

Раздел 1.

Теория вероятностей

**Лектор: старший преподаватель кафедры математики
Константиновская Наталья Валерьевна**

Литература:

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. 7-е изд. - М.: Высшая школа, 2001 – 479 с.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие для вузов. 7-е изд. - М.: Высшая школа, 2001 – 459 с.
3. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 543 с.
4. Морозов Ю. В. Основы высшей математики и статистики. Учебник. – М.: Медицина, 1998. – 232 с.
5. Сергиенко В. Н., Бондарева И. Б. Математическая статистика в клинических исследованиях. – М.: ГЭОТАР МЕДИЦИНА, 2000. – 256 с.

Предмет теории
вероятностей и
математической
статистики,
его основные задачи и
области применения

Достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям.

Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

- **Теория вероятностей** – раздел математики, в котором изучаются закономерности массовых, случайных явлений.
- Знание закономерностей, которым подчиняются массовые, случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать.
- **Пример.** Нельзя определить заранее результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число появлений «герба», если монета будет брошена достаточно большое число раз.

- Одной из главных задач в теории вероятностей, является задача, определения количественной меры возможности появления события.
- Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники:
 - теории надежности;
 - теории массового обслуживания;
 - теоретической физике;
 - астрономии;
 - теории стрельбы;
 - теории автоматического управления и др.

- Теория вероятностей служит для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов и др.

Краткая историческая справка

- Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма и другие в XVI-XVII вв.).
- Следующий этап развития теории вероятностей связан с именем Якоба Бернулли (1654-1705). Доказанная им теорема, получившая впоследствии название «Закона больших чисел», была первым теоретическим обоснованием накопленных ранее фактов.

- Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону и др.
- Новый наиболее плодотворный период связан с именами П.Л. Чебышева (1821-1894) и его учеников А.А. Маркова (1856-1922) и А.М. Ляпунова (1857-1918). В этот период теория вероятностей становится стройной математической наукой.

- Ее последующее развитие обязано в первую очередь русским и советским математикам (С.Н. Бернштейн, В.И. Романовский, А.Н. Колмогоров, А.Я. Ханчин, Б.В. Гнеденко, Н.В. Смирнов и др.).
- В настоящее время ведущая роль в создании новых ветвей теории вероятностей также принадлежит российским математикам.

Тема. Элементы комбинаторики

План:

1. Основные понятия комбинаторики.
2. Правила комбинаторики.

1. Основные понятия комбинаторики

Группы, составленные из каких-либо элементов, называют **соединениями**.

Различают три основных вида соединений:

- размещения;
- перестановки;
- сочетания.

Задачи, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называются **комбинаторными**, а раздел математики занимающийся их решением, называется **комбинаторикой**.

Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$

обозначают символом $n!$

(читают «**n-факториал**»), причем:

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

Размещения

Размещениями из n элементов по m в каждом называют такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m в каждом обозначается символом

$$A_n^m$$

и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример.

Сколькими способами из пяти кандидатов можно выбрать три лица на три различные должности?

Пример.

Сколькими способами из пяти кандидатов можно выбрать три лица на три различные должности?

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1} = 60$$

Перестановки

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Число перестановок из n
элементов обозначается
СИМВОЛОМ

P_n

и вычисляется по формуле

$$P_n = n!$$

Пример.

**Сколькокими способами
можно рассадить пять
человек по пяти местам?**

Пример.

**Сколькокими способами
можно рассадить пять
человек по пяти местам?**

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Сочетания

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n
элементов по m в каждом
обозначается символом

$$C_n^m$$

и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

Пример.

Сколькими способами из 10 пациентов можно создать группы психологической разгрузки по шесть человек в каждой?

Пример.

Сколькими способами из 10 пациентов можно создать группы психологической разгрузки по шесть человек в каждой?

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6!} = 210$$

Замечание.

Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляются по другим формулам.

2. Правила комбинаторики

Правило суммы.

Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A , либо B можно $m+n$ способами.

Правило произведения.

Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m n$ способами.

Пример.

В меню столовой стационара: 2 первых блюда, 3 вторых и 5 третьих. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд?

Решение.

Пример.

В меню столовой стационара: 2 первых блюда, 3 вторых и 5 третьих. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд?

Решение.

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Тема: Случайные события. Понятие вероятности события

План:

1. Испытания и события.
2. Виды случайных событий.
3. Классическое определение вероятности.
4. Статистическое определение вероятности.
5. Алгебра событий.

1. Испытания и события

- Чтобы каким-то образом оценить событие, необходимо учесть или специально организовать условия, в которых оно происходит.
- Выполнение определенных условий или действий для выявления рассматриваемого события носит название **опыта** или **эксперимента**.

- Событие рассматривают, как результат испытания (опыта).
- События обозначают заглавными буквами латинского алфавита
A, B, C и т.д.

Виды событий

- событие называется **случайным**, если в результате опыта оно может произойти, либо не произойти;
- событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет в результате данного опыта;
- событие называется **невозможным**, если оно не может произойти в данном опыте.

Пример.

Испытание - подбрасывание
игральной кости.

События (исходы):

A – выпало четное число очков;

B – выпало 8 очков;

C – выпало менее 7 очков.

2. Виды случайных событий

События называются **несовместными**, если они вместе не могут наблюдаться в одном и том же опыте (т.е. появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же опыте).

События называются
единственно возможными,
если в результате опыта
появление одного из них, есть
событие достоверное.

События называются
равновозможными, если ни у
одного из них нет
преимущества для появления
перед другими.

События образуют полную группу событий, если хотя бы одно из них обязательно произойдет в опыте.

Пример.

В аптеку принимаются на реализацию лекарственные препараты от двух поставщиков.

События:

A- отсутствие поставок;

B- поступление товара от одного из поставщиков;

C - поступление товара от двух поставщиков;

образуют полную группу.

Противоположными
называются два единственно
возможных события,
образующих полную группу.

Если одно из противоположных событий
обозначить через A , то другое
обозначают

$$\bar{A}$$

Пример.

Брошена монета.

События:

A - «появился герб»;

\bar{A} - «появилась надпись».

3. Классическое определение вероятности

- Одной из главных задач в теории вероятностей является задача определения количественной меры, возможности появления события.
- Количественной мерой возможности появления рассматриваемого события является вероятность.

- **Вероятностью события A** - называется число, равное отношению числа исходов, благоприятствующих наступлению события A к общему числу ВОЗМОЖНЫХ ИСХОДОВ.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- где m -число исходов благоприятствующих наступлению события A ;
- n – общее число возможных исходов.

Свойства вероятности

- Вероятность достоверного события равна единице;
- Вероятность невозможного события равна нулю;
- Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей;

4. Статистическое определение вероятности

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

- Относительная частота события A определяется формулой

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

- где m -число появлений события, n – общее число испытаний.

Пример.

Среди 1000 новорожденных оказалось 517 мальчиков. Чему равна частота рождения мальчиков?

Событие A – рождение мальчика.

$$W(A) = \frac{517}{1000} = 0,517$$

Сопоставляя определение вероятности и относительной частоты, делаем вывод: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически.

Другими словами, вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.

Вероятностью события A -
называется число, около которого
группируются значения относительной
частоты данного события в различных сериях
большого числа испытаний

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

5. Алгебра событий

Суммой событий A_1, A_2, \dots, A_n

называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i$$

Если A и B **совместные** события, то их сумма $A+B$ обозначает наступление события A или события B или обоих событий вместе.

Если A и B **несовместные** события, то их сумма $A+B$ обозначает наступление или события A или события B .

Пример.

Победитель соревнования награждается призом (событие A), денежной премией (событие B).

Что представляют собой события $A+B$?

Пример.

Победитель соревнования награждается призом (событие A), денежной премией (событие B).

Что представляют собой события $A+B$?

Решение.

Событие $A+B$ состоит в награждении победителя или призом или денежной премией, или тем и другим.

Произведением событий

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

называется событие, состоящее в одновременном появлении всех этих событий:

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = \prod_{i=1}^n A_i$$

Пример.

Событие, состоящее в одновременной продаже в аптеке двух препаратов, является произведением событий A и B , где

A - продажа одного препарата,

B - продажа другого препарата.

Вероятность наступления события A , вычисленная в предположении, что событие B уже произошло, называется **условной вероятностью события A при условии B** и обозначается

$$P_B(A)$$

Пример.

В коробке содержится 3 белых и 3 желтых шара. Из коробки дважды вынимают наугад по одному шару, не возвращая их в коробку.

Найти вероятность появления белых шаров при втором испытании (событие В), если при первом испытании был извлечен желтый шар (событие А).

Решение.

После первого испытания в коробке осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомое условие вероятности:

$$P_A(B) = \frac{3}{5} = 0,6$$