# Тема: «Преобразование графиков функции»

# Цели:

1) Систематизировать приемы построения графиков.

2) Показать их применение при построении:

а) графиков сложных функций;

б) при решении заданий ЕГЭ из части С.

Рассмотрим основные правила преобразования графиков на примерах элементарных функций

# 1) Преобразование симметрии относительно оси x f(x)□-f(x)

**Примеры:**

1

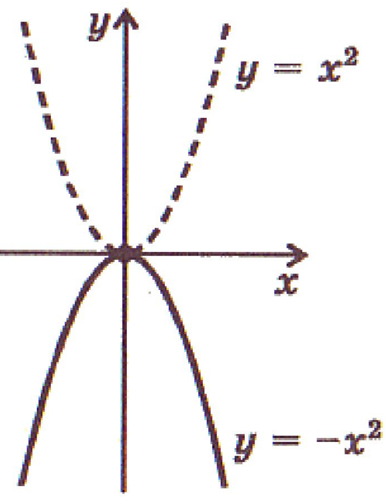
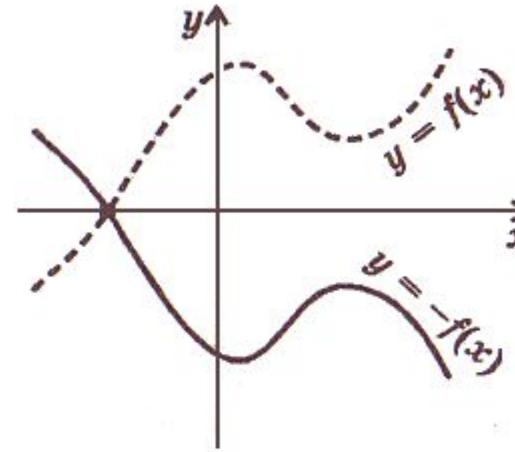
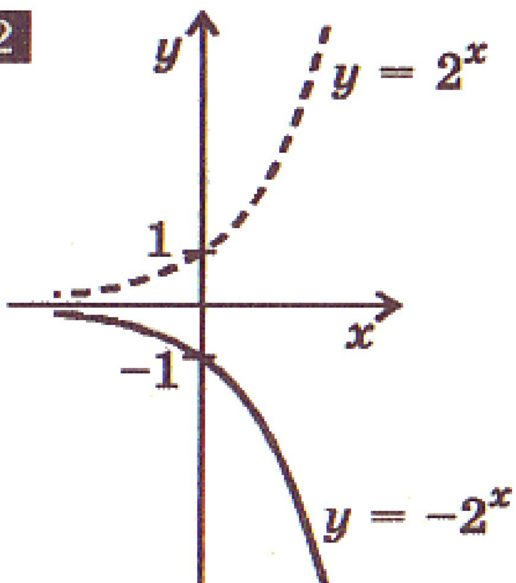



График функции y=-f(x) получается преобразованием симметрии графика функции y=f(x) относительно оси x.

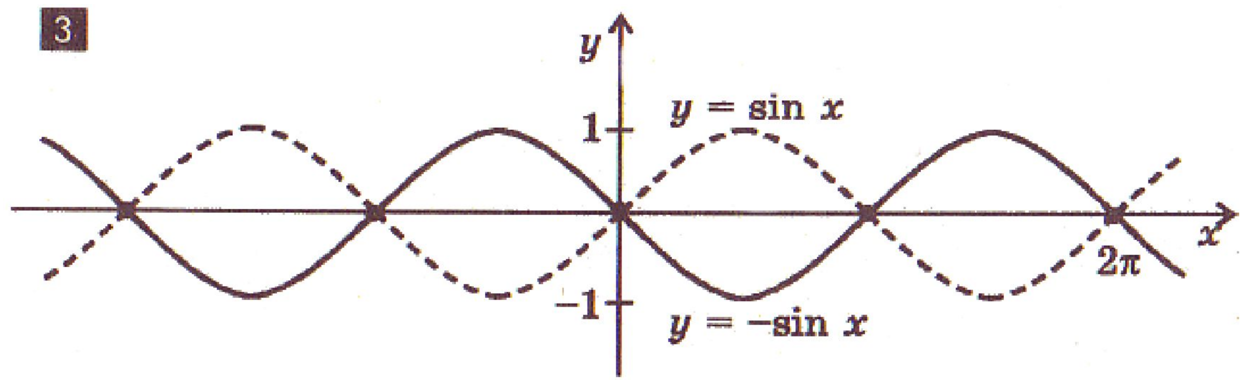
***Замечание.*** *Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.*




2




3



# 2) Преобразование симметрии относительно оси у f(x)□f(-x)

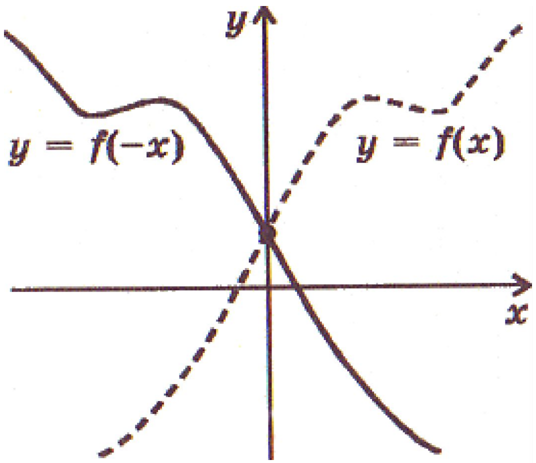


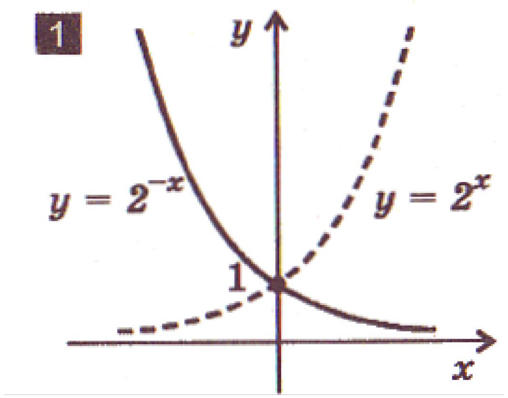

График функции y=f(-x) получается преобразованием симметрии графика функции y=f(x) относительно оси у.

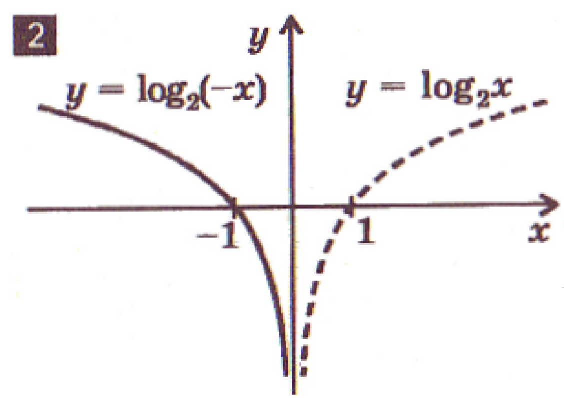
***Замечание.*** Точка пересечения графика с осью у остается неизменной.

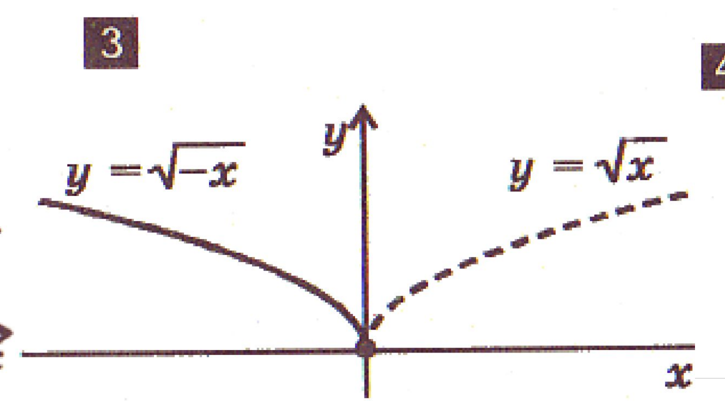
***Замечание 1.*** График четной функции не изменяется при отражении относительно оси у, поскольку для четной функции f(-x)=f(x). ***Пример:*** $(-x)^2=x^2$

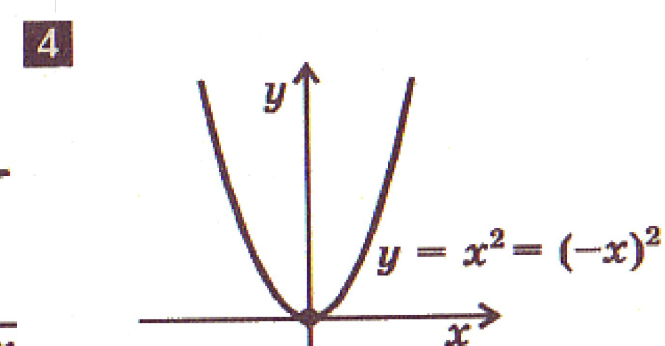
***Замечание 2.*** График нечетной функции изменяется одинаково как при отражении относительно оси х, так и при отражении относительно оси у, посольку для нечетной функции f(-x)=-f(x). ***Пример:*** sin(-x)=-sinx.

***Примеры:***



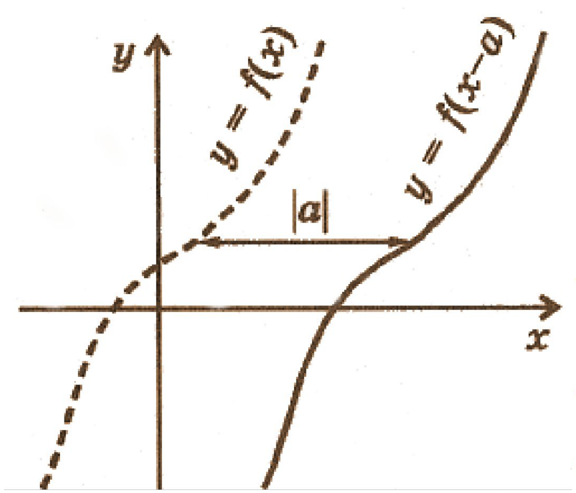



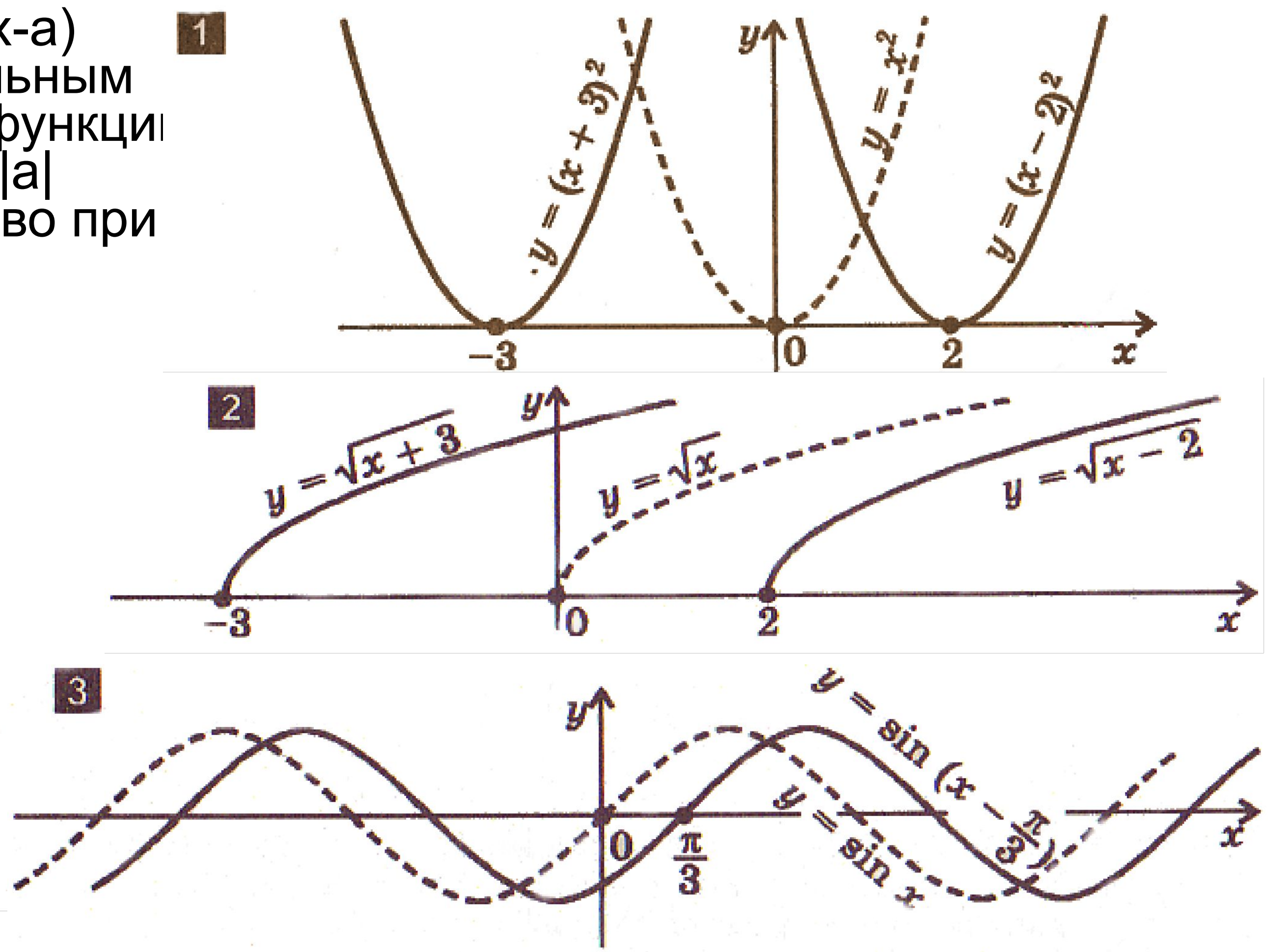



# 3) Параллельный перенос вдоль оси x
## f(x)→**f(x-a)**

График функции y=f(x-a) получается параллельным переносом графика функции y=f(x) вдоль оси x на |a| вправо при a>0 и влево при a<0.




**Примеры:**




***Замечание.*** График периодической функции с периодом T не изменяется при параллельных переносах вдоль оси x на nT, n∈Z.

# 4) Параллельный перенос вдоль оси y f(x)→f(x)+b

***Примеры:***

1

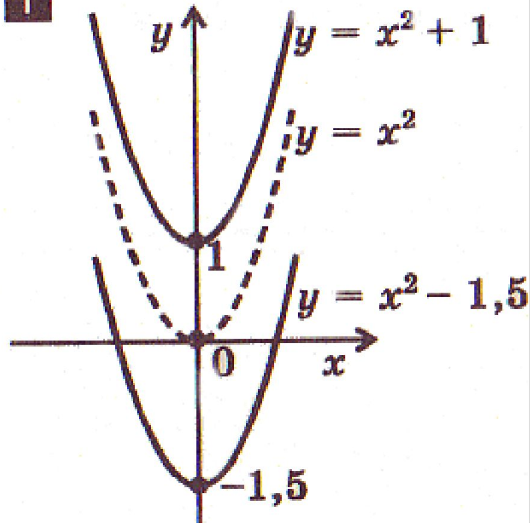
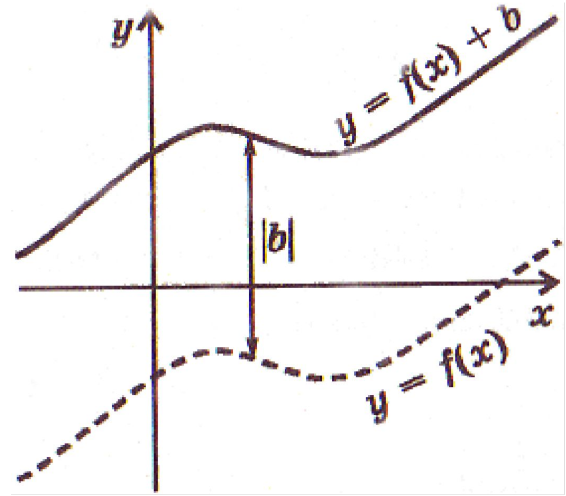
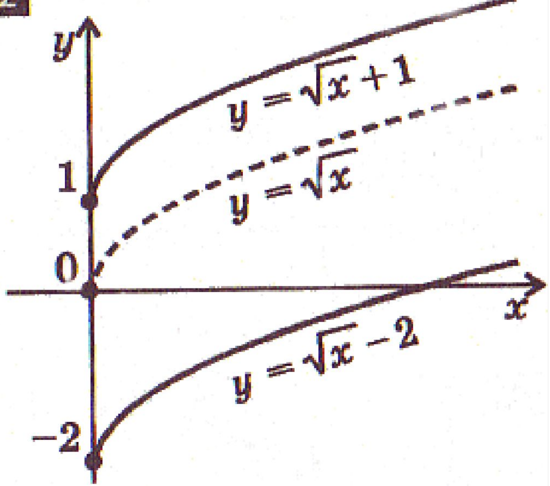


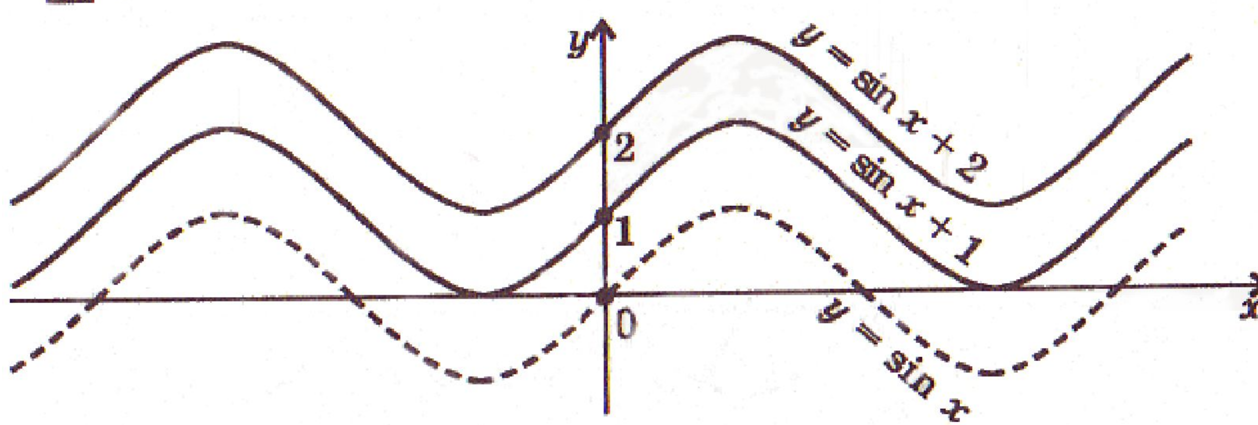

График функции y=f(x)+b получается параллельным переносом графика функции y=f(x) вдоль оси y на |b| вверх при b>0 и вниз при b<0.




2



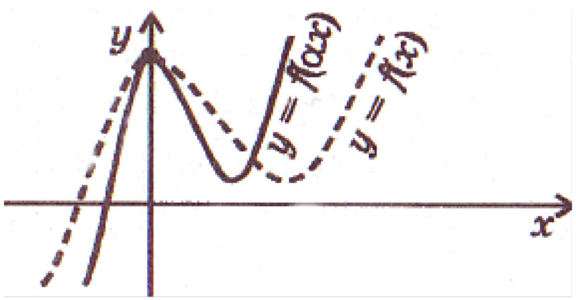

3



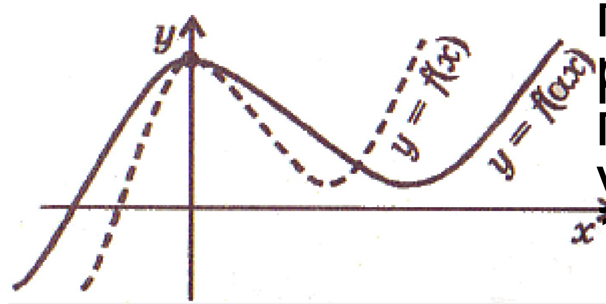
# 5) Сжатие и растяжение вдоль оси х

## f(x)□f(αx), где α>0

α > 1

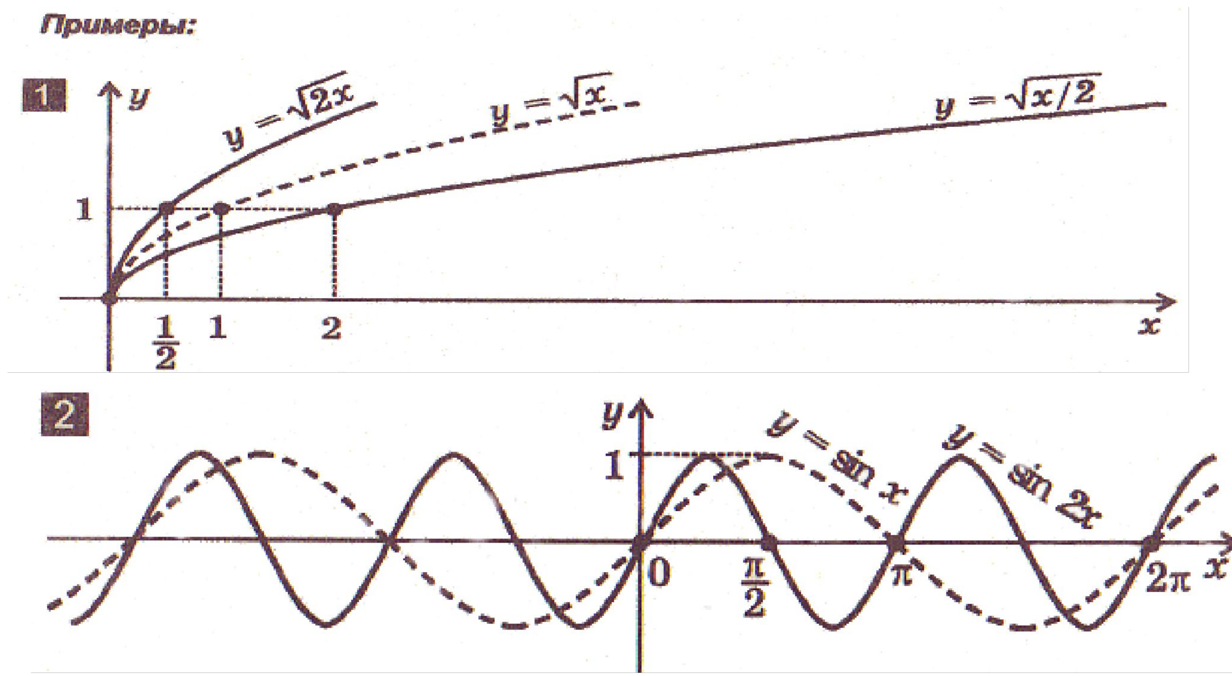



0 < α < 1




0<α<1 График функции y=f(αx) получается растяжением графика функции y=f(x) вдоль оси х в 1/α раз.

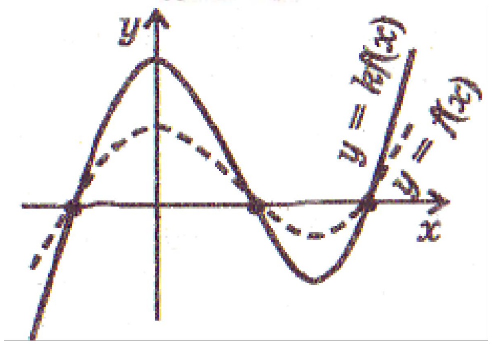
α>1 График функции y=a(αx) получается сжатием графика функции y=f(x) вдоль оси х в α раз.




***Замечание.*** Точки с пересечения графика с осью у остаются неизменными.

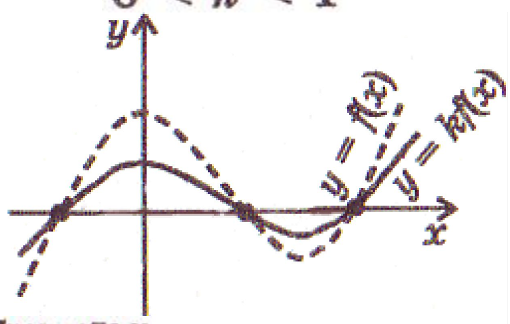
# 6) Сжатие и растяжение вдоль оси y
# f(x)□kf(x), где k>0

$k > 1$




k>1 График функции y=kf(x) получается растяжением графика функции y=f(x) вдоль оси y в k раз.

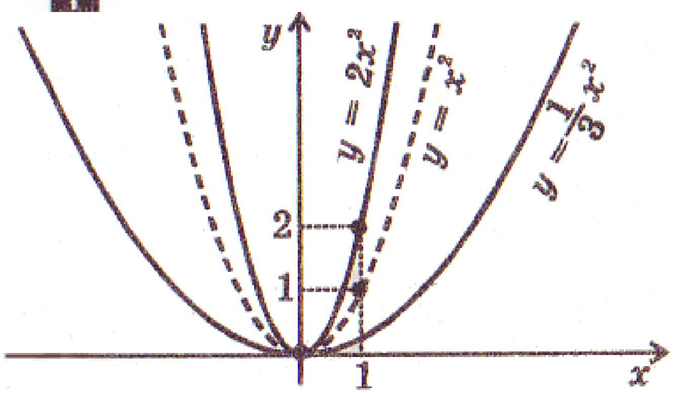
$0 < k < 1$

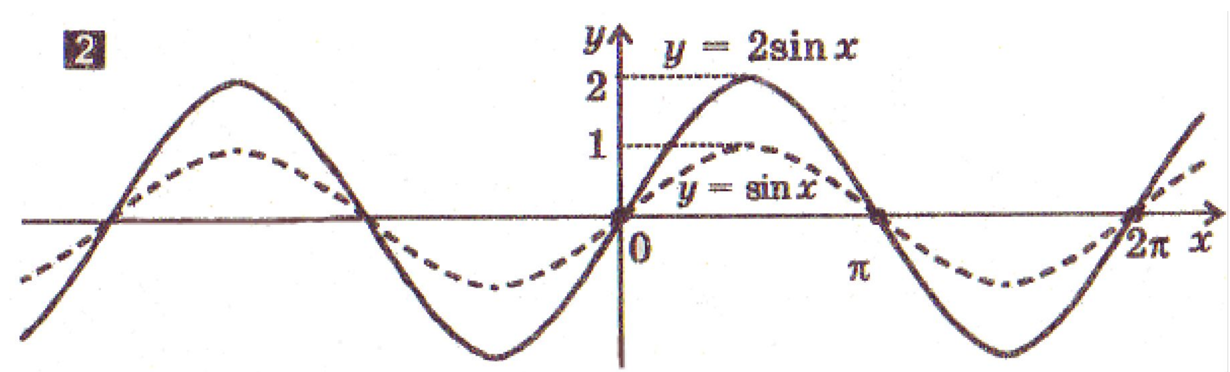



0<k<1 График функции y=kf(x) получается сжатием графика функции y=f(x) вдоль оси y в 1/k раз.

**Примеры:**

1




***Замечание.*** Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.

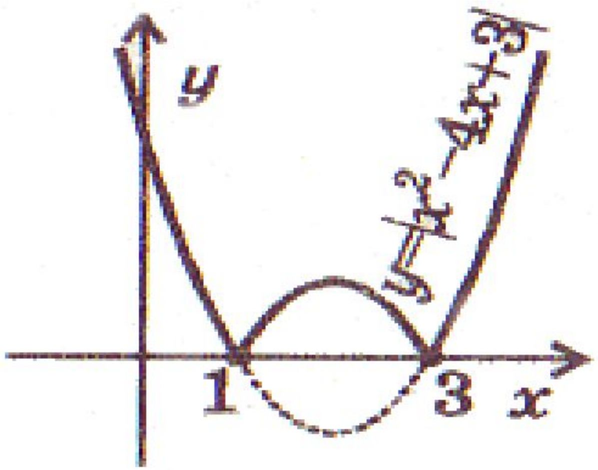
# 7) Построение графика функции y=|f(x)|

Части графика функции y=f(x), лежащие выше оси x и на оси x, остаются без изменения, а лежащие ниже оси x – симметрично отображаются относительно этой оси (вверх).

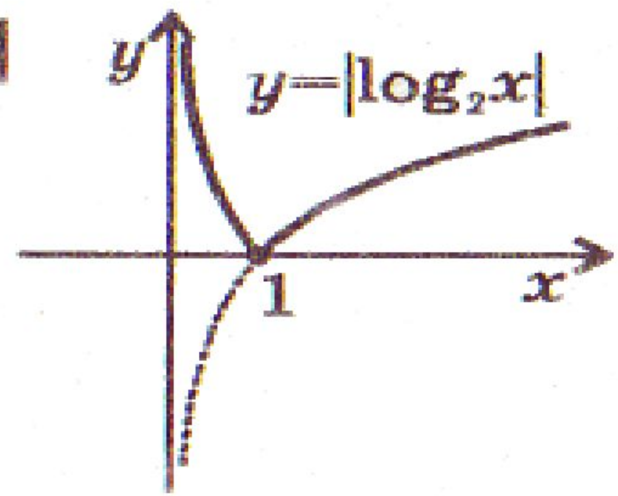
***Замечание.*** Функция y=|f(x)| неотрицательна (ее график расположен в верхней полуплоскости).

## Примеры:

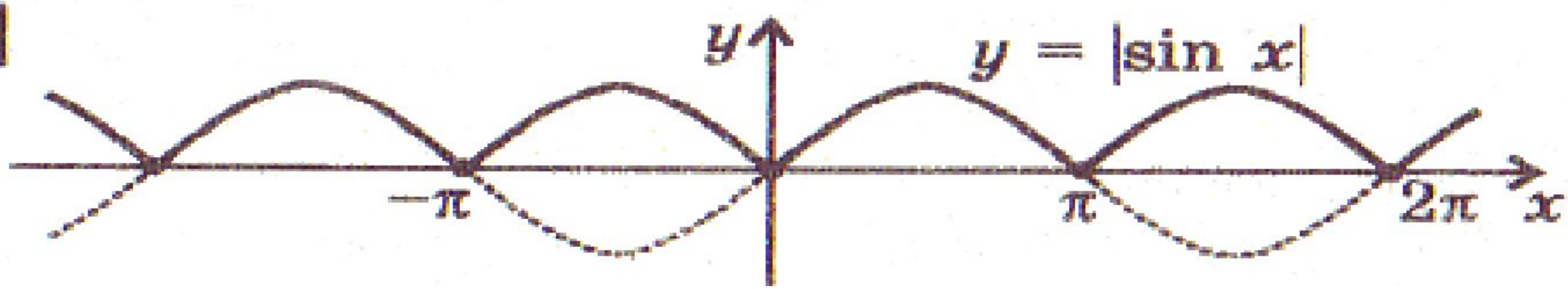
1




2




3

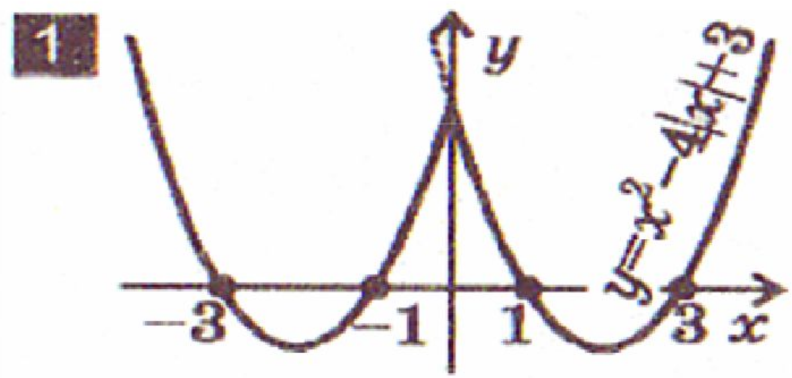


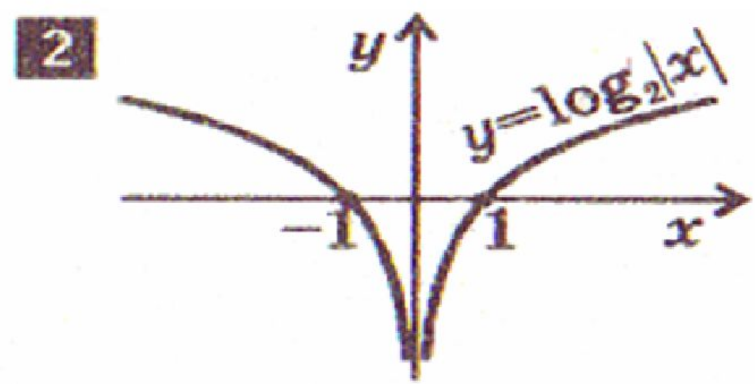
# 8) Построение графика функции y=f(|x|)

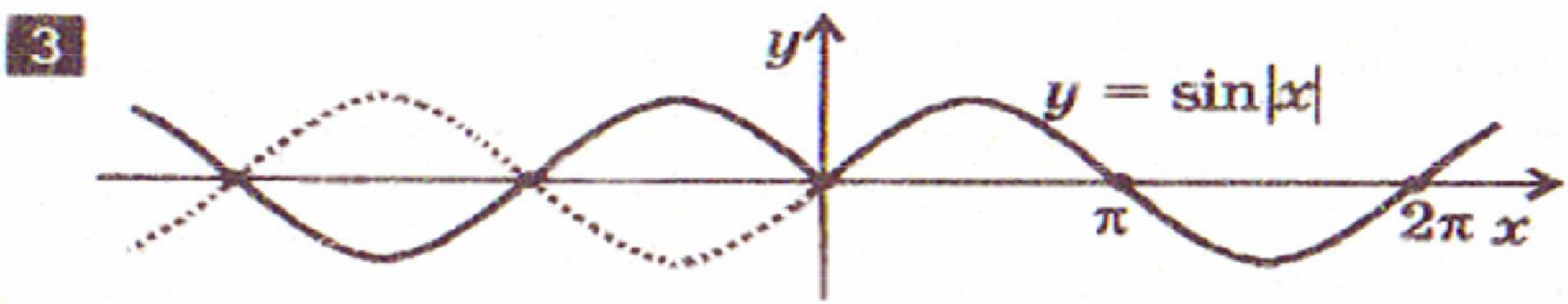
Часть графика функции y=f(x), лежащая левее оси y, удаляется, а часть, лежащая правее оси y – остается без изменения и, кроме того, симметрично отражается относительно оси y (влево). Точка графика лежащая на оси y, остается неизменной.

***Замечание.*** Функция y=f(|x|) четная (ее график симметричен относительно оси y).

## Примеры:



# 9) Построение графика обратной функции

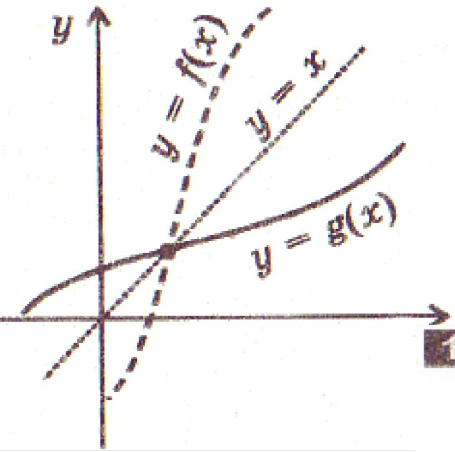
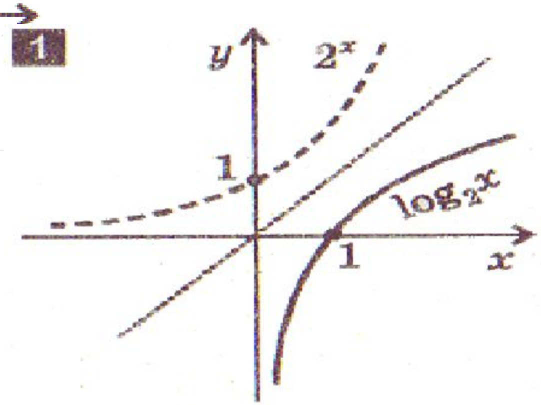
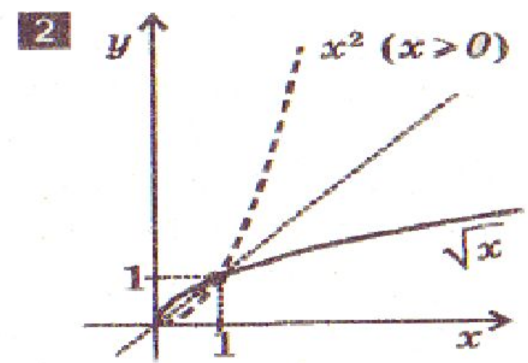
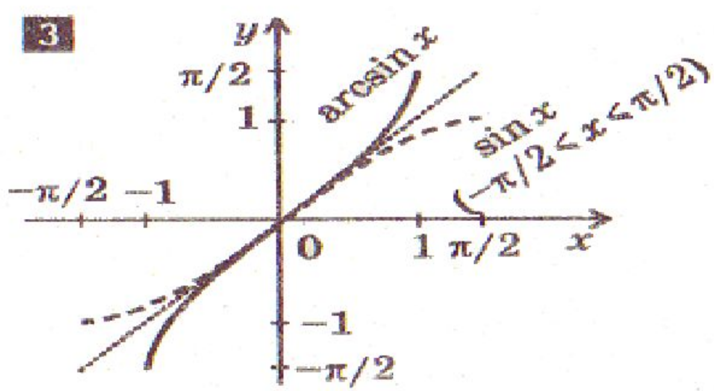


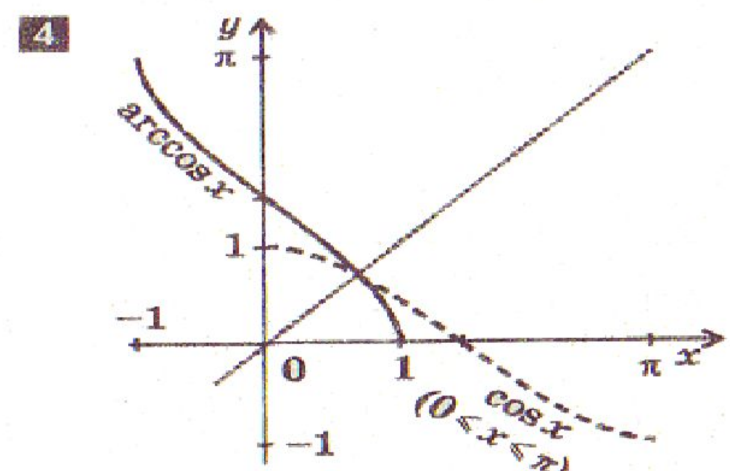

График функции y=*g*(x), обратной функции y=f(x), можно получить преобразованием симметрии графика функции y=f(x) относительно прямой y=x.

***Замечание.*** Описанное построение производить только для функции, имеющей обратную.



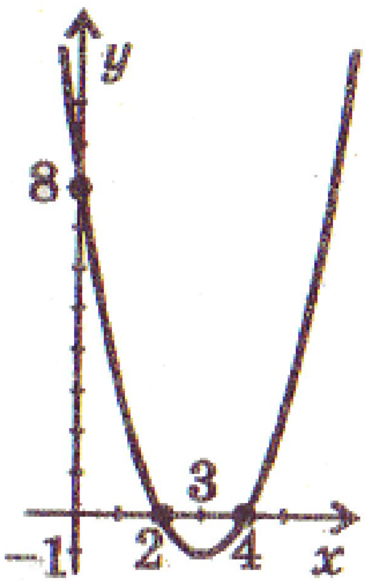



# Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

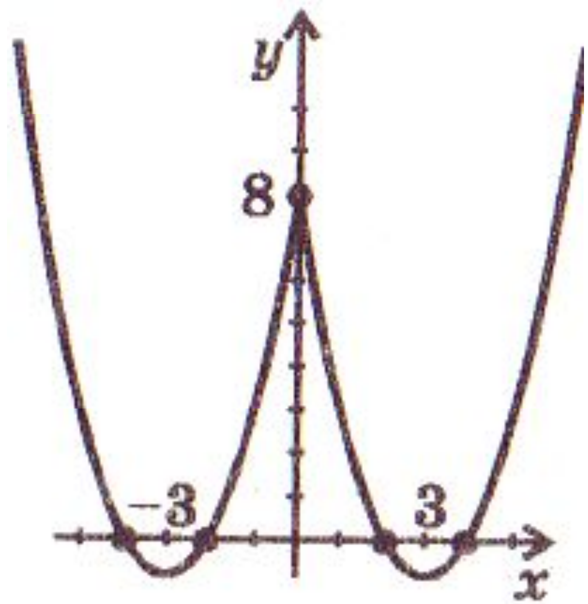
# Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

$$y=|x^2-6|x|+8|=||x|^2-6|x|+8|=|(|x|-3)^2-1|$$

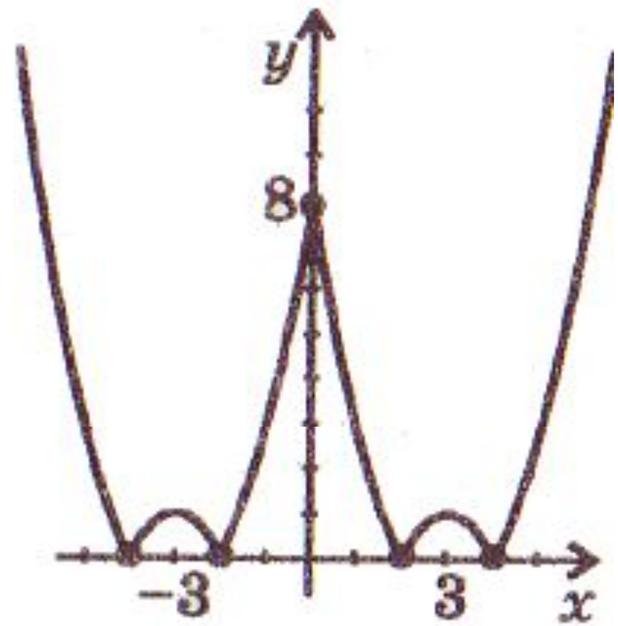
$$y = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1$$




$$y = (|x| - 3)^2 - 1$$



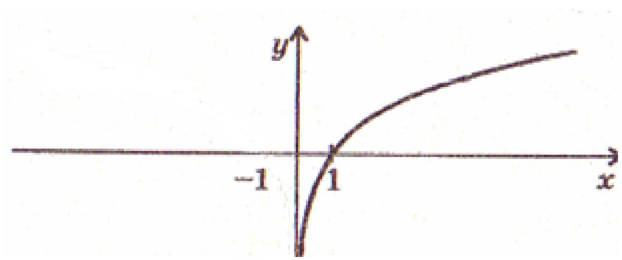

$$y = |(|x| - 3)^2 - 1|$$



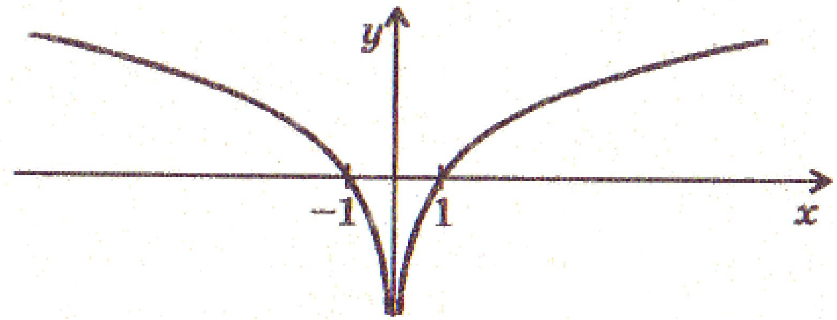
Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

$$y = \left|\log_2(|x - 1|)\right|$$

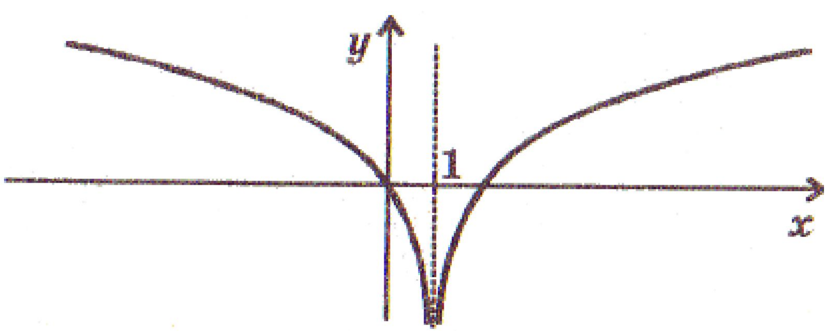
$y = \log_2 x$



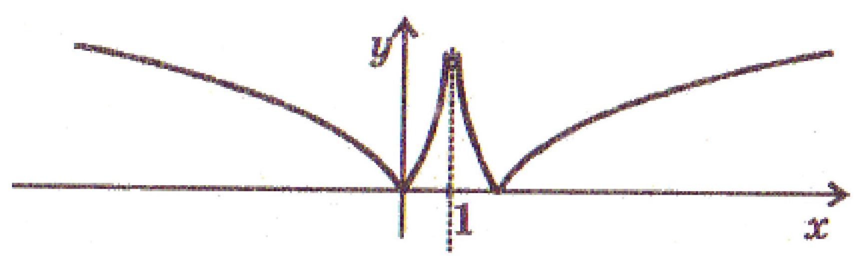

$y = \log_2|x|$




$y = \log_2(|x - 1|)$

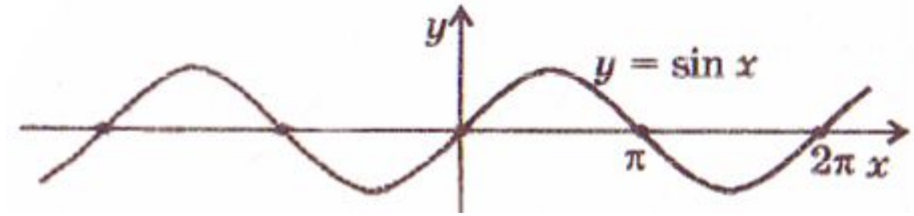



$y = \left|\log_2(|x - 1|)\right|$

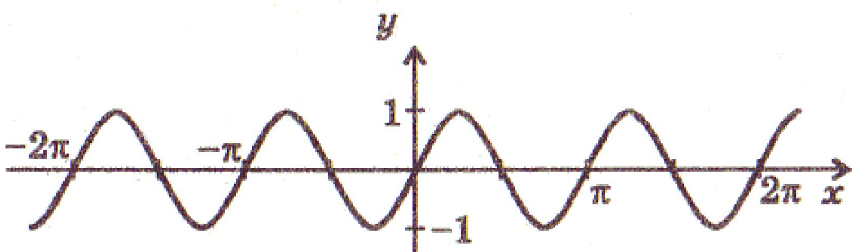


## Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

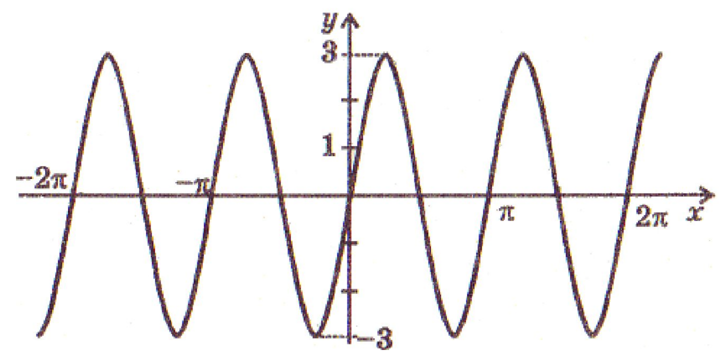
$y = |3\sin 2x| - 1$



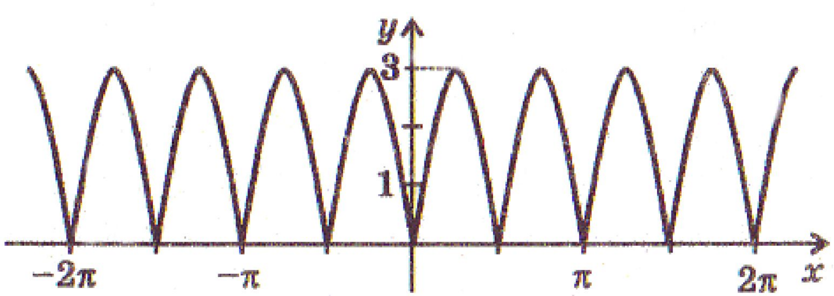

$y = \sin 2x$



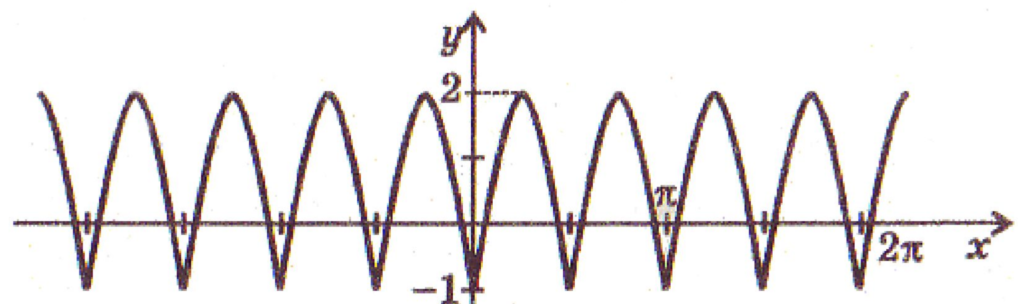

$y = 3\sin 2x$




$y = |3\sin 2x|$




$y = |3\sin 2x| - 1$



# Применение правил преобразования графиков при решении заданий ЕГЭ (части С).

# Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5^{x-1}-y=0 \\ |x-4|+3=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5^{x-1} \\ y=|x-4|+3 \end{cases}$$

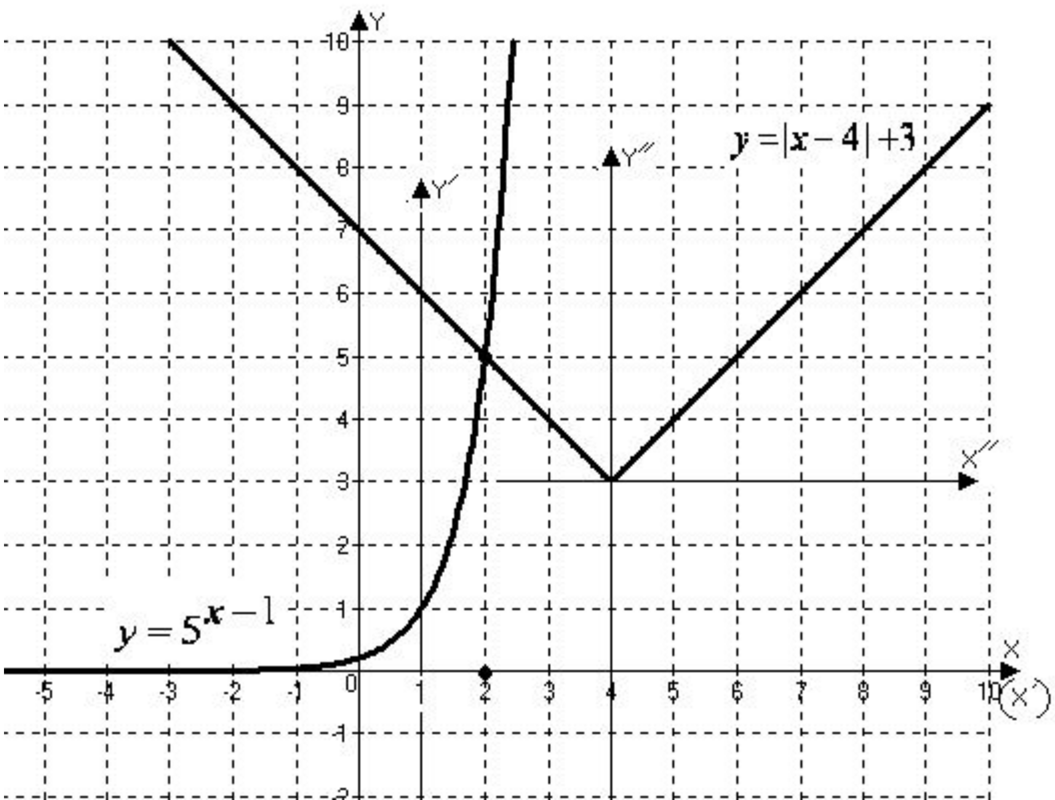
В одной системе координат, построим графики функций: а) $y=5^{x-1}$

График этой функции получается в результате построения графика $y=5^x$ в новой системе координат x'o'y', где O'(1;0)

$y=5^x$

| X | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Y | 0,2 | 1 | 5 | 25 |

б) $y=|x-4|+3$ В системе x''o''y'', где o''(4;3) построим график y=|x|.




Решением системы являются координаты точки пересечения графиков $y=5^{x-1}$ и $y=|x-4|+3$,

Пара чисел: $(\underset{x}{2};\underset{y}{5})$.

Проверка:

$$\begin{cases} 5^{2-1}-5=0 & \text{(верно)} \\ |2-4|+3=5 & \text{(верно)} \end{cases}$$

Ответ: (2;5).

## Решить уравнение: **f(g(x))+g(f(x))=32,** если известно, что

$$f(x)=0{,}5x^2-2x+12 \quad \text{и} \quad g(x)=\begin{cases}20, & \text{при } x\geq 5\\ 0{,}5\cdot 2^x+\dfrac{8}{6-x} & \text{при } x<5.\end{cases}$$

**Решение:** Преобразуем функцию f(x). $f(x)=0{,}5(x^2-4x+4)+10$

$f(x)=0{,}5(x-2)^2+10$

Так как $0{,}5(x-2)^2\geq 0$, то $f(x)\geq 10$

Тогда g(f(x))=20.

Подставим в уравнение f(g(x))+g(f(x))=32, получим f(g(x))+20=32;

f(g(x))=12

Пусть g(x)=t, тогда f(t)=12 или

$0{,}5t^2-2t+12=12$ $\quad 0{,}5t^2-2t=0 \quad t^2-4t=0 \quad t(t-4)=0 \quad t=0$ или $t=4$

Имеем: g(x)=0 или g(x)=4

Так как при x≥5 g(x)=20, то решения уравнений: g(x)=0 и g(x)=4 будем искать среди x<5.

Тогда: а) Уравнение g(x)=0 примет вид:

$$0{,}5\cdot 2^x+\frac{8}{6-x}=0 \quad |\cdot 2 \Rightarrow 2^x+\frac{16}{6-x}=0$$

Так как x<5, то 6-x>0

$$\frac{16}{6-x}>0 \Rightarrow 2^x+\frac{16}{6-x}>0$$

Вывод: уравнение g(x)=0 не имеет корней.

б) уравнение g(x)=4 примет вид:

$$0{,}5\cdot 2^x+\frac{8}{6-x}=4 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}2^x=4-\frac{8}{6-x} \;\Rightarrow\; 2^{x-1}=\frac{8}{x-6}+4$$

В одной системе координат построим графики функций $y=2^{x-1}$ и $y=\dfrac{8}{x-6}+4$

а) $y = 2^{x-1}$

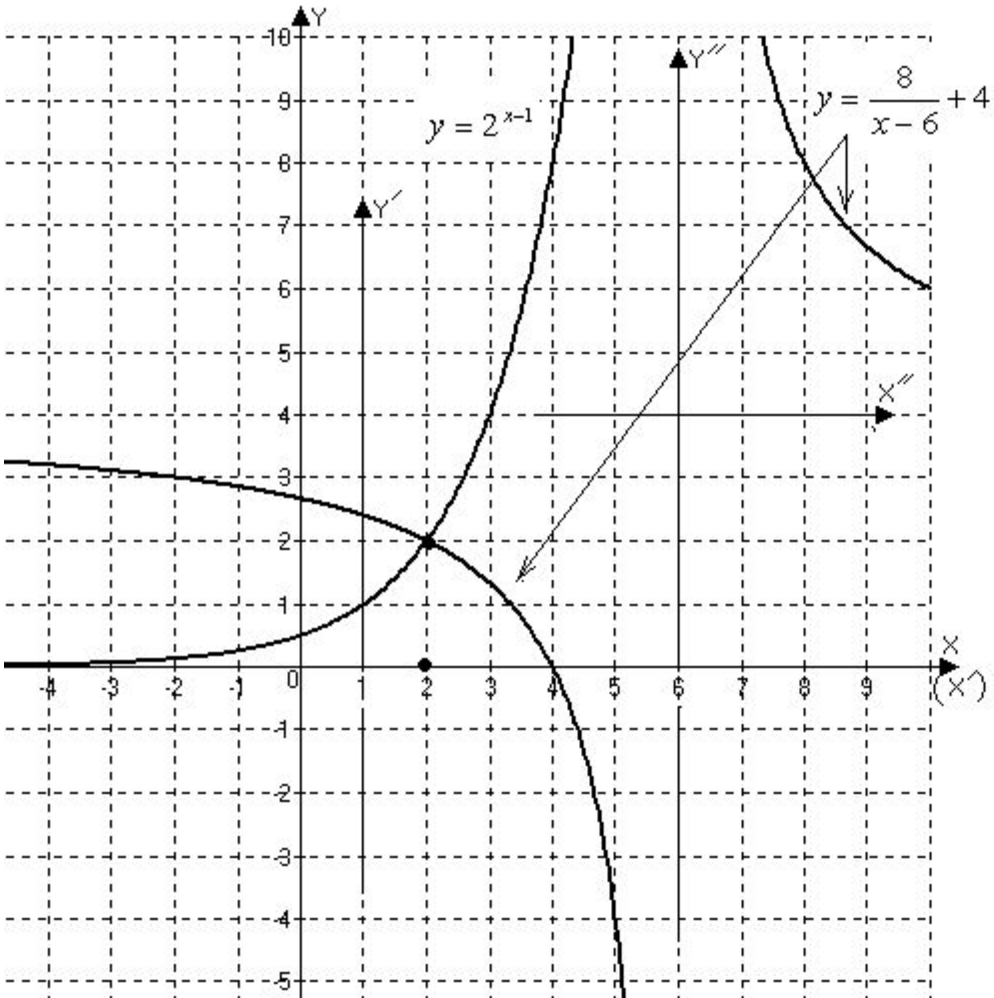
График данной функции получается построением графика $y = 2^x$

В системе x'o'y', где o'(1;0).

| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 |

б) $y = \dfrac{8}{x-6} + 4$

В системе x"o"y", где o"(6;4), построим график функции $y = \dfrac{8}{x}$ $(x \neq 0)$




| X | -8 | -4 | -2 | -1 | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | -1 | -2 | -4 | -8 | 8 | 4 | 2 | 1 |

Условию x<5 удовлетворяет абсцисса общей точки графиков x=2.
Ответ: 2.

# Вывод:

Мы видим, что правила преобразования графиков существенно упрощают построение графиков сложных функций.

Помогают найти нетрадиционное решение сложных задач.

# Тема :
# «Преобразование графиков функции»