# Преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье применяется при решении многих прикладных задач. К ним относятся тригонометрическая интерполяция, вычисление свертки функций, распознавание образов и многие другие. Дискретное преобразование Фурье стало особенно эффективным методом решения прикладных задач после создания быстрого преобразования Фурье (см. § 4).

Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 1 — разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q \exp\{2\pi \mathbf{i} q x\}, \tag{1}$$

причем

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} |a_q| < \infty. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{i}$ — мнимая единица.

Рассмотрим значения этой функции на сетке из точек $x_l = l/N$, где $l$, $N$ целые, $N$ фиксировано, и обозначим $f(x_l) = f_l$. Если $q_2 - q_1 = kN$, где $k$ целое, то $q_2 x_l - q_1 x_l = kNx_l = kl$, где $kl$ целое. Следовательно,

$$\exp\{2\pi \mathbf{i} q_1 x\} = \exp\{2\pi \mathbf{i} q_2 x\} \tag{3}$$

в узлах сетки. Поэтому если функция $f(x)$ рассматривается лишь в узлах сетки $x_l$, то в соотношении (1) можно привести подобные члены

$$f_l = \sum_{q=0}^{N-1} A_q \exp\{2\pi \mathbf{i} q x_l\}, \tag{4}$$

где

$$A_q = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{q+sN}. \tag{5}$$

$$f_l = \sum_{-N/2<q\leqslant N/2} A_q \exp\{2\pi \mathbf{i} q x_l\}. \tag{9}$$

Если $f(x)$ — достаточно гладкая функция, то величины $|a_j|$ с ростом $j$ убывают быстро, поэтому $A_q \approx a_q$ при малых $q$. Кроме того, при гладкой $f(x)$ величины $A_q$ и $a_q$ малы при больших $q$.

**Задача 1.** Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема. Доказать, что

$$\max_{[0,1]}\left| f(x) - \sum_{-N/2<q\leqslant N/2} A_q \exp\{2\pi \mathbf{i} q x\}\right| \to 0$$

при $N \to \infty$.

Напомним, что это приближенное равенство обращается в точное равенство в точках сетки. Способ аппроксимации функции

$$f(x) \approx \sum_{-N/2<q\leqslant N/2} A_q \exp\{2\pi \mathbf{i} q x\}$$

носит название *тригонометрической интерполяции.* Соотношение (9) называют *конечным* или *дискретным рядом Фурье*, а коэффициенты $A_q$ — *дискретными коэффициентами Фурье.*

Существует соответствие между задачей приближения функций линейными комбинациями многочленов Чебышева и тригонометрическими многочленами. Пусть на отрезке $[-1,\,1]$ функция $f(x)$ приближается линейными комбинациями $\sum\limits_{j=0}^{m-1} a_j T_j(x)$. Замена переменных $x = \cos t$ сводит исходную задачу к задаче приближения функции $f(\cos t)$ линейной комбинацией $\sum\limits_{j=0}^{m-1} a_j T_j(\cos t) = \sum\limits_{j=0}^{m-1} a_j \cos(jt)$.

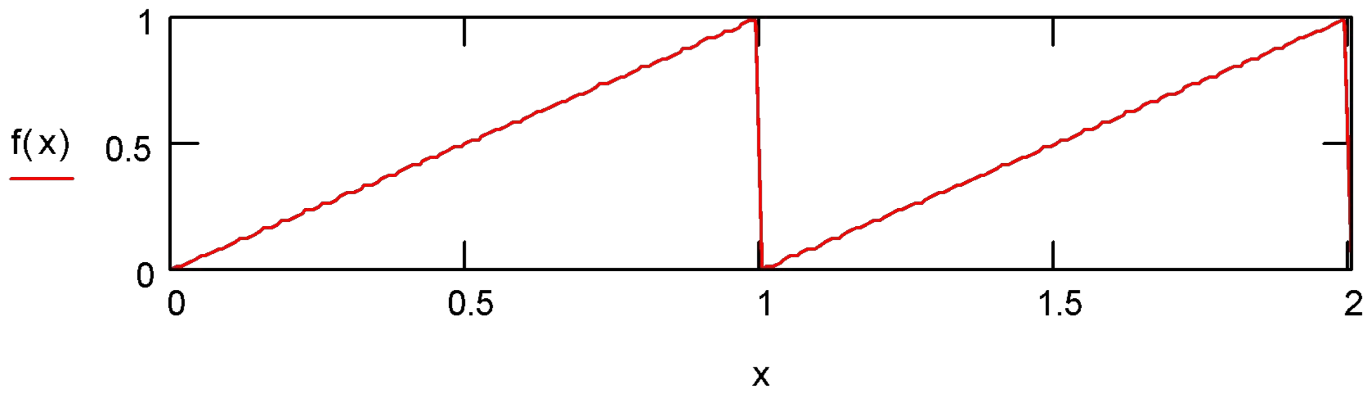
Справедливо равенство

$$(f,\,g)_1 = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\bar{g}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} f(\cos\theta)\bar{g}(\cos\theta)\,d\theta.$$

Следовательно, задача наилучшего приближения $f(x)$ в норме, соответствующей скалярному произведению $(f, g)_1$, эквивалентна задаче приближения $f(\cos\theta)$ в норме, соответствующей скалярному произведению $(f, g)_2 = \int_0^\pi f(\cos\theta)\bar{g}(\cos\theta)\,d\theta$. Точно так же существует соответствие в случае задач интерполяции и наилучшего приближения в равномерной метрике. Задача интерполирования функции многочленом по узлам $x_j = \cos\left(\pi\frac{2j-1}{2m}\right)$ — нулям многочлена Чебышева $T_m(x)$ — после такой замены сводится к задаче интерполирования функции $f(\cos\theta)$ при помощи тригонометрического многочлена $\sum_{j=0}^{m-1} a_j\cos(jt)$ по узлам $t_j = \pi\frac{2j-1}{2m}$, образующим равномерную сетку.

# Анализ и синтез сигналов с помощью преобразования Фурье.

- Определим функцию, задающую так называемый пилообразный сигнал $f(x) := x - \mathrm{floor}(x)$ $x := 0, 0.01 .. 2$ и изобразим ее на графике



- Заполним массив s: $i := 0..127$ $s_i := f\left(\frac{i}{64}\right)$

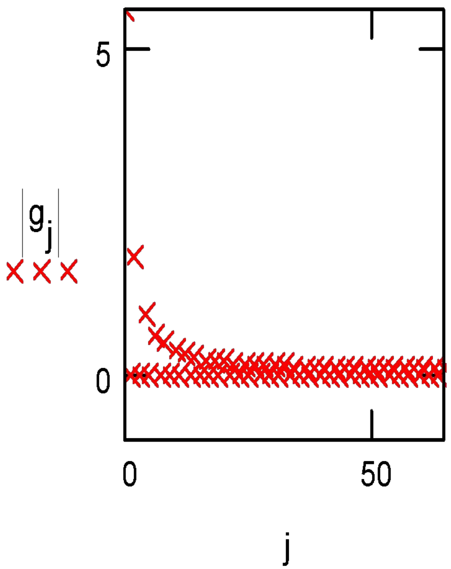
Проводим прямое преобразование Фурье: $g := fft(s)$

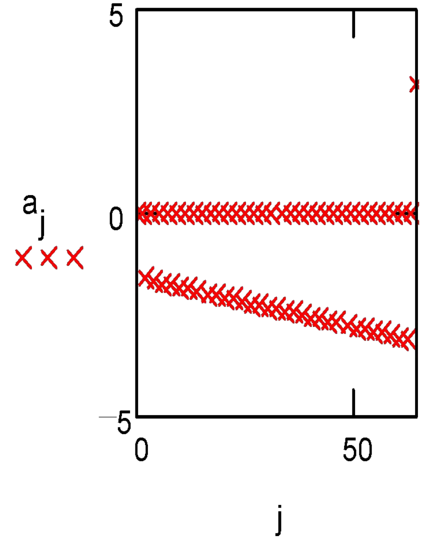
***Внимание!*** В том случае, когда в массиве ***s*** содержится $2^m$ элементов, причем все числа действительные, следует использовать функцию ***fft***. Во всех остальных случаях – функцию ***cfft***. Массив ***g*** содержит комплексные коэффициенты дискретного преобразования Фурье.

Размер массива ***f –*** $1+2^{m-1}$

- Для анализа вклада отдельных гармоник в исходный сигнал изобразим на графике модули и аргументы гармоник

$$j := 0 .. 64 \qquad a_j := \mathrm{if}\left(g_j \neq 0, \arg\left(g_j\right), 0\right)$$



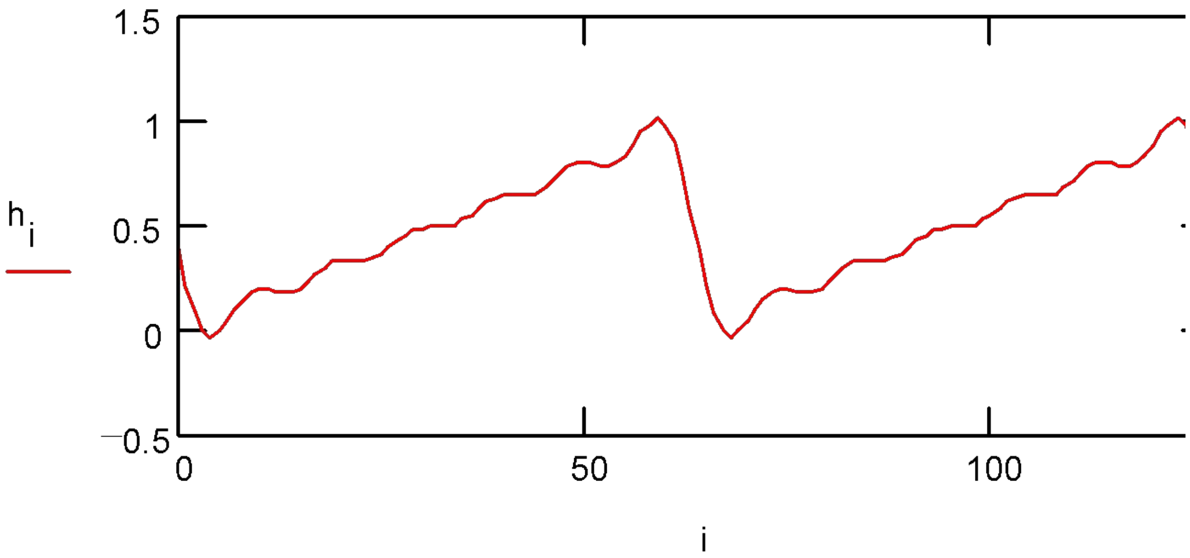



Проводим обратное преобразование Фурье, исключив гармоники с малым вкладом. Будем учитывать только гармоники с амплитудой не менее 0.3. Для отсечения слагаемых с малым вкладом воспользуемся функцией единичного скачка – функцией Хевисайда **Ф**.

$$\alpha := 0.3 \qquad G_j := g_j \cdot \Phi\left(\left|g_j\right| - \alpha\right)$$

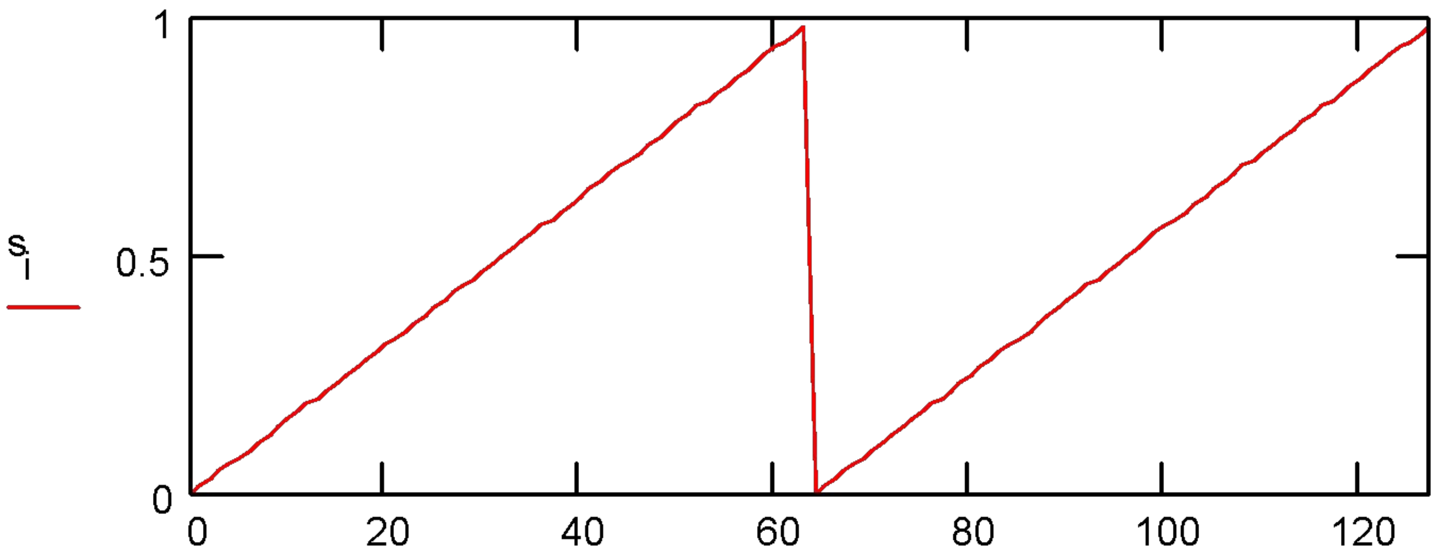
Для обратного преобразования Фурье используется функция ***ifft,*** если прямое преобразование осуществлялось с помощью ***fft,*** и ***cifft***, если прямое преобразование осуществлялось с помощью ***cfft.***

$$h := \mathrm{ifft}(G)$$


1.5
1
0.5
0
−0.5
$h_i$
0
50
100
i

Повторим преобразование Фурье, учтя слагаемые с амплитудой до 0.1.

$$\alpha := 0.1 \qquad G_j := g_j \cdot \Phi\left(\left|g_j\right| - \alpha\right) \qquad h := \mathrm{ifft}(G)$$




Учет дополнительных гармоник существенно улучшил результат синтеза сигналов.

# Наилучшее приближение

**1. Наилучшее приближение.** Интерполяция позволяет легко аппроксимировать функцию $y(x)$. Однако точность такой аппроксимации гарантирована лишь в небольшом интервале порядка нескольких шагов сетки. Для другого интервала приходится заново вычислять коэффициенты интерполяционной формулы. Нам же всегда желательно иметь единую приближенную формулу $y \approx \varphi(x)$, пригодную для большого отрезка $a \leqslant x \leqslant b$. Поэтому далее будем сравнивать заданную и аппроксимирующую функции на большом отрезке.

При интерполяции мы приравниваем значения $y(x)$ и $\varphi(x)$ в узлах. Если $y(x_i)$ определены неточно — например, из эксперимента, — то точное приравнивание неразумно. Поэтому нередко целесообразней приближать функцию не по точкам, а в среднем, т. е. в норме $L_p$.

Пусть заданы функция $y(x)$ и множество функций $\varphi(x)$, принадлежащие линейному нормированному пространству функций. Нас интересуют две задачи. Первая — аппроксимация с заданной точностью: по заданному $\varepsilon$ найти такую $\varphi(x)$, чтобы выполнялось неравенство $\|y(x)-\varphi(x)\| \leqslant \varepsilon$. Второе — нахождение *наилучшего приближения*, т. е. функции $\bar{\varphi}(x)$, удовлетворяющей соотношению

$$\|y(x)-\bar{\varphi}(x)\| = \inf \|y(x)-\varphi(x)\| = \nu. \tag{36}$$

Существует ли наилучшее приближение и единственно ли оно (для данных функции и множества)? Это имеет место не при любом выборе пространства и множества. Например, в пространстве $L_1$, $-1 \leqslant x \leqslant +1$, выберем функцию $y(x)=1$ и множество $\varphi(x)=cx$; тогда

$$\|y-\varphi\|_{L_1} = \int_{-1}^{+1} |1-cx|\,dx = \begin{cases} 2 & \text{при } |c| \leqslant 1, \\ \frac{c^2+1}{|c|} > 2 & \text{при } |c| > 1. \end{cases}$$

В самом деле, при $|c| \leqslant 1$ эта норма равна площади заштрихованной трапеции на рис. 10, *а*, т. е. двум. При $|c| > 1$ эта



норма, согласно рис. 10, *б*, равна площади заштрихованной трапеции (которая опять равна двум) плюс площади заштрихованных треугольников. Значит, для любого $c$, по модулю меньшего единицы, $\varphi = cx$ минимизирует норму отклонения, т. е. наилучшее приближение здесь существует, но оно не единственно.

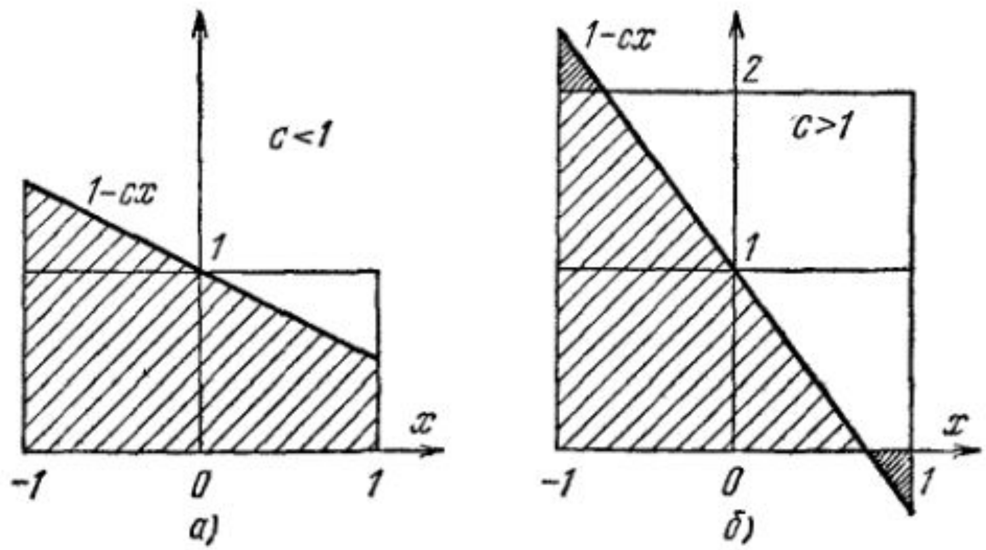



Рис. 10.

Выведем достаточное условие существования наилучшего приближения. Пусть в линейном пространстве функций выбрано множество, образованное функциями вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x), \tag{37}$$

где функции $\varphi_k(x)$ можно считать линейно-независимыми. Это множество есть линейное подпространство нашего пространства. Изменим один из коэффициентов суммы (37) на величину $\delta a_k$; из неравенства треугольника (1.3) следует

$$\big|\,\|y-(\varphi+\delta\varphi)\| - \|y-\varphi\|\,\big| \leqslant \|\delta\varphi\| = |\delta a_k| \cdot \|\varphi_k\|,$$

т. е. норма $\|y-\varphi\|$ непрерывно зависит от $a_k$. Очевидно, $\|\varphi\|$ также есть непрерывная функция коэффициентов $a_k$.

Рассмотрим нормы как функции координат $a_k$. Сфера

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$$

есть замкнутое ограниченное множество, поэтому $\|\varphi\|$ на этой сфере имеет точную нижнюю грань $\mu$ и в силу непрерывности достигает ее при некотором $\tilde{\varphi}(x)$. Очевидно, $\mu > 0$; в противном случае $\tilde{\varphi}(x) \equiv 0$, что противоречит линейной независимости $\varphi_k(x)$.

Возьмем шар $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant R^2 = |\nu + \|y\| + \varepsilon|^2 / \mu^2$, где $\varepsilon$ — какое-то положительное число. В силу однородности нормы функции вне этого шара $\|\varphi\| \geqslant \mu R = \nu + \|y\| + \varepsilon$ и, следовательно, $\|y - \varphi\| \geqslant \geqslant \|\varphi\| - \|y\| \geqslant \nu + \varepsilon$. Значит, вне этого шара норма погрешности заведомо далека от нижней грани. Только внутри шара $y(x)$ и $\varphi(x)$ достаточно близки по норме. Но шар — ограниченное и замкнутое множество значений координат $a_k$, поэтому непрерывная функция координат $\|y - \varphi\|$ достигает на нем точной нижней грани.

Следовательно, в любом линейном нормированном пространстве при линейной аппроксимации (37) наилучшее приближение существует, хотя не во всяком линейном пространстве оно единственно.

**1. Наилучшие приближения.** Поскольку чебышевская норма сильнее нормы $L_p$, то принято считать, что равномерная аппроксимация лучше аппроксимации в среднем. Поэтому поиску равномерных и особенно *наилучших равномерных* приближений, определяемых условием

$$\Delta(y, \varphi) = \min, \text{ где } \Delta(y, \varphi) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y(x) - \varphi(x)|, \qquad (52)$$

где минимум ищется на множестве функций $\varphi(x)$, посвящено много работ. В частности, получены следующие результаты (доказательства большинства из них приведены в учебнике И. С. Березина и Н. П. Жидкова [4]).