

**Тема :**  
**«Преобразование  
графиков функции»**

# Цели:

- 1) Систематизировать приемы построения графиков.
  
- 2) Показать их применение при построении:
  - а) графиков сложных функций;
  - б) при решении заданий ЕГЭ из части С.



# Рассмотрим основные правила преобразования графиков на примерах элементарных функций

# 1) Преобразование симметрии относительно оси $x$

$f(x) \rightarrow -f(x)$

Примеры:

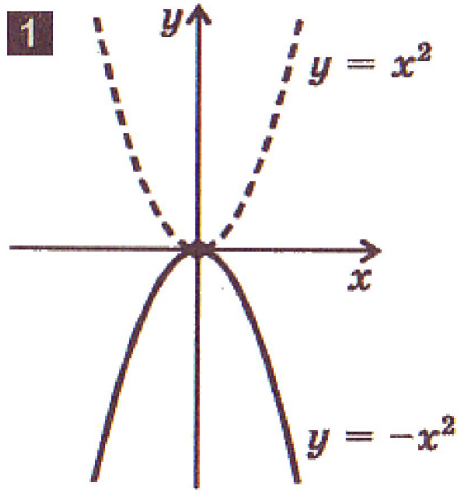
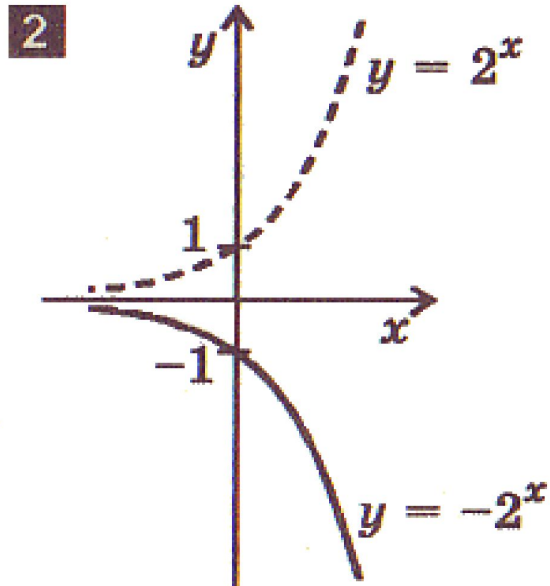
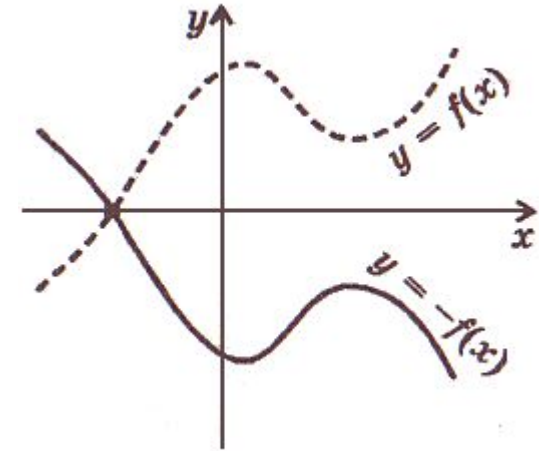
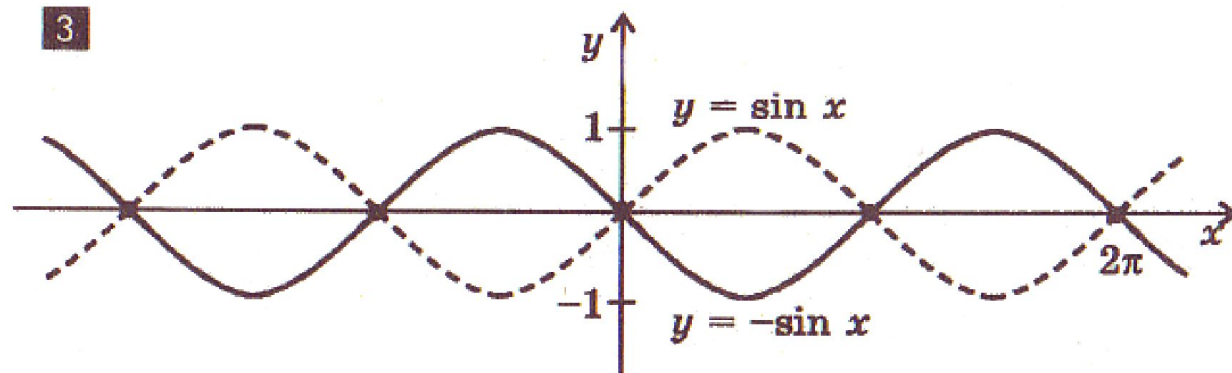


График функции  $y = -f(x)$  получается преобразованием симметрии графика функции  $y = f(x)$  относительно оси  $x$ .



**Замечание.** Точки пересечения графика с осью  $x$  остаются неизменными.



## 2) Преобразование симметрии относительно оси $y$ $f(x) \leftrightarrow f(-x)$

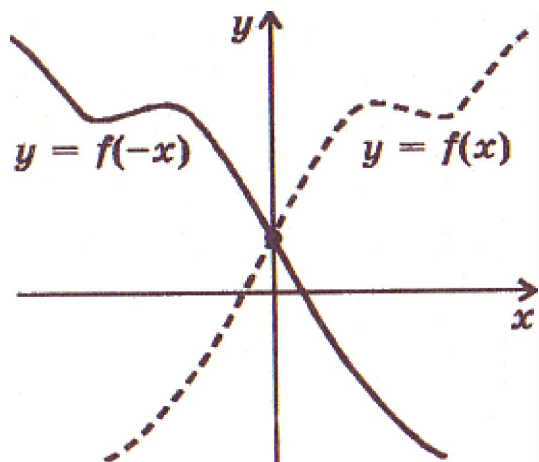


График функции  $y=f(-x)$  получается преобразованием симметрии графика функции  $y=f(x)$  относительно оси  $y$ .

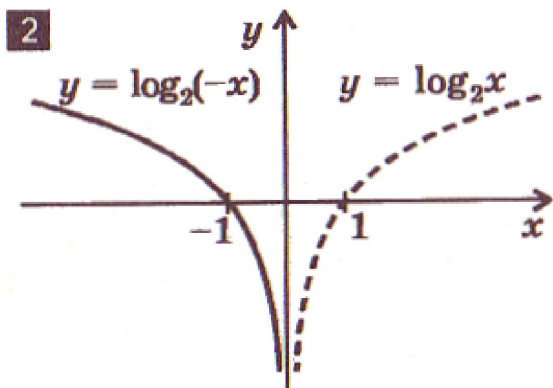
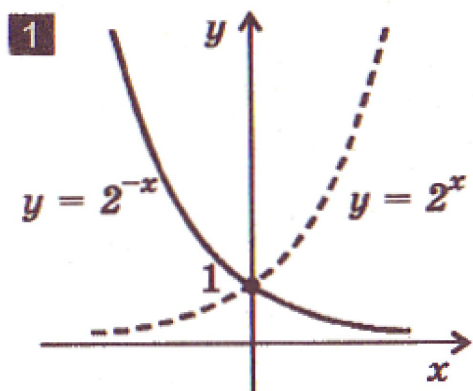
**Замечание.** Точка пересечения графика с осью  $y$  остается неизменной.

**Замечание 1.** График четной функции не изменяется при отражении относительно оси  $y$ , поскольку для четной функции  $f(-x)=f(x)$ . **Пример:**  $(-x)^2=x^2$

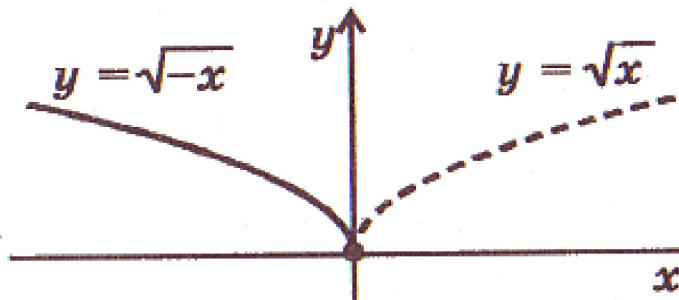
**Замечание 2.** График нечетной функции изменяется одинаково как при отражении относительно оси  $x$ , так и при отражении относительно оси  $y$ , поскольку для нечетной функции  $f(-x)=-f(x)$ .

**Пример:**  $\sin(-x)=-\sin x$ .

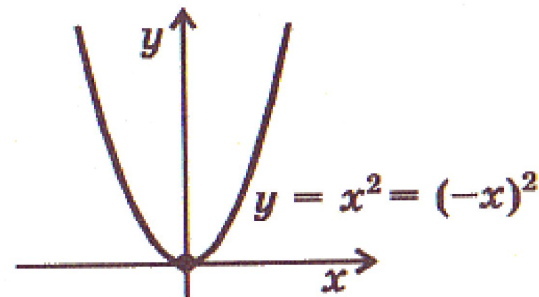
Примеры:



3



4

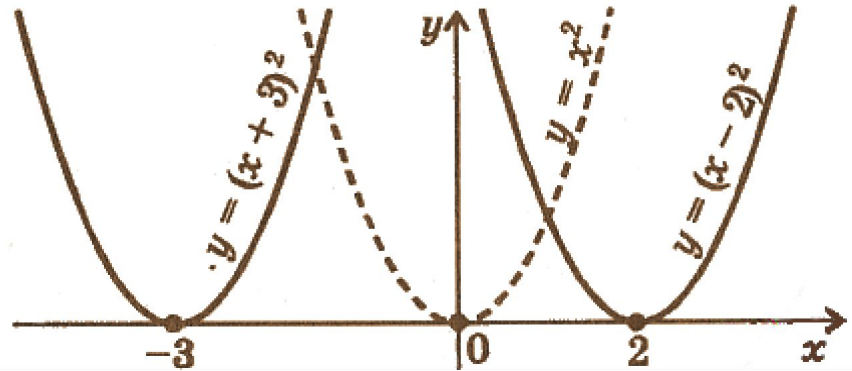


### 3) Параллельный перенос вдоль оси $x$ $f(x) \rightarrow f(x-a)$

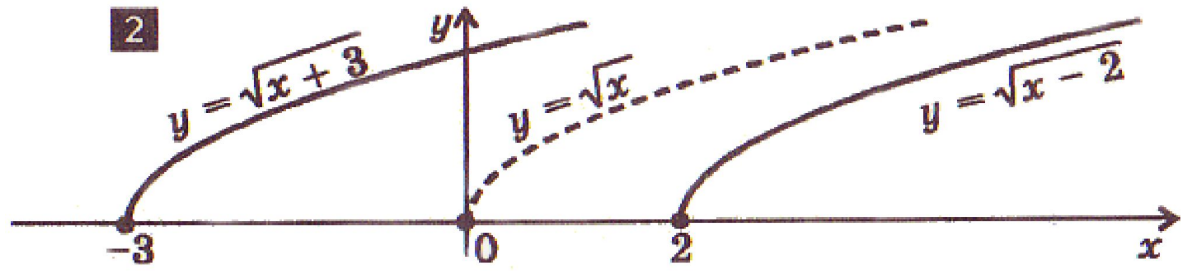
Примеры:

График функции  $y=f(x-a)$  получается параллельным переносом графика функции  $y=f(x)$  вдоль оси  $x$  на  $|a|$  вправо при  $a>0$  и влево при  $a<0$ .

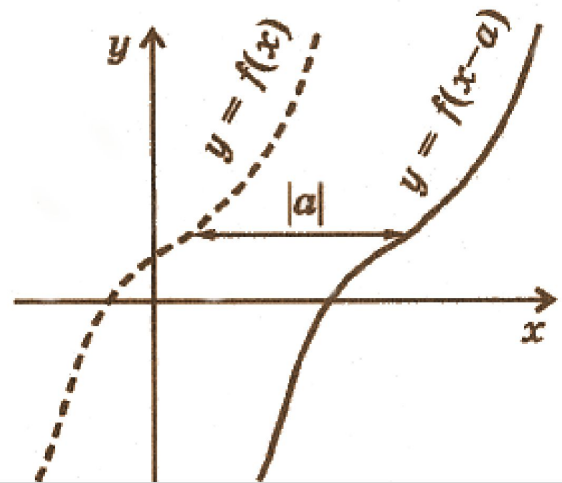
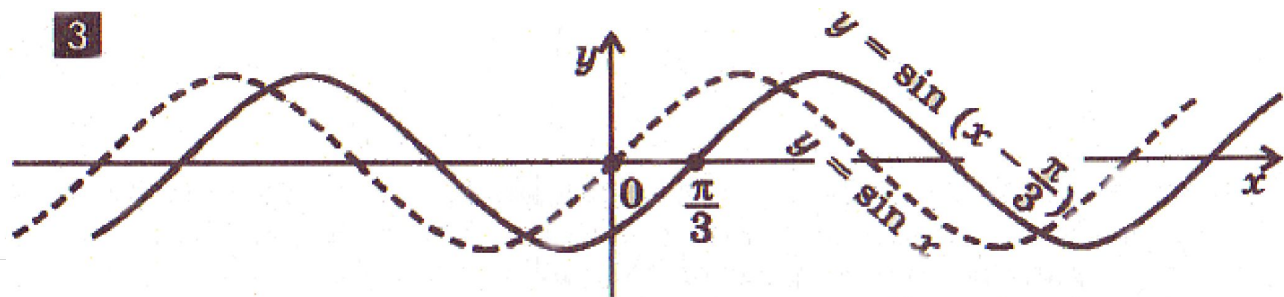
1



2



3



**Замечание.** График периодической функции с периодом  $T$  не изменяется при параллельных переносах вдоль оси  $x$  на  $nT$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

# 4) Параллельный перенос вдоль оси $y$ $f(x) \rightarrow f(x) + b$

Примеры:

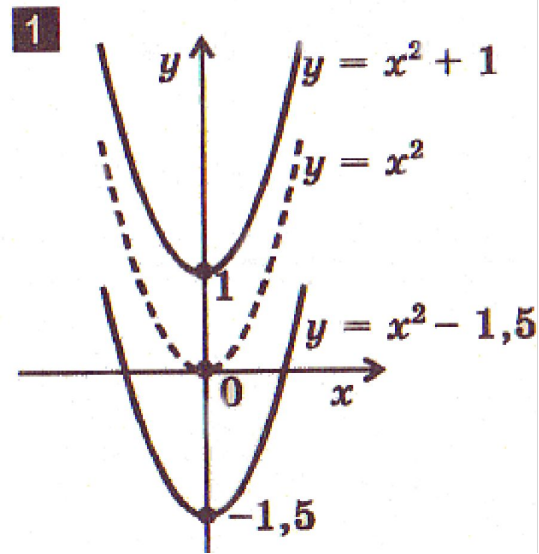
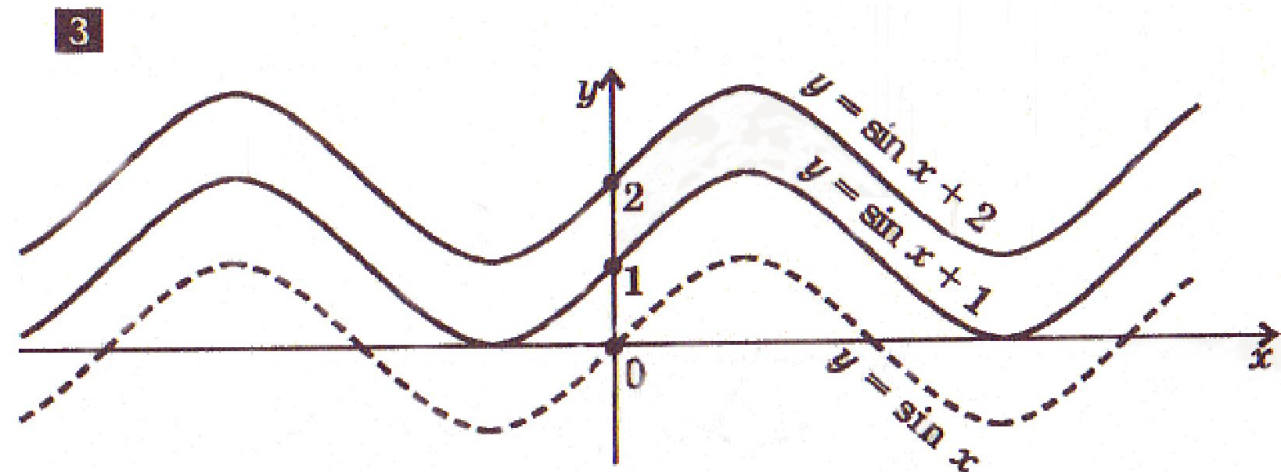
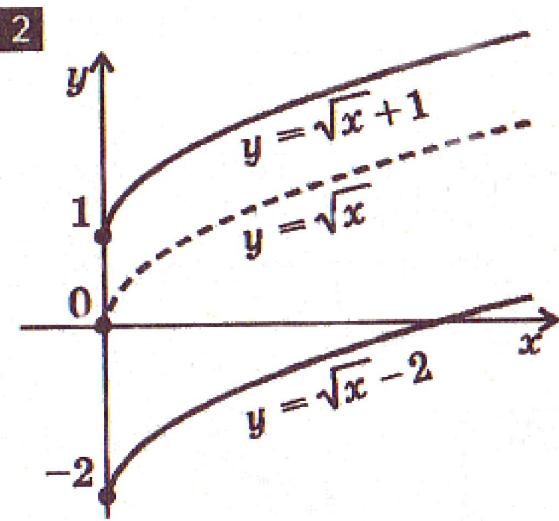
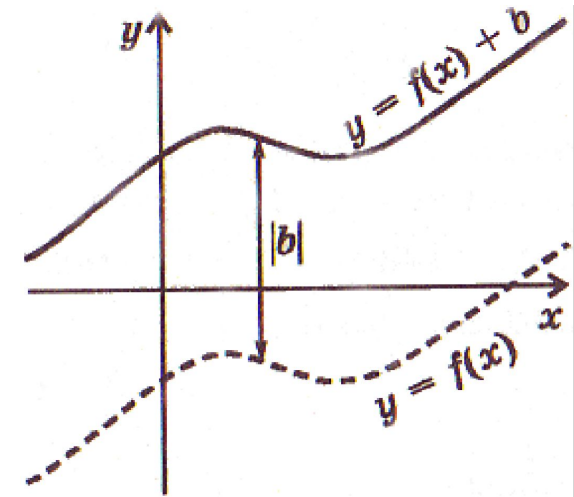


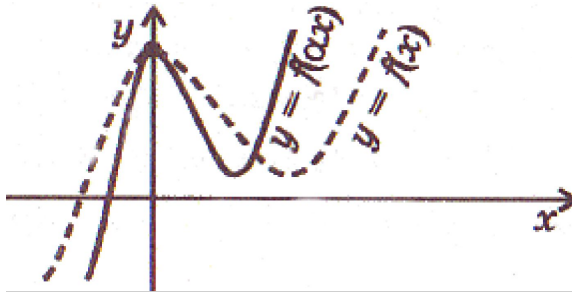
График функции  $y=f(x)+b$  получается параллельным переносом графика функции  $y=f(x)$  вдоль оси  $y$  на  $|b|$  вверх при  $b>0$  и вниз при  $b<0$ .





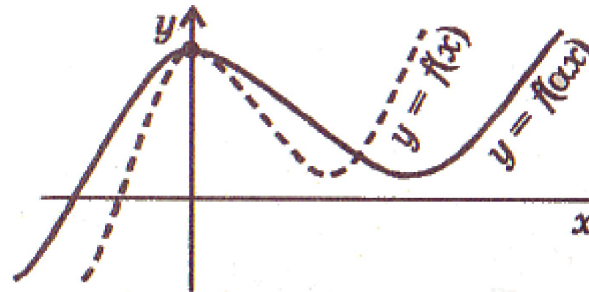
# 5) Сжатие и растяжение вдоль оси $x$ $f(x) \square f(\alpha x)$ , где $\alpha > 0$

$\alpha > 1$



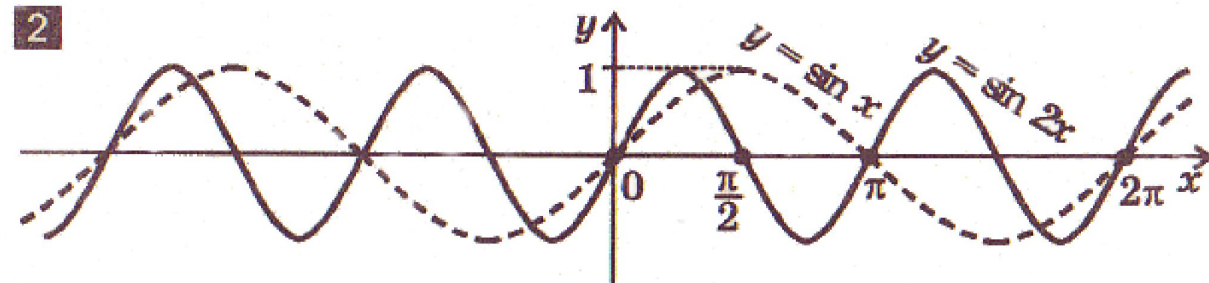
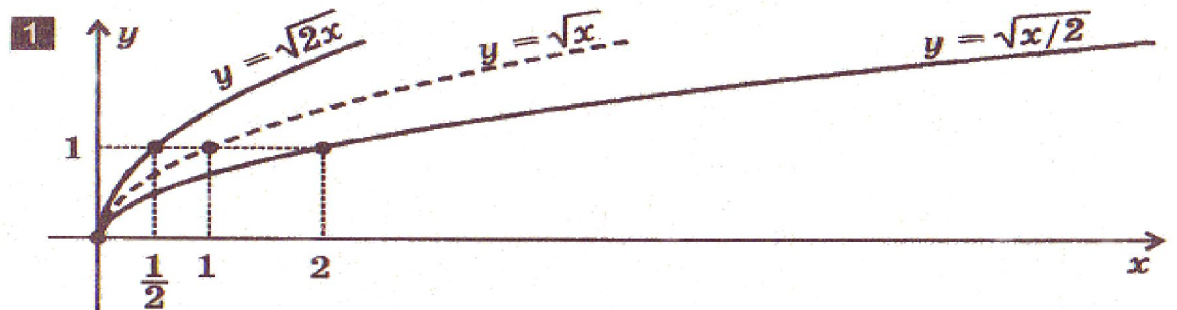
$\alpha > 1$  График функции  $y=f(\alpha x)$  получается сжатием графика функции  $y=f(x)$  вдоль оси  $x$  в  $\alpha$  раз.

$0 < \alpha < 1$



$0 < \alpha < 1$  График функции  $y=f(\alpha x)$  получается растяжением графика функции  $y=f(x)$  вдоль оси  $x$  в  $1/\alpha$  раз.

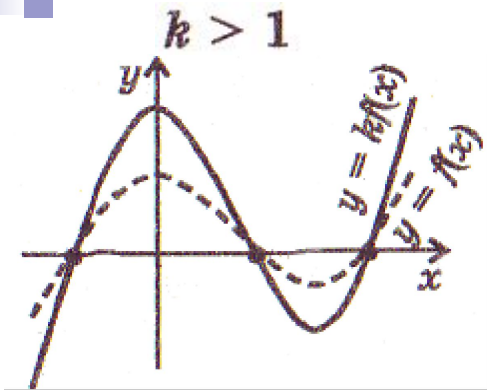
Примеры:



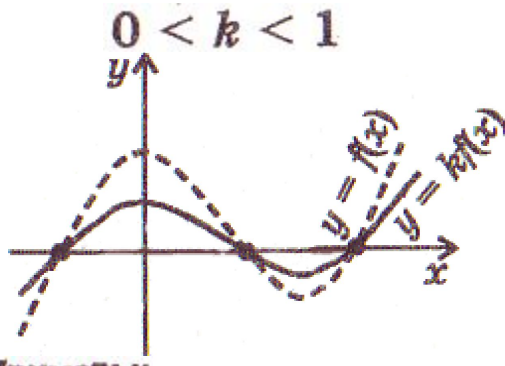
**Замечание.** Точки с пересечения графика с осью  $y$  остаются неизменными.



## 6) Сжатие и растяжение вдоль оси $y$ $f(x) \rightarrow kf(x)$ , где $k > 0$



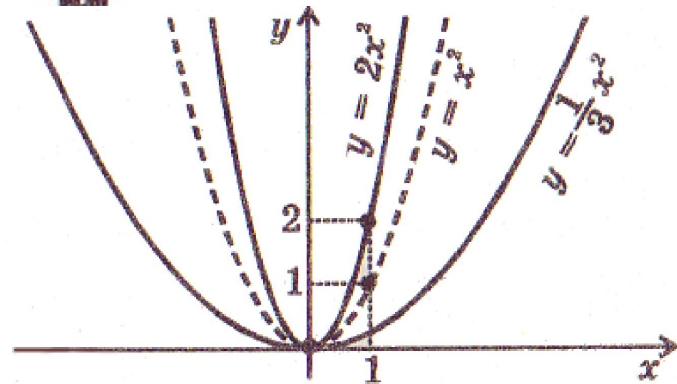
$k > 1$  График функции  $y = kf(x)$  получается растяжением графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси  $y$  в  $k$  раз.



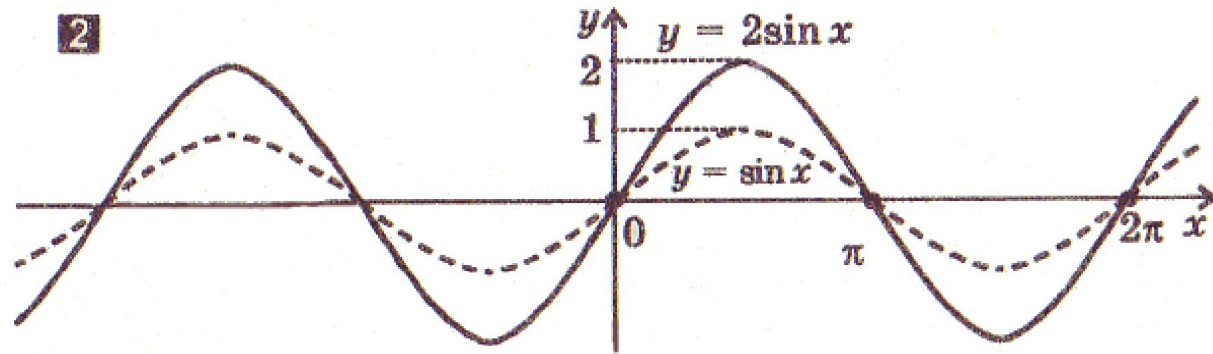
$0 < k < 1$  График функции  $y = kf(x)$  получается сжатием графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси  $y$  в  $1/k$  раз.

Примеры:

1



2



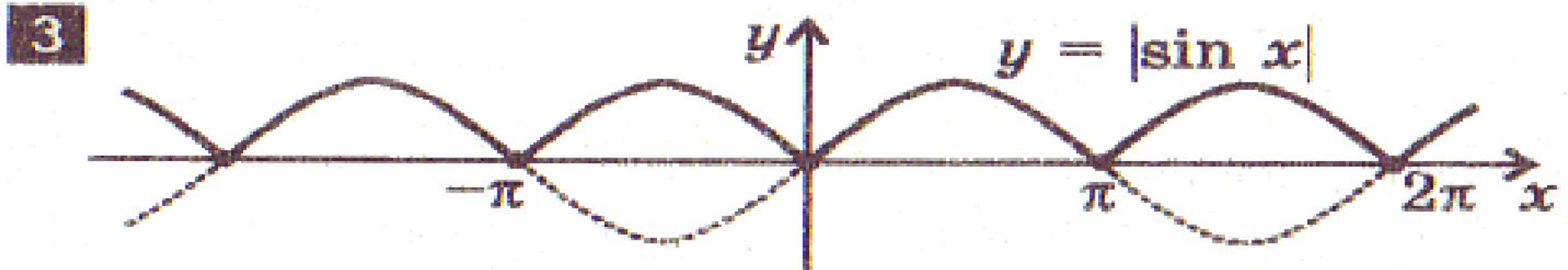
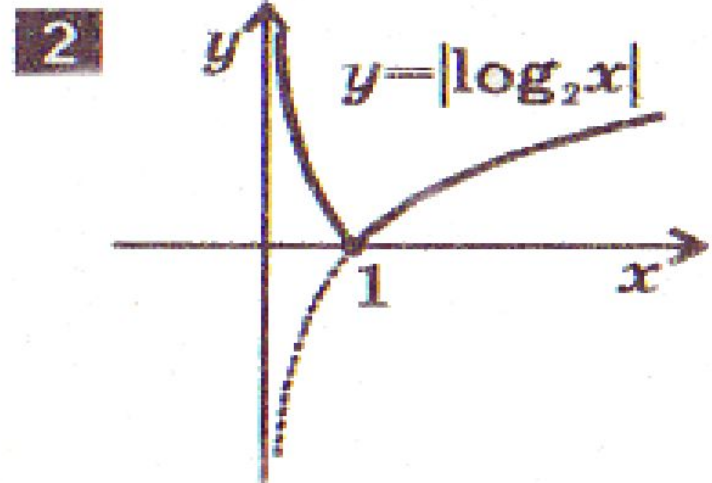
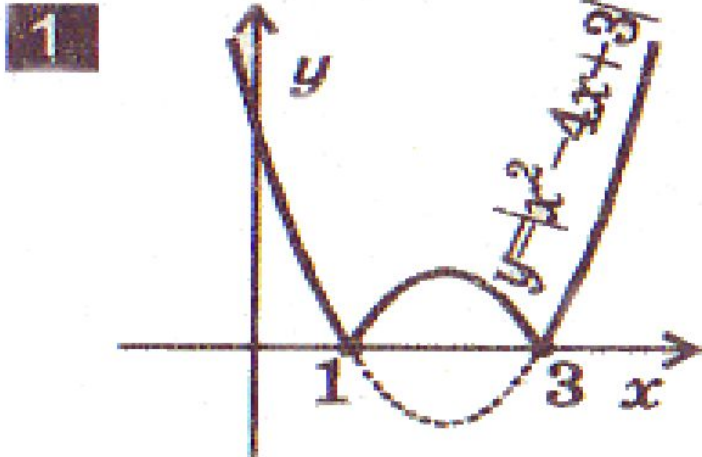
**Замечание.** Точки пересечения графика с осью  $x$  остаются неизменными.

# 7) Построение графика функции $y=|f(x)|$

Части графика функции  $y=f(x)$ , лежащие выше оси  $x$  и на оси  $x$ , остаются без изменения, а лежащие ниже оси  $x$  – симметрично отображаются относительно этой оси (вверх).

**Замечание.** Функция  $y=|f(x)|$  неотрицательна (ее график расположен в верхней полуплоскости).

## Примеры:

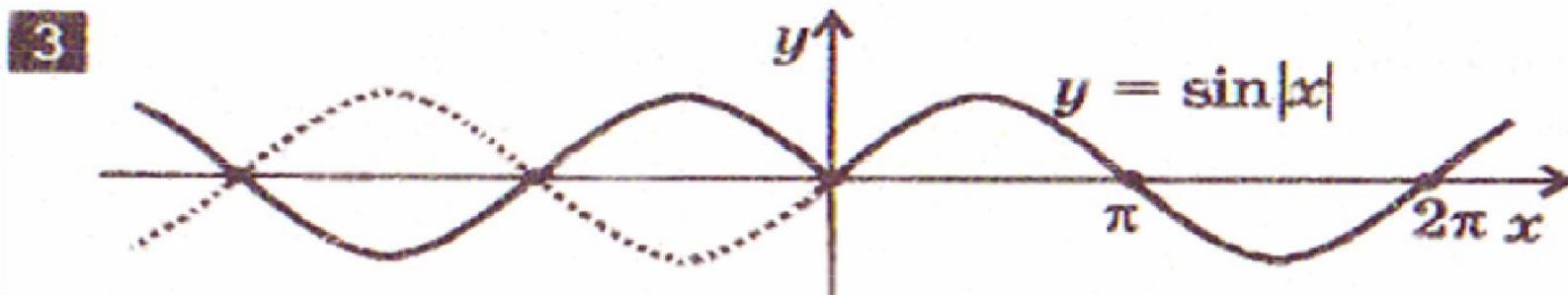
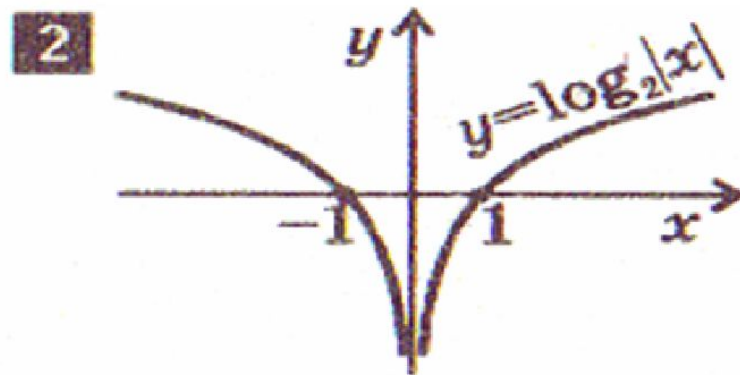
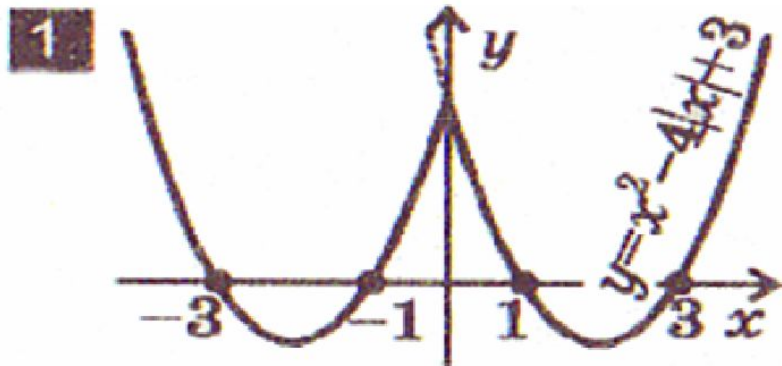


## 8) Построение графика функции $y=f(|x|)$

Часть графика функции  $y=f(x)$ , лежащая левее оси  $y$ , удаляется, а часть, лежащая правее оси  $y$  – остается без изменения и, кроме того, симметрично отражается относительно оси  $y$  (влево). Точка графика лежащая на оси  $y$ , остается неизменной.

**Замечание.** Функция  $y=f(|x|)$  четная (ее график симметричен относительно оси  $y$ ).

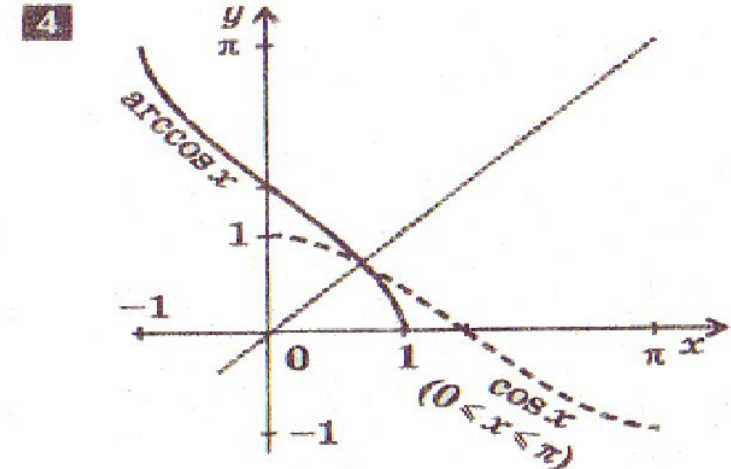
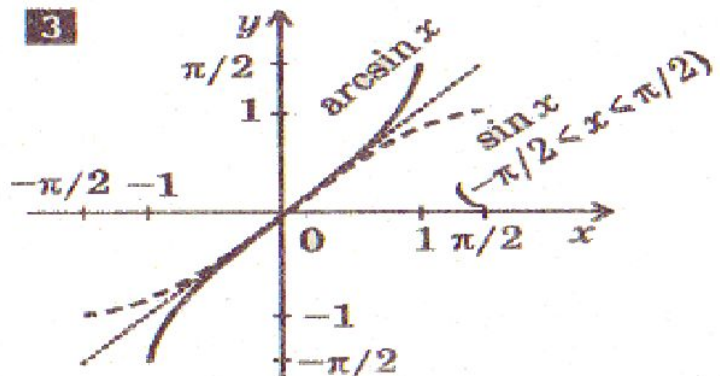
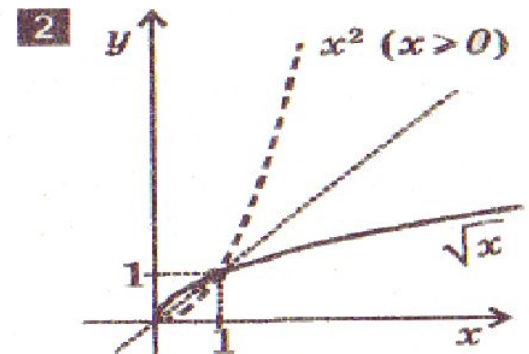
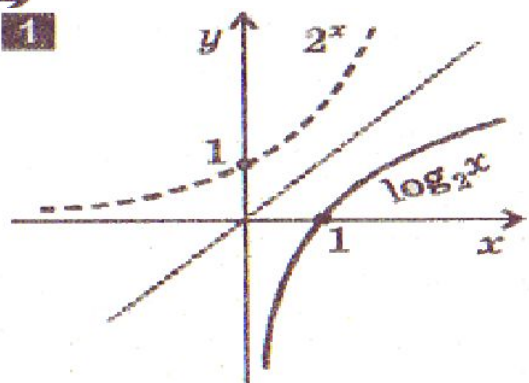
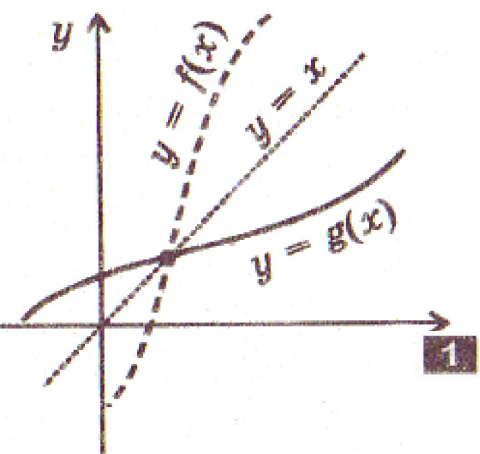
### Примеры:




# 9) Построение графика обратной функции

График функции  $y=g(x)$ , обратной функции  $y=f(x)$ , можно получить преобразованием симметрии графика функции  $y=f(x)$  относительно прямой  $y=x$ .

**Замечание.** Описанное построение производить только для функции, имеющей обратную.



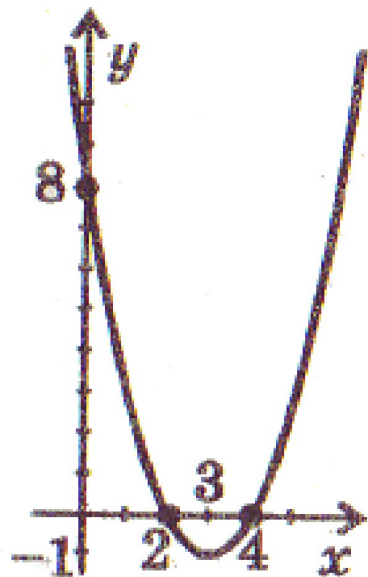


# Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

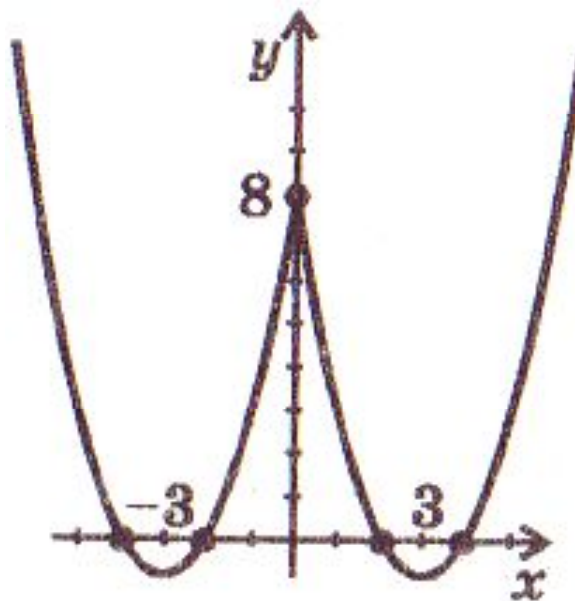
■ Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

$$y = |x^2 - 6|x| + 8| = ||x|^2 - 6|x| + 8| = (|x| - 3)^2 - 1$$

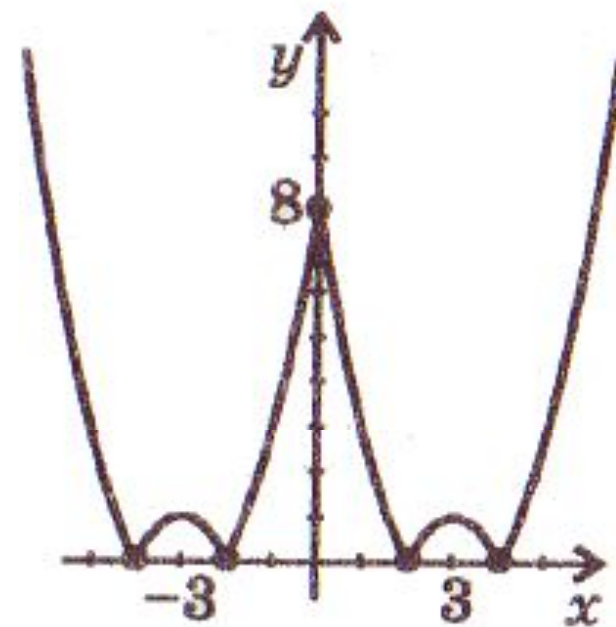
$$y = x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1$$



$$y = (|x| - 3)^2 - 1$$



$$y = |(|x| - 3)^2 - 1|$$

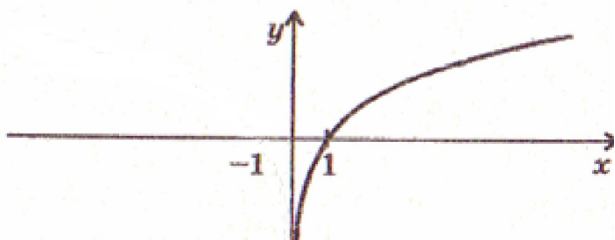




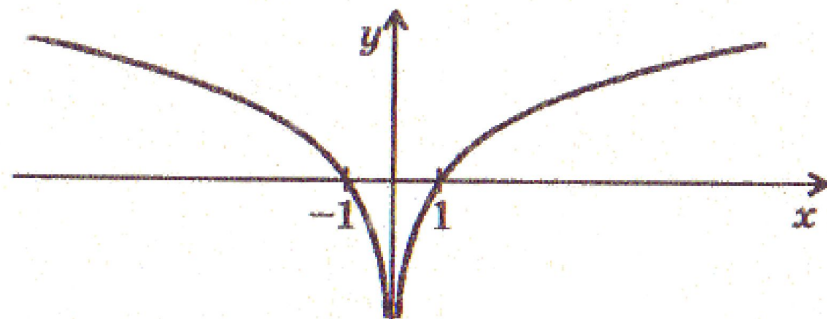
Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

$$y = |\log_2(|x - 1|)|$$

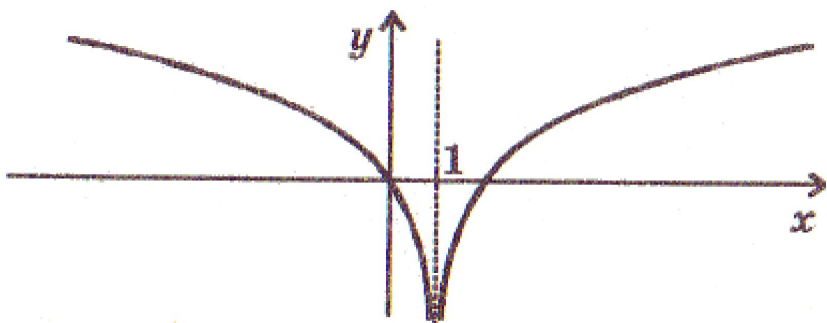
$$y = \log_2 x$$



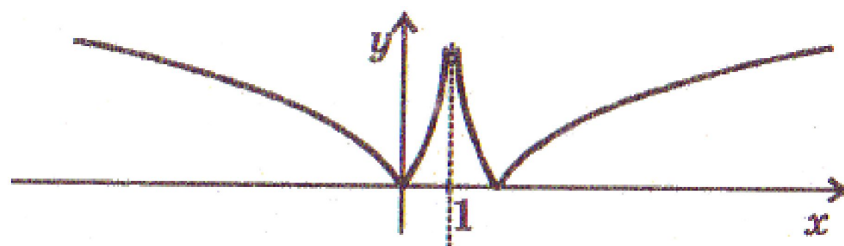
$$y = \log_2|x|$$



$$y = \log_2(|x - 1|)$$



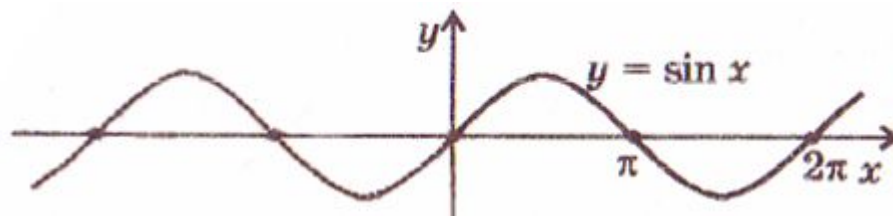
$$y = |\log_2(|x - 1|)|$$



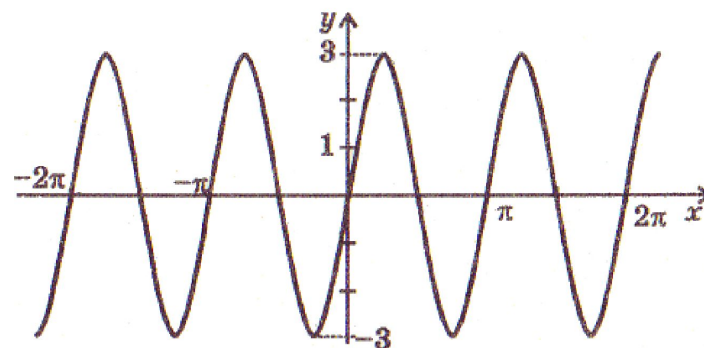


# Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

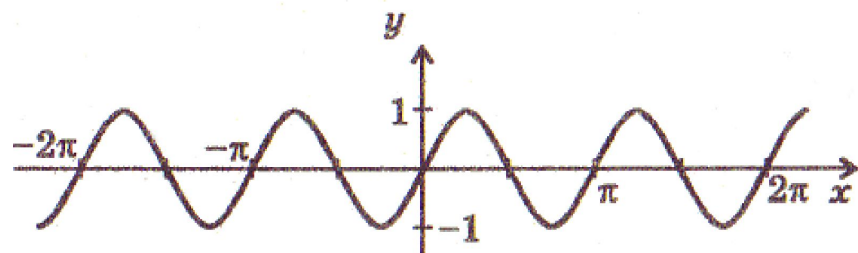
$$y = |3\sin 2x| - 1$$



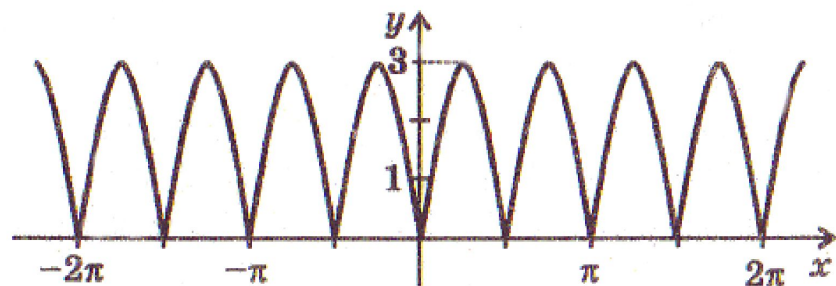
$$y = 3\sin 2x$$



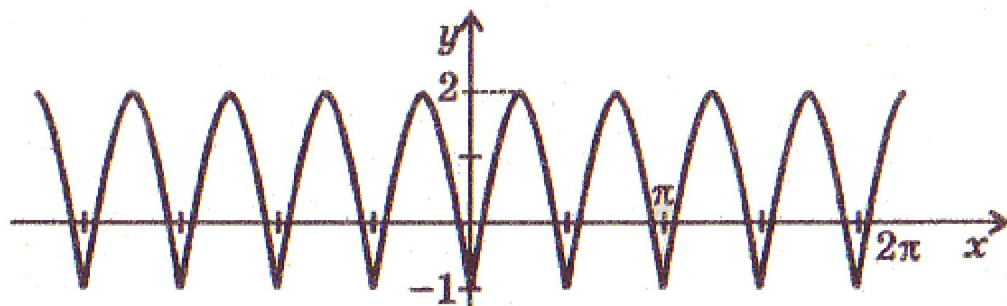
$$y = \sin 2x$$




$$y = |3\sin 2x|$$



$$y = |3\sin 2x| - 1$$





Применение правил  
преобразования  
графиков при  
решении заданий ЕГЭ  
(части С).

# Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5^{x-1} - y = 0 \\ |x-4| + 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5^{x-1} \\ y = |x-4| + 3 \end{cases}$$

В одной системе координат, построим графики функций: а)

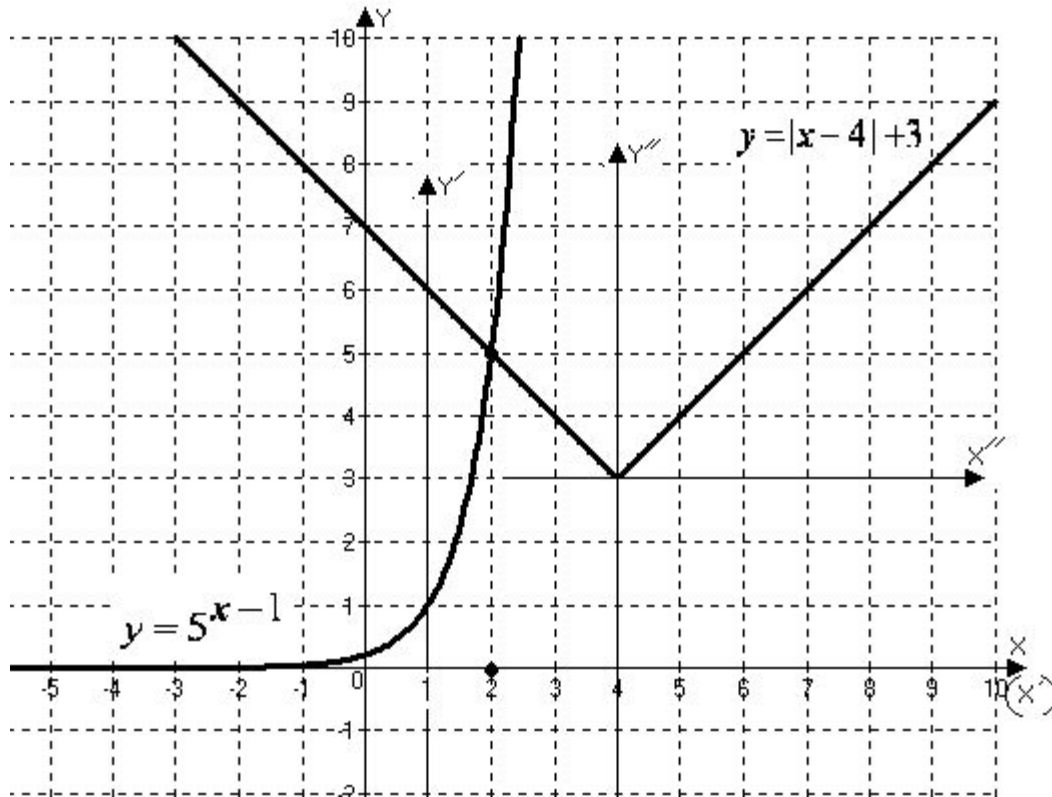
$$y = 5^{x-1}$$

График этой функции получается в результате построения графика  $y = 5^x$

$y = 5^x$	X	-1	0	1	2
	Y	0,2	1	5	25

в новой системе координат  $x'o'y'$ , где  $O'(1;0)$

б)  $y = |x-4| + 3$  В системе  $x''o''y''$  где  $O''(4;3)$  построим график  $y = |x|$ .



Решением системы являются координаты точки пересечения графиков

и  
 Пара чисел:  $\begin{matrix} y = 5^{x-1} \\ y = |x-4| + 3, \\ x \quad y \\ (2; 5). \end{matrix}$

Проверка:

$$\begin{cases} 5^{2-1} - 5 = 0 \\ |2-4| + 3 = 5 \end{cases} \begin{matrix} \text{(верно)} \\ \text{(верно)} \end{matrix}$$

Ответ: (2;5).

Решить уравнение:  $f(g(x)) + g(f(x)) = 32$ , если известно, что

$$f(x) = 0,5x^2 - 2x + 12$$

$$g(x) = \begin{cases} 20, & \text{при } x \geq 5 \\ 0,5 \cdot 2^x + \frac{8}{6-x} & \text{при } x < 5. \end{cases}$$

**Решение:** Преобразуем функцию  $f(x)$ .  $f(x) = 0,5(x^2 - 4x + 4) + 10$

$$f(x) = 0,5(x-2)^2 + 10$$

Так как  $0,5(x-2)^2 \geq 0$ , то  $f(x) \geq 10$

Тогда  $g(f(x)) = 20$ .

Подставим в уравнение  $f(g(x)) + g(f(x)) = 32$ , получим  $f(g(x)) + 20 = 32$ ;

$$f(g(x)) = 12$$

Пусть  $g(x) = t$ , тогда  $f(t) = 12$  или

$$0,5t^2 - 2t + 12 = 12 \quad 0,5t^2 - 2t = 0 \quad t^2 - 4t = 0 \quad t(t-4) = 0 \quad t = 0 \text{ или } t = 4$$

Имеем:  $g(x) = 0$  или  $g(x) = 4$

Так как при  $x \geq 5$   $g(x) = 20$ , то решения уравнений:  $g(x) = 0$  и  $g(x) = 4$  будем искать среди  $x < 5$ .

Тогда: а) Уравнение  $g(x) = 0$  примет вид:

$$0,5 \cdot 2^x + \frac{8}{6-x} = 0 \quad | \cdot 2 \Rightarrow 2^x + \frac{16}{6-x} = 0$$

Так как  $x < 5$ , то  $6-x > 0$

$$\frac{16}{6-x} > 0 \Rightarrow 2^x + \frac{16}{6-x} > 0$$

Вывод: уравнение  $g(x) = 0$  не имеет корней.

б) уравнение  $g(x) = 4$  примет вид:

$$0,5 \cdot 2^x + \frac{8}{6-x} = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} 2^x = 4 - \frac{8}{6-x} \Rightarrow 2^{x-1} = \frac{8}{x-6} + 4$$

В одной системе координат построим графики функций

$$y = 2^{x-1} \quad y = \frac{8}{x-6} + 4$$

a)  $y = 2^{x-1}$

График данной функции получается построением графика  $y = 2^x$

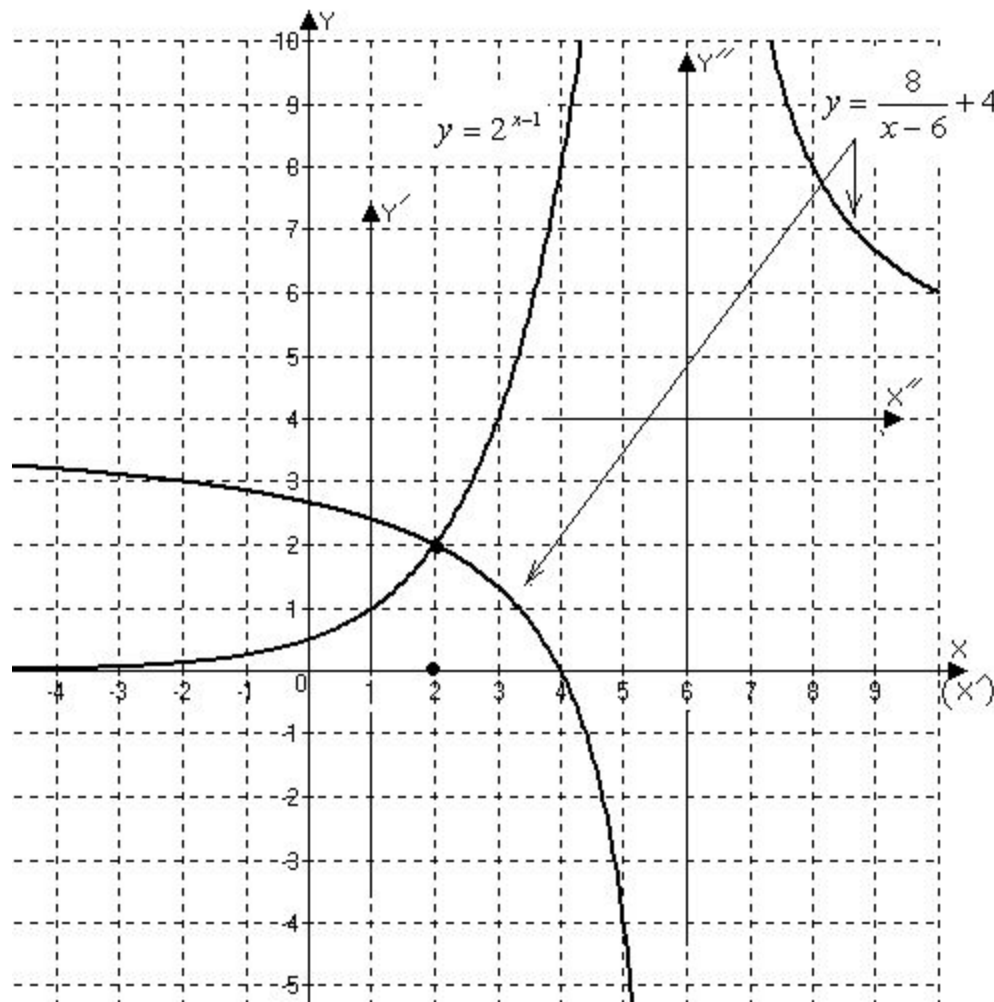
В системе  $x'o'y'$ , где  $o'(1;0)$ .

X	-1	0	1	2	3
Y	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

б)  $y = \frac{8}{x-6} + 4$

В системе  $x''o''y''$  где  $o''(6;4)$  построим график функции

$y = \frac{8}{x}$   
( $x \neq 0$ )



X	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
Y	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1

Условию  $x < 5$  удовлетворяет абсцисса общей точки графиков  $x=2$ .  
Ответ: 2.

# Вывод

:

Мы видим, что правила преобразования графиков существенно упрощают построение графиков сложных функций.

Помогают найти нетрадиционное решение сложных задач.



**Тема :**

**«Преобразование**

**графиков функции»**