrightarrow$ существует $y \in B$, такой, что

$$P\left(x, y\right) = 1 \wedge Q\left(y, z\right) = 1$$

$P \circ Q$ называется *суперпозицией* предикатов P и Q.

Пример 1

$A=\{1,2,3\}, B=\{a, b, c\}, C=\{x, y, z\};$

$P=\{(1;a);(1;c);(2;b);(2;c);(3;a)\} \subseteq A \times B;$

$Q=\{(a;x);(a;y);(b;y);(b;z);(c;x);(c;z)\} \subseteq B \times C;$

$P \circ Q =\{(1;x);(1;y);(1;z);(2;x);(2;y);(2;z);(3;x);(3;y)\}=$
$=(A \times C)/\{(3;z)\}.$

Теорема 1

Пусть $P \subseteq A \times B$, тогда

а) $I_A \circ P = P$;

б) $P \circ I_B = P$.

Доказательство

а) Возьмем $(x;y) \in I_A \circ P$ существует $z \in A$ $(x;z) \in I_A \wedge (z;y) \in P$. Но $(x;z) \in I_A$ влечет X=Z, значит $(x;y) \in P$, то есть $I_A \circ P \subseteq P$. Теперь возьмем $(x;y) \in P$, тогда можно написать $(x;x) \in I_A \wedge (x;y) \in P$, то есть существует такое $z \in A (z = x)$, что $(x;z) \in I_A \wedge (z;y) \in P$, значит $(x;y) \in I_A \circ P$.

Аналогично доказывается пункт б).

Теорема 2

Пусть $P \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq B \times C$, тогда $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$.

Доказательство

Возьмем

$$(z;x) \in (P \circ Q)^{-1} \leftrightarrow (x;z) \in P \circ Q \leftrightarrow$$

существует $y \in B$, такой, что

$$(x;y) \in P \wedge (y;z) \in Q \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (y;x) \in P^{-1} \wedge (z;y) \in Q^{-1} \leftrightarrow (z;x) \in Q^{-1} \circ P^{-1}$$

Теорема 3

Пусть $P \subseteq A \times B,\ Q \subseteq B \times C,\ R \subseteq C \times D,$ тогда

$$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$$

– ассоциативность суперпозиции.