

Преобразования графиков функций

Исследовательская работа

Выполнена ученицей 10 а класса
МОУ СОШ №1 г.Архангельска
Тёмкиной Валентиной Сергеевной

Научные руководители:
учитель математики ВКК

МОУ СОШ №1 г.Архангельска

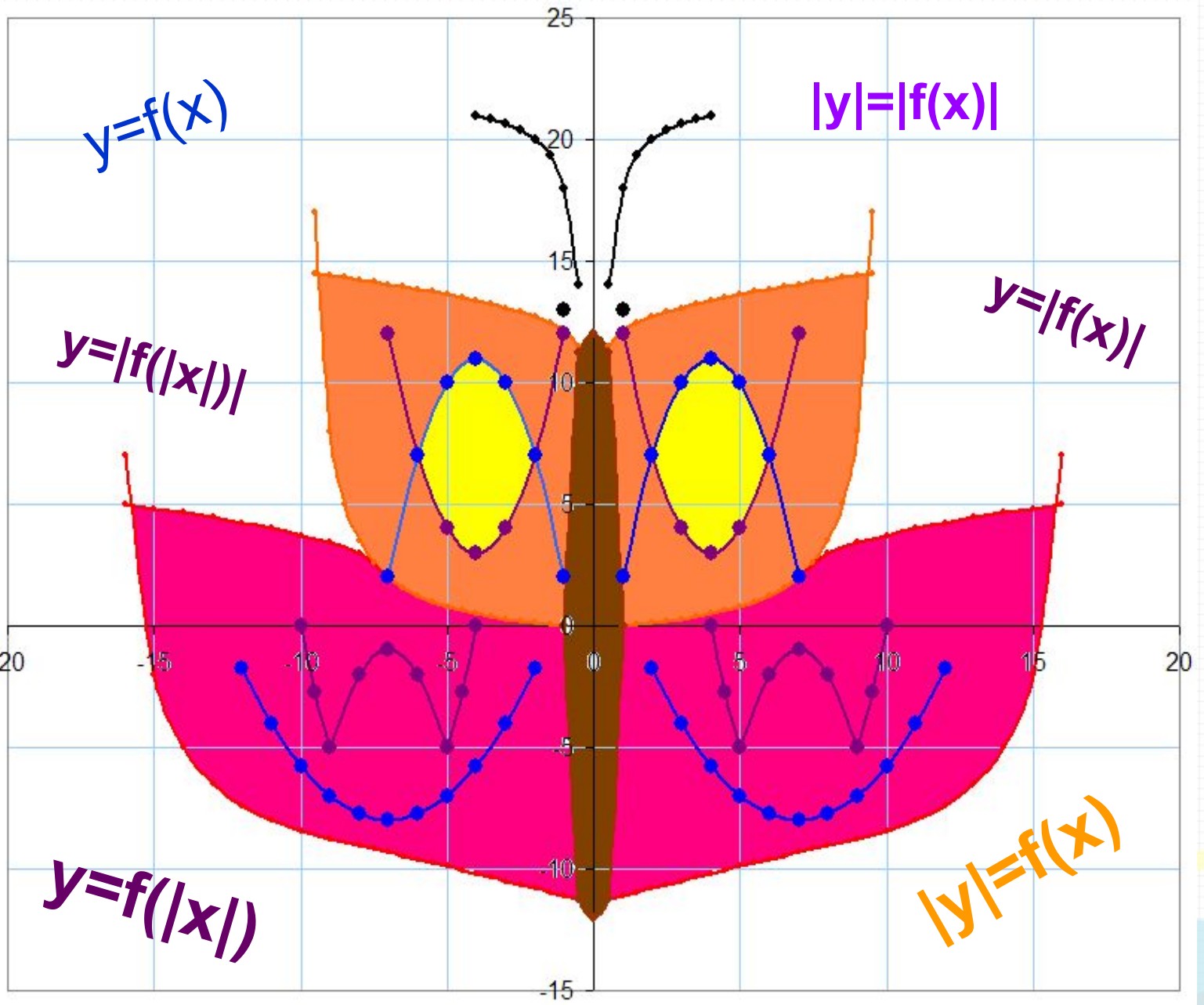
Котцова Ольга Валентиновна

учитель информатики и ИКТ

ГБОУ АО Кадетская школа-интернат

«Архангельский морской кадетский корпус»

2012



Актуальность: Эта тема актуальна, т.к. в конце 11 класса необходимо сдавать единый государственный экзамен по математике, куда будут включены задания, связанные с преобразованием графиков функций.

Нами были **проанализированы** различные собрания с экзаменационными заданиями.

Вывод: в сборниках КИМ единого государственного экзамена по математике встречаются задания на использование знаний о различных преобразованиях графиков функций.

Цель: Изучение способов построения графиков функций с помощью различных преобразований.

Задачи:

- Исследовать взаимосвязь графика функции $y=f(x)$ с графиками функций $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $y=f(kx)$, $y=kf(x)$, $y=-f(x)$, $y=f(x)+b$, $y=f(x-a)$.
- Рассмотреть задания на построение графиков функций с помощью преобразований.
- Попробовать создать рисунок, используя исследуемые функции.
- Узнать, есть ли более профессиональные и эффективные системы для построения графиков в декартовых системах координат кроме Excel и Calc, которые мы использовали для построения в прошлой работе.
- Выявить в чём преимущества и недостатки этих компьютерных программ.

Рабочая гипотеза: графики сложных функций, можно построить с помощью преобразований графика исходной функции.

Объект – графики функций.

Предмет – построение графиков сложных функций с помощью преобразования графика исходной функции.

Методы исследования: наблюдения, сравнения, анализ, обобщение, прогнозирование, знаковое моделирование.

$$y=f(x)$$

Симметрия относительно оси « ox »

$$y=-f(x)$$

$$y=f(x)$$

Сохраняя ту часть, где $x \geq 0$,
выполнить её симметрию
относительно оси « oy »

$$y=f(|x|)$$

$$y=f(x)$$

Сохраняя ту часть, где $y \geq 0$, выполнить
симметрию относительно « ox » той
части, где $y < 0$

$$y=|f(x)|$$



$$y = \cos x$$

?

$$y = -\cos x$$

$$y = \cos x$$

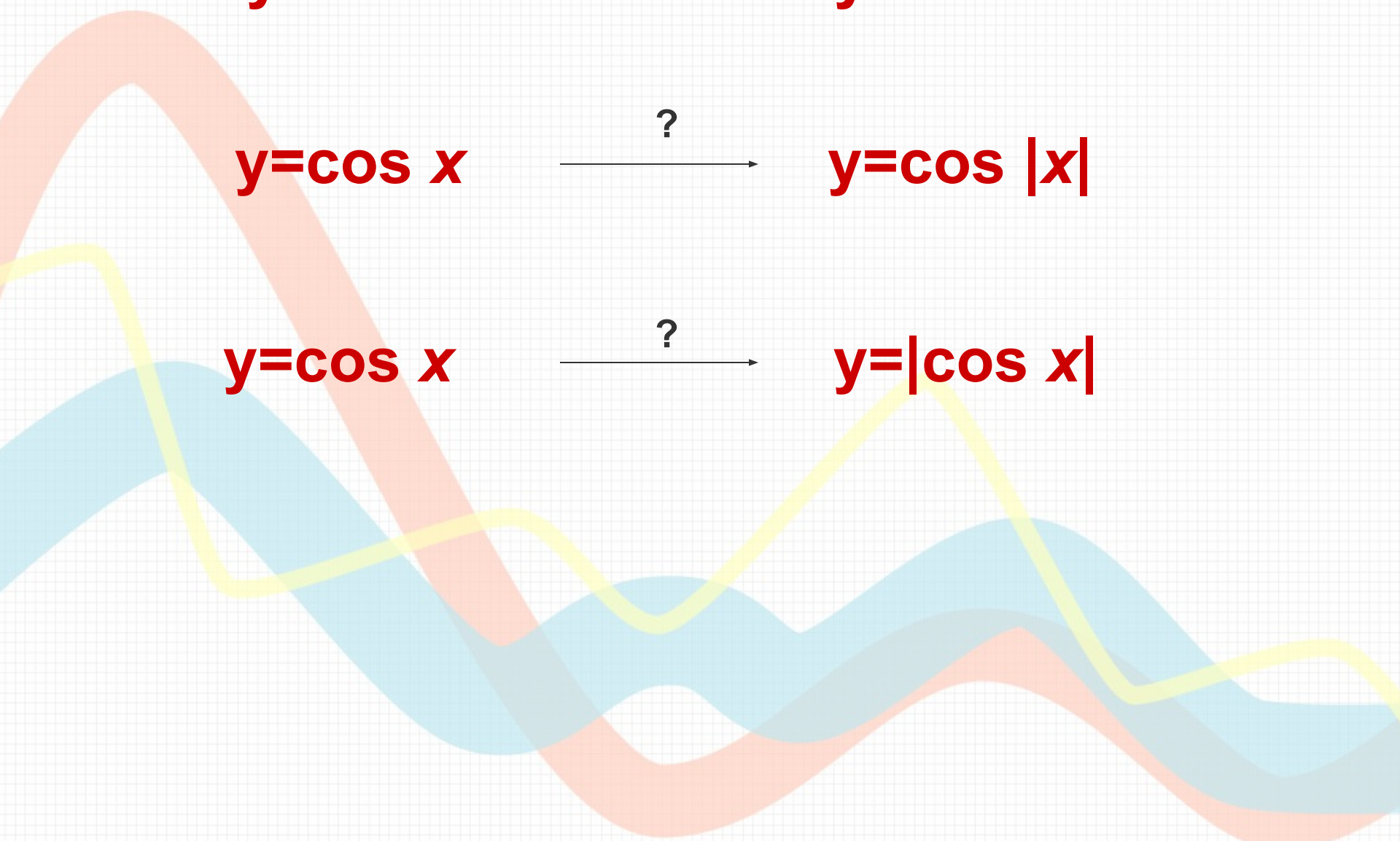
?

$$y = \cos |x|$$

$$y = \cos x$$

?

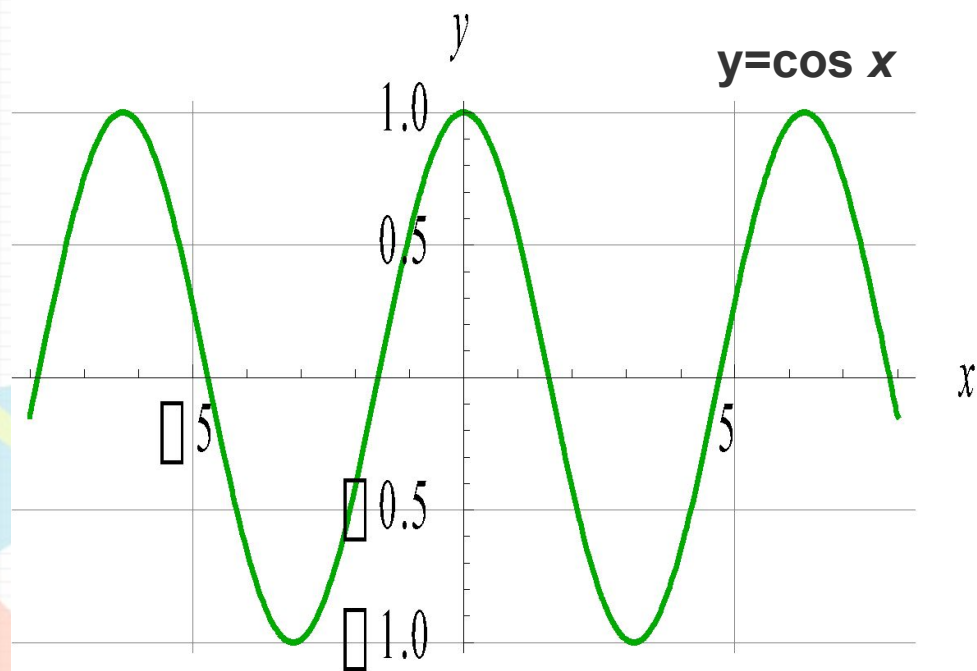
$$y = |\cos x|$$



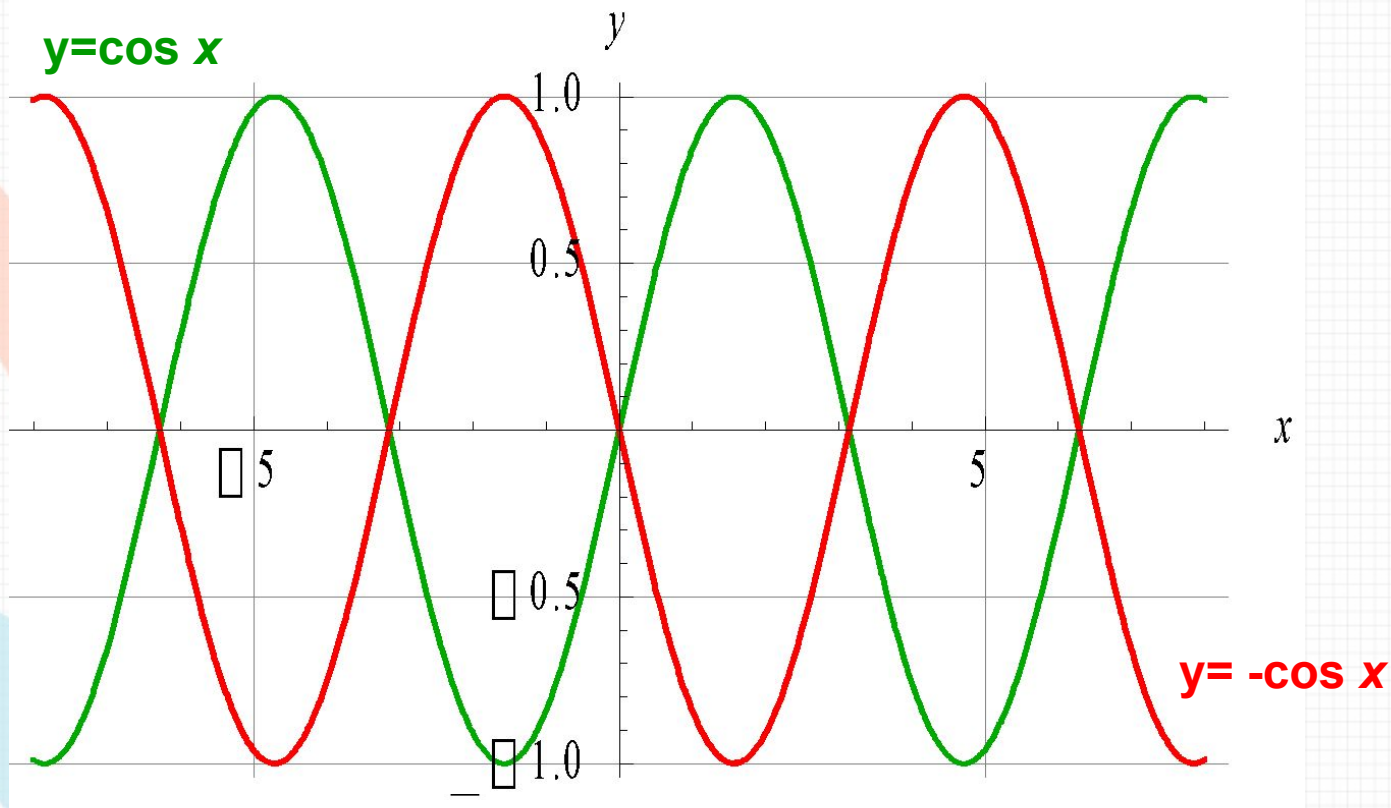
$y = \cos x$

Графиком является косинусоида,
проходящая через точки:

| | | | | | | | |
|-----|---|----------------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------------|-------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
| y | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0,5 | 0 | -0,5 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |

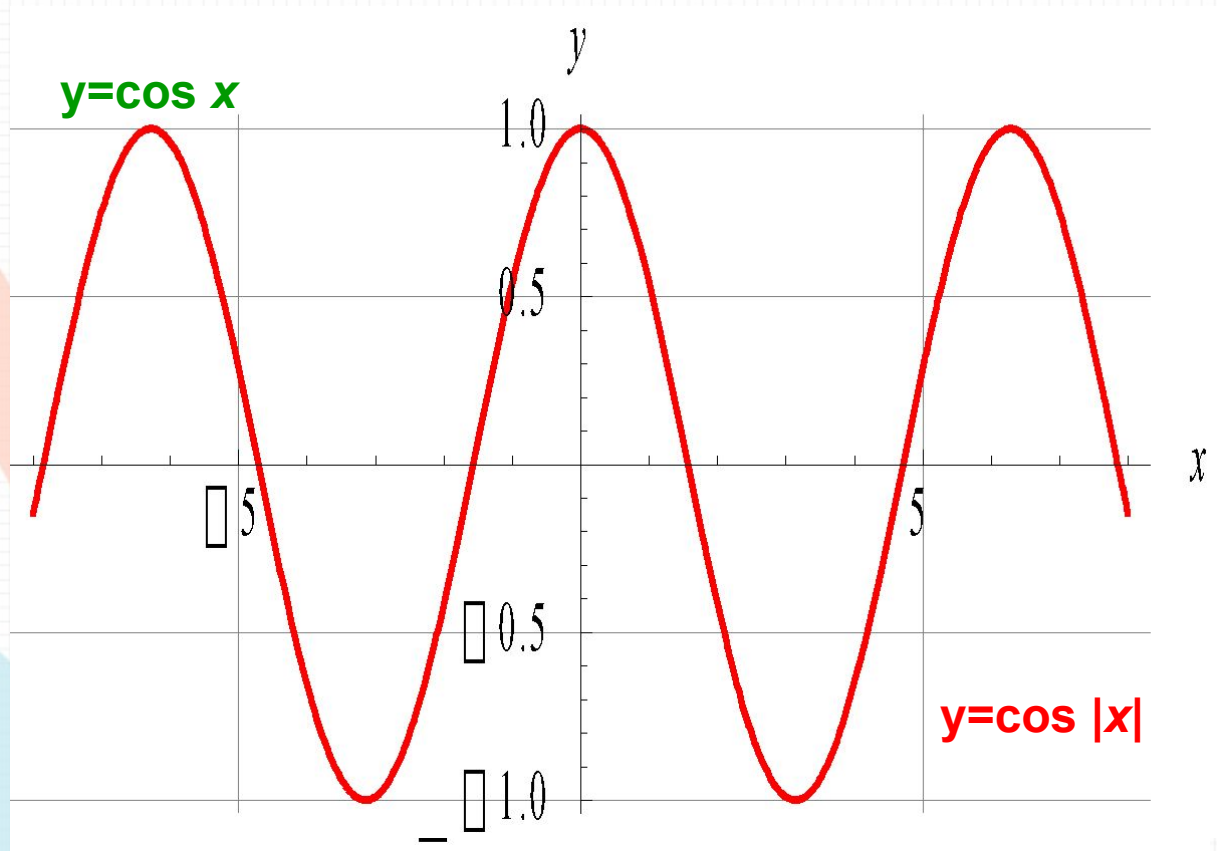


$$y = \cos x \xrightarrow{?} y = -\cos x$$



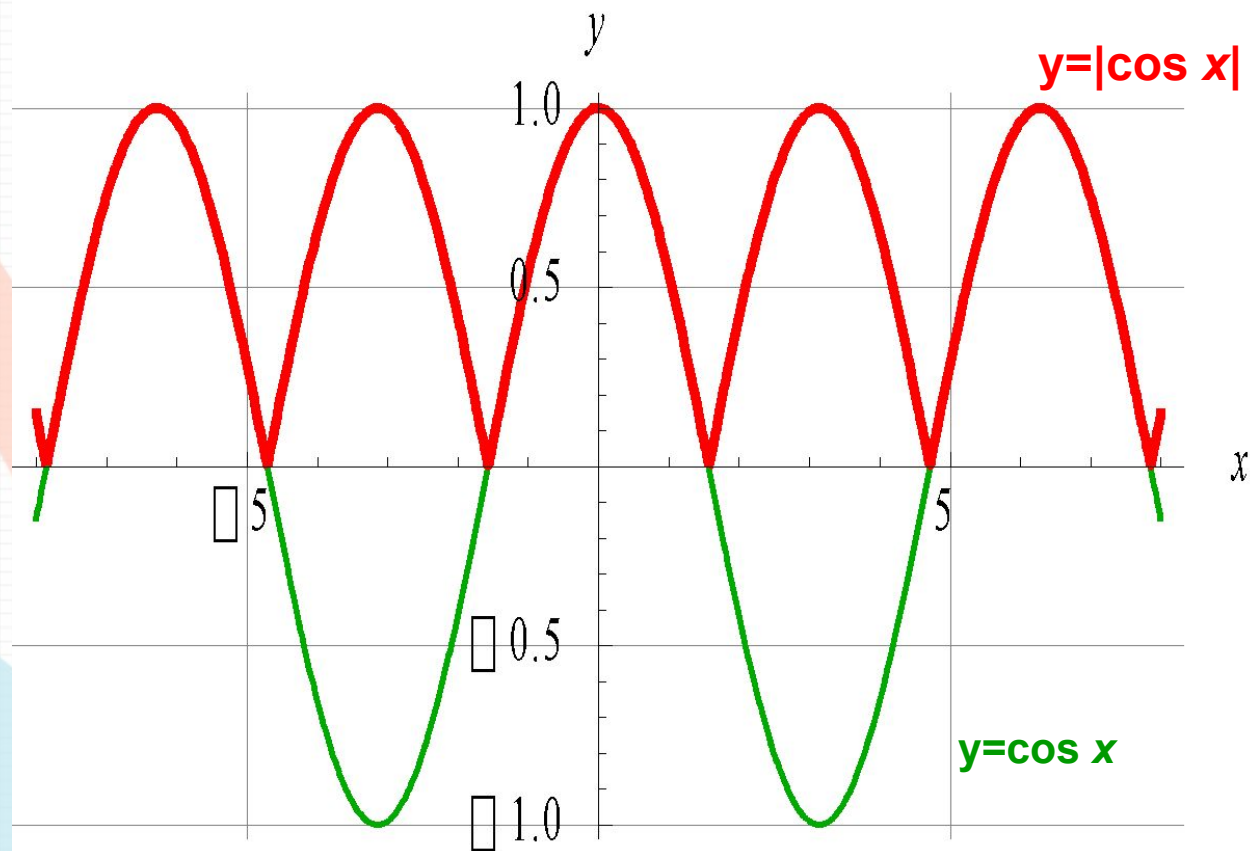
Для того, чтобы из графика функции $y = \cos x$ получить график функции $y = -\cos x$, необходимо выполнить симметрию исходного графика относительно оси «ОХ».

$$y = \cos x \xrightarrow{?} y = \cos |x|$$



Для того, чтобы из графика функции $y = \cos x$ получить график функции $y = \cos |x|$, необходимо сохранить ту часть исходного графика, где $x \geq 0$, и выполнить её симметрию относительно « oy », а это и будет сам график $y = \cos x$.

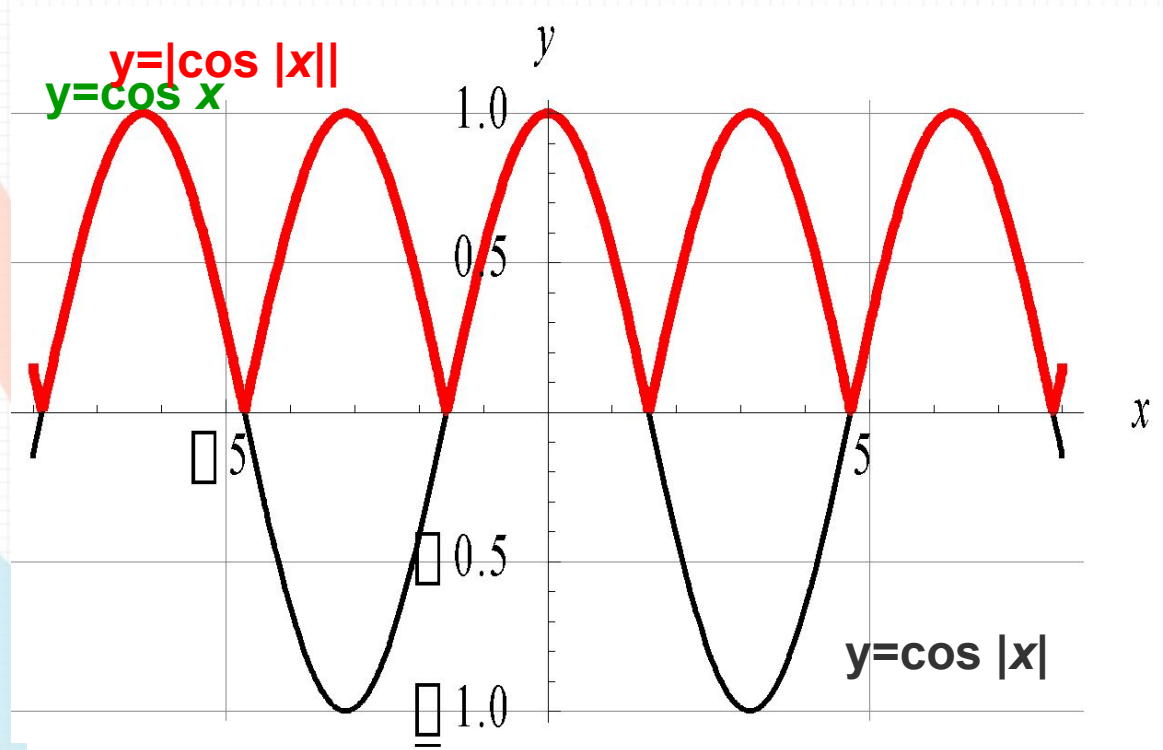
$$y = \cos x \xrightarrow{?} y = |\cos x|$$



Для того, чтобы из графика функции $y = \cos x$ получить график функции $y = |\cos x|$, необходимо сохранить ту часть исходного графика, где $y \geq 0$, и выполнить симметрию относительно « ox » той части, где $y < 0$.

$$y = \cos x \xrightarrow{?} y = |\cos |x||$$

$$y = \cos x \longrightarrow y = \cos |x| \longrightarrow y = |\cos |x||$$



Для того, чтобы из графика функции $y = \cos x$ получить график функции $y = |\cos |x||$, необходимо сохранить ту часть исходного графика, где $x \geq 0$, и выполнить её симметрию относительно «оу», а затем сохранить ту часть получившегося графика, где $y \geq 0$, и выполнить её симметрию относительно «ох» той части, где $y < 0$.

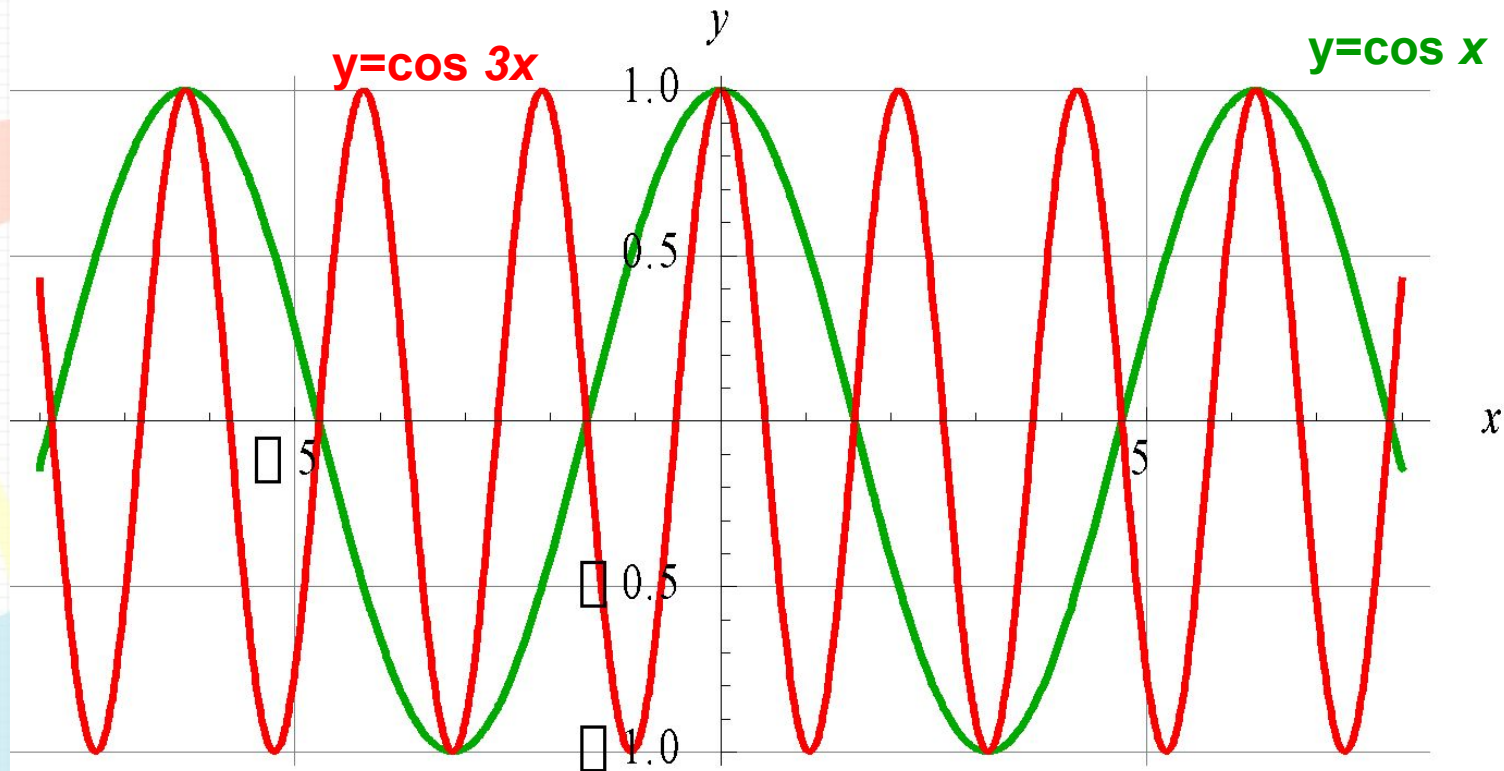
$$y = \cos x \xrightarrow{?} y = \cos 3x$$

$$y = \cos 3x$$

График этой функции проходит через точки:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|---|----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------|-----------------|------------------|----------------------|------------------|-------|------------------|-----------------------|------------------|------------------|-------------------|----------------------|-------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{2\pi}{3}$ | $-\frac{3\pi}{4}$ | $-\frac{5\pi}{6}$ | $-\pi$ |
| y | 1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | -1 | 0 | 1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | -1 | 0 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | -1 | 0 | 1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | -1 |

$$y = \cos x \xrightarrow{?} y = \cos 3x$$



Вывод: Для того, чтобы из графика функции $y = \cos x$ получить график функции $y = \cos 3x$, необходимо сжать исходный график в 3 раза вдоль « ox ».

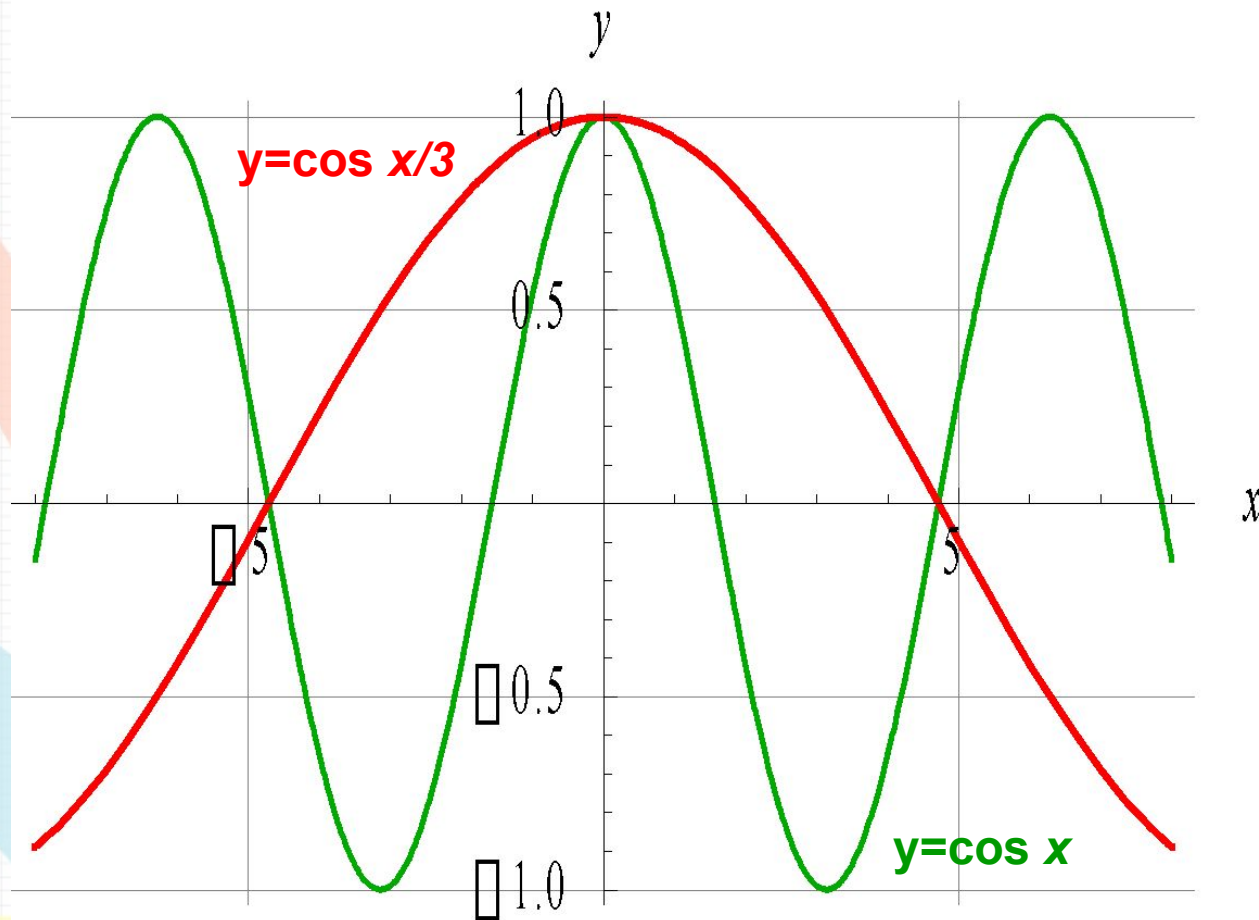
$$y = \cos x \xrightarrow{?} y = \cos x/3$$

$$y = \cos x/3$$

График этой функции проходит через точки:

| | | | | | | | | |
|---|---|---------------------------------|----------------------|----------------------|-------|---------------------------------|----------------------|----------------------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | π | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{3\pi}{4}$ |
| y | 1 | $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0,5 | $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

$$y = \cos x \xrightarrow{?} y = \cos x/3$$



Вывод: Для того, чтобы из графика функции $y = \cos x$ получить график функции $y = \cos x/3$, необходимо выполнить растяжение исходного графика в 3 раза вдоль оси «ох».

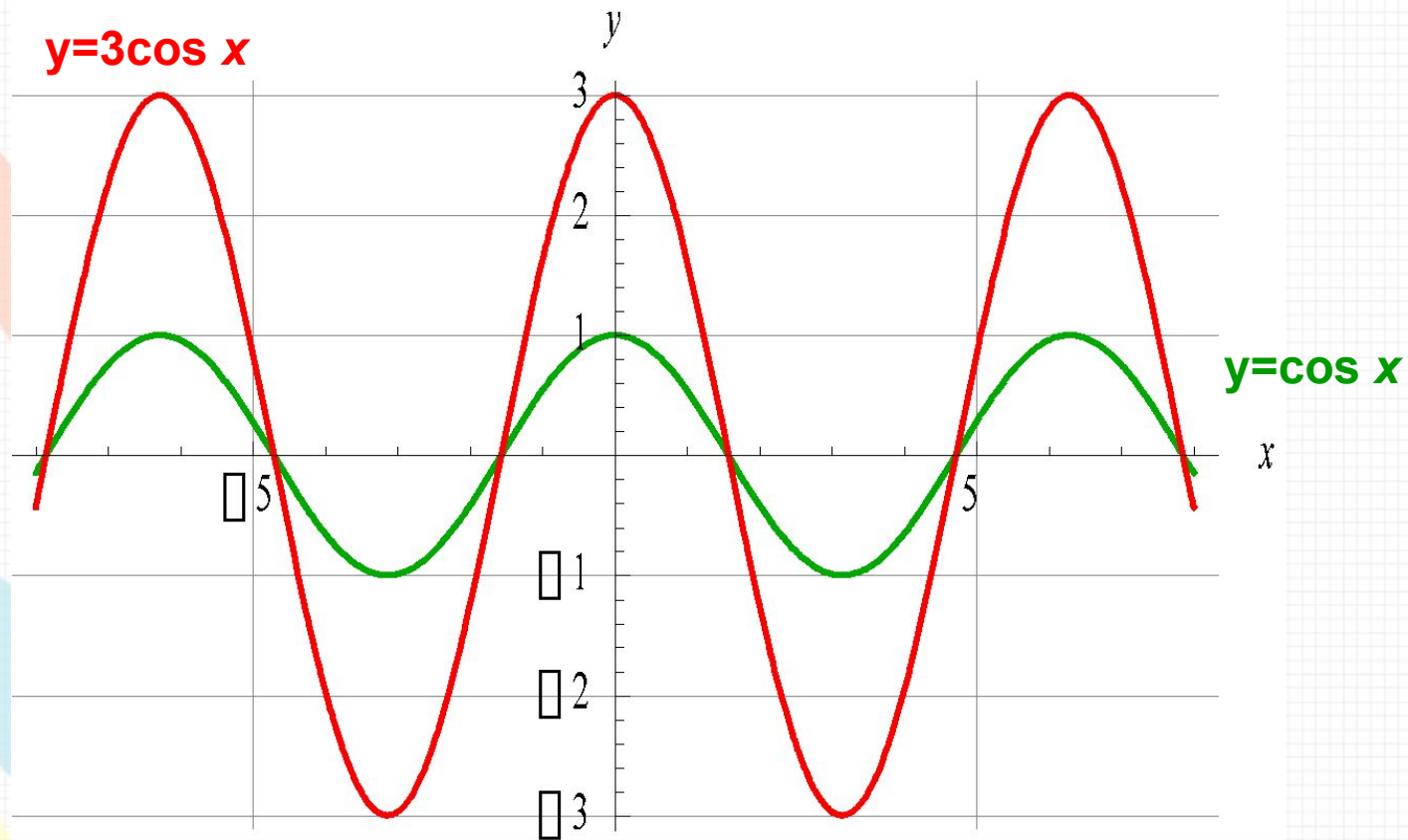
$$y = \cos x \xrightarrow{?} y = 3 \cos x$$

$$y = 3 \cos x$$

График проходит через точки:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|-----------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------------|-------|-----------------------|------------------|------------------|-------------------|------------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{2\pi}{3}$ | $-\frac{5\pi}{6}$ | $-\pi$ |
| y | 3 | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | 1,5 | 0 | -1,5 | $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | -3 | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | 1,5 | 0 | -1,5 | $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | -3 |

$$y = \cos x \xrightarrow{?} y = 3\cos x$$



Вывод: Для того, чтобы из графика функции $y = \cos x$ получить график функции $y = 3\cos x$, необходимо растянуть исходный график в 3 раза вдоль оси «оу».

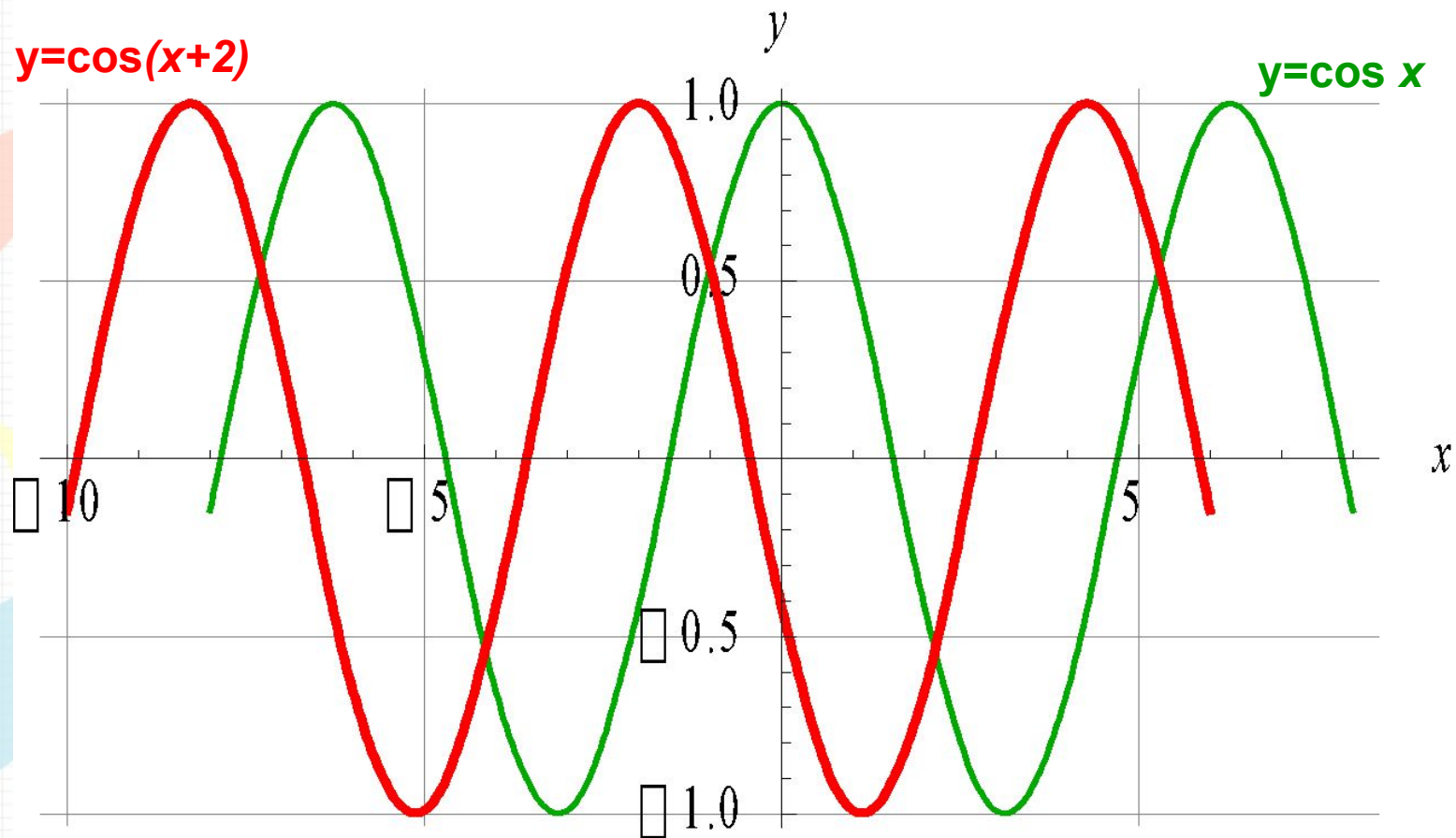
$$y = \cos x \xrightarrow{?} y = \cos(x+2)$$

$$y = \cos(x+2)$$

Графиком является косинусоида, проходящая через точки:

| | | | | | | | | | | | | | |
|----------|------|-----------------------|-----------------|-----------------------|------------------|------------------|-------|------------------|------------------|----------------------|-------------------|----------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{2\pi}{3}$ | $-\frac{5\pi}{6}$ | $-\pi$ |
| y | -0,5 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -0,5 | 0 | 0,5 | 0 | 0,5 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0,5 |

$$y = \cos x \xrightarrow{?} y = \cos(x+2)$$



Вывод: Для того, чтобы из графика функции $y = \cos x$ получить график функции $y = \cos(x+2)$, необходимо сдвинуть исходный график вдоль оси « ox » на 2 единицы влево.

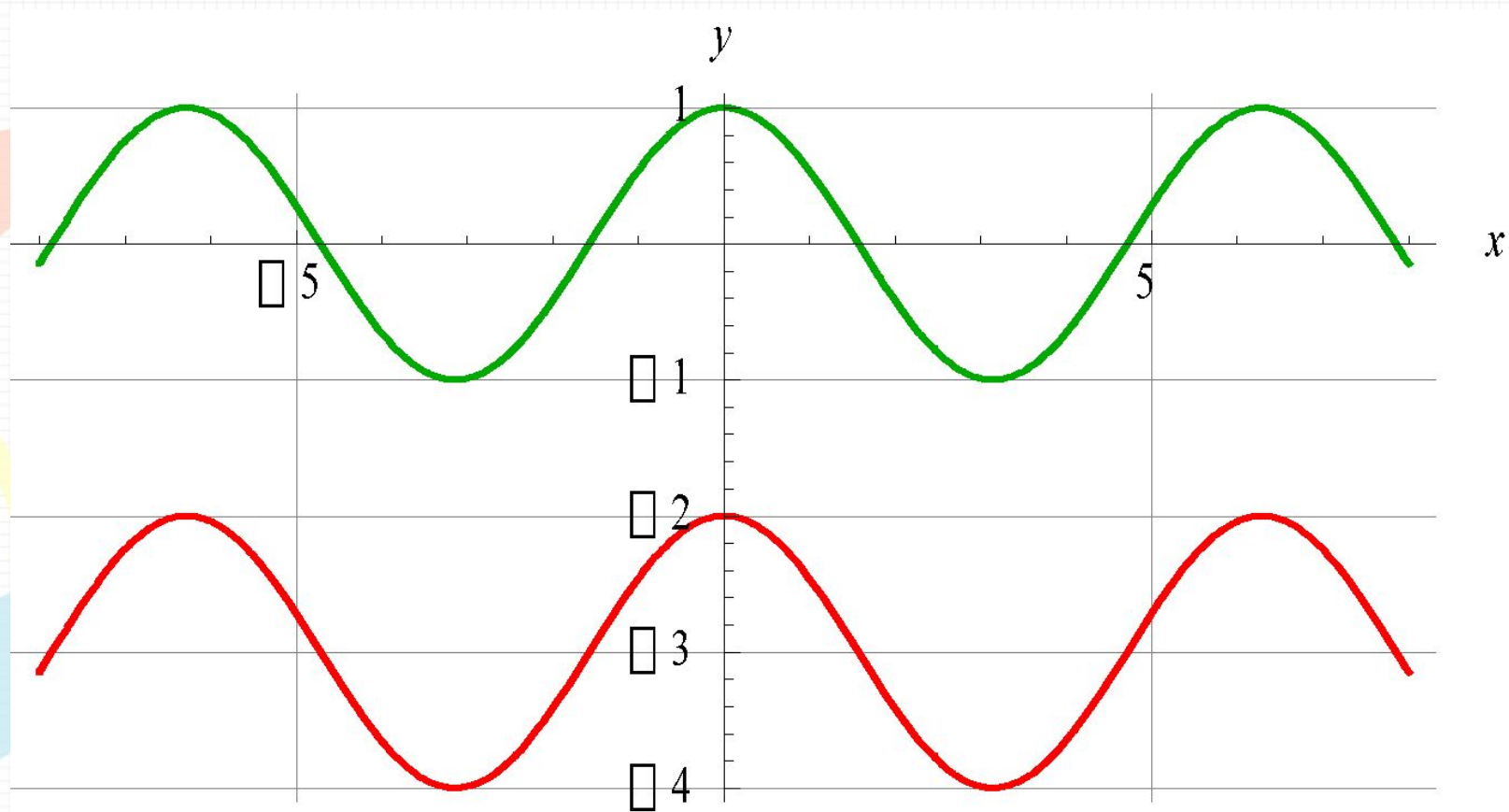
$$y = \cos x \xrightarrow{?} y = \cos x - 3$$

$$y = \cos x - 3$$

Графиком является косинусоида, проходящая через точки:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|----|------------------------|-----------------|-----------------|------------------|-------------------------|-------|------------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{2\pi}{3}$ | $-\frac{5\pi}{6}$ | $-\pi$ |
| y | -2 | $\frac{\sqrt{3}-6}{2}$ | -2,5 | -3 | -3,5 | $-\frac{\sqrt{3}+6}{2}$ | -4 | $\frac{\sqrt{3}-6}{2}$ | -2,5 | -3 | -3,5 | $-\frac{\sqrt{3}+6}{2}$ | -4 |

$$y = \cos x \xrightarrow{?} y = \cos x - 3$$



Вывод: Для того, чтобы из графика функции $y = \cos x$ получить график функции $y = \cos x - 3$, необходимо сдвинуть исходный график вдоль оси «оу» на 3 единицы вниз.

Итог:

$y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{Сохраняя ту часть исходного графика, где } x \geq 0, \text{ выполнить её симметрию относительно оси «оу»}}$ $y=f(|x|)$

$y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{Сохраняя ту часть, где } y \geq 0, \text{ выполнить симметрию относительно оси «ох» той части, где } y < 0}}$ $y=|f(x)|$

$y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{Если } k > 1, \text{ то сжатие исходного графика в } k \text{ раз вдоль оси «ох», если } 0 < k < 1, \text{ то растяжение графика в } k \text{ раз вдоль «ох»}}$ $y=f(kx)$

$y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{Если } k > 1, \text{ то растяжение исходного графика в } k \text{ раз вдоль оси «оу», если } 0 < k < 1, \text{ то сжатие графика в } k \text{ раз вдоль «оу»}}$ $y=kf(x)$

$y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{Симметрия исходного графика относительно оси «ох»}}$ $y=-f(x)$

$y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{Сдвиг вдоль оси «ох», если } a \geq 0, \text{ то на } a \text{ единиц вправо, если } a < 0, \text{ то на } a \text{ единиц влево}}$ $y=f(x-a)$

$y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{Сдвиг вдоль оси «оу», если } b \geq 0, \text{ то на } b \text{ единиц вверх, если } b < 0, \text{ то на } b \text{ единиц вниз}}$ $y=f(x)+b$

Исследование количества корней уравнения:

$$4 \cos x = a$$

$$\begin{cases} y = 4 \cos x \\ y = a \end{cases}$$

1. $y = 4 \cos x$

$$y = \cos x \longrightarrow y = 4 \cos x$$

Мы знаем, что для того, чтобы из графика функции $y = \cos x$ получить график функции $y = 4 \cos x$ необходимо растянуть исходный график в 4 раза вдоль оси «оу».

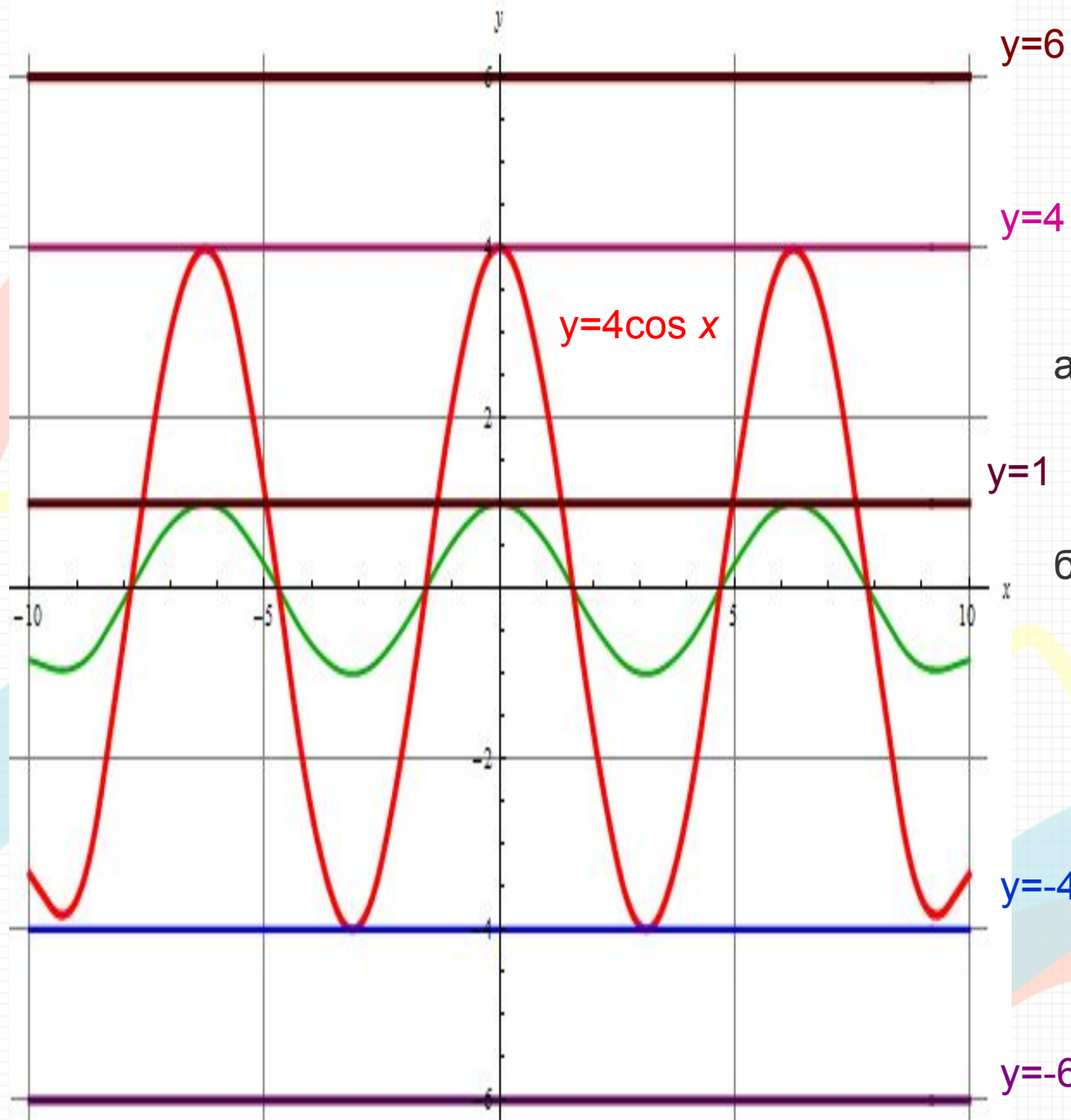
$$y = \cos x$$

Графиком является косинусоида, проходящая через точки:

| | | | | | | | |
|---|---|----------------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------------|-------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
| y | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0,5 | 0 | -0,5 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |

2. $y = a$ – линейная функция.

Графиком является прямая, параллельная оси «ох» и проходящая через точки $(2;a)$ и $(0;a)$.



- а) Уравнение $4\cos x=a$ имеет бесконечное множество корней при $a \in [-4; 4]$
- б) Уравнение $4\cos x=a$ не имеет корней при $a \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

Исследование количества корней уравнения:

$$|\cos 2x|=x^2$$

1. $y=|\cos 2x|$

$$y=\cos x \longrightarrow y=\cos 2x \longrightarrow y=|\cos 2x|$$

$$\begin{cases} y=|\cos 2x| \\ y=x^2 \end{cases}$$

Мы знаем, что для того, чтобы из графика функции $y=\cos x$ получить график функции $y=\cos 2x$, необходимо сжать исходный график в 2 раза вдоль оси «ох», а затем, чтобы получить график функции $y=|\cos 2x|$, необходимо сохранить ту часть графика, где $y \geq 0$, и выполнить симметрию относительно оси «ох» той части, где $y < 0$.

$$y=\cos x$$

Графиком является косинусоида, проходящая через точки:

| | | | | | | | |
|---|---|----------------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------------|-------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
| y | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0,5 | 0 | -0,5 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |

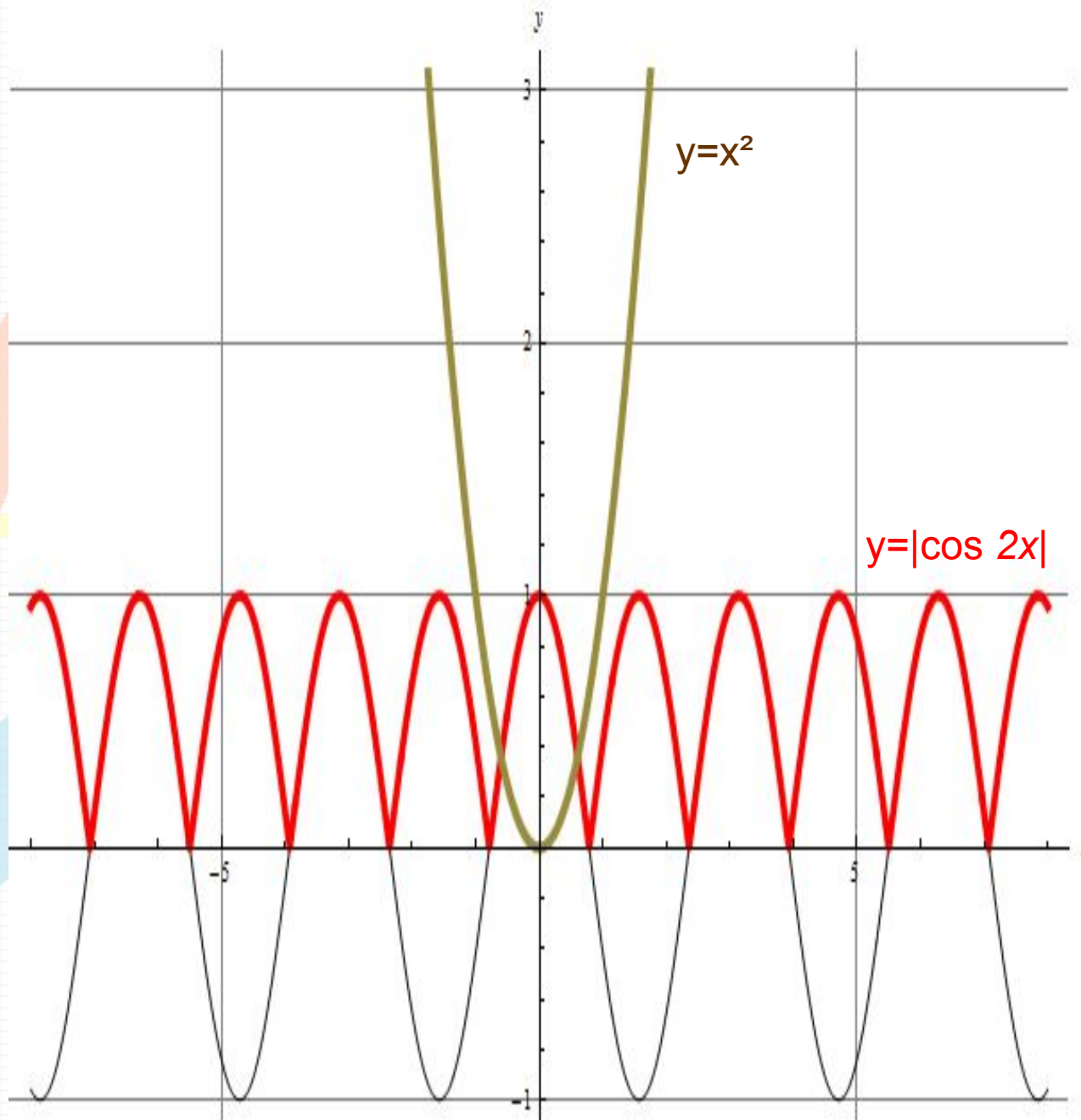
$y=x^2$ - квадратичная функция.

Графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

(0;0) – вершина параболы.

«оу» - ось симметрии параболы.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|----|----|----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | -1 | -2 | -3 |
| y | 0 | 1 | 4 | 9 | 1 | 4 | 9 |



Т.к. графики функций $y=|\cos 2x|$ и $y=x^2$ пересекаются в двух точках, то уравнение $|\cos 2x|=x^2$ имеет 2 корня.

Функции, использованные для построения рисунка

$$y = \frac{1}{8}x^2 - 9 \quad x \in [-8; 8]$$

$$y = -5 \quad x \in [-3; 3]$$

$$y = |\sin x| - 5 \quad x \in [-3; 3]$$

$$y = -\cos \frac{x}{2} - 5 \quad x \in [-3; 3]$$

$$y = \sin|x| - 4 \quad x \in [-7; 7]$$

$$y = 2 \sin|x| - 4 \quad x \in [-7; 7]$$

$$y = x^2 - 11 \quad x \in [-2; 2]$$

$$y = \operatorname{tg} 2(x-1) - 9,5 \quad x \in [0,75; 1,25]$$

$$y = \operatorname{tg} 2(x-0,5) - 9 \quad x \in [0; 1]$$

$$y = \operatorname{tg} 2x - 8,5 \quad x \in [-0,5; 0,25]$$

$$y = \operatorname{tg} 2(x+0,5) - 8 \quad x \in [-1; -0,25]$$

$$y = \operatorname{tg} 2(x+1) - 7,5 \quad x \in [-1,25; -0,75]$$

$$y = \frac{3,5}{x-3,5} - 14 \quad x \in [4; 8]$$

$$y = \frac{3,5}{x+3,5} - 14 \quad x \in [-8; -4]$$

$$y = \frac{0,5}{x-0,5} - 1,5 \quad x \in [0,625; 1,5]$$

$$y = -\frac{0,5}{x+0,5} - 1,5 \quad x \in [-1,5; -0,625]$$

$$y = -\frac{1}{2} \cos x - 1 \quad x \in [-1,5; 1,5]$$

$$y = |\cos x| + 3,5 \quad x \in [-4,65; -1,5] \cup [1,65; 4,7]$$

$$y = -|\cos x| + 3,5 \quad x \in [-4,65; -1,5] \cup [1,65; 4,7]$$

$$y = 3,5 + \sqrt{0,75^2 - (x+3)^2} \quad x \in [-10; 10]$$

$$y = 3,5 - \sqrt{0,75^2 - (x+3)^2} \quad x \in [-10; 10]$$

$$y = 3,5 + \sqrt{0,75^2 - (x-3)^2} \quad x \in [-10; 10]$$

$$y = 3,5 - \sqrt{0,75^2 - (x-3)^2} \quad x \in [-10; 10]$$

$$y = 1,5|\cos x| + 3,5 \quad x \in [-4,65; -1,5] \cup [1,65; 4,7]$$

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{2(|x|-1)} + 5,5 \quad x \in [-3; -1] \cup [1; 3]$$

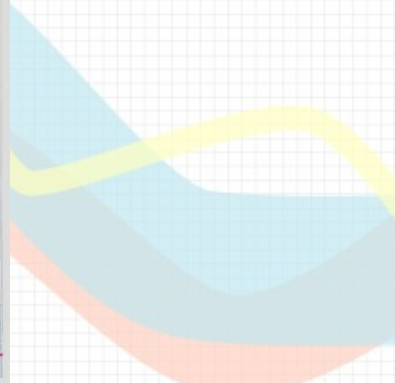
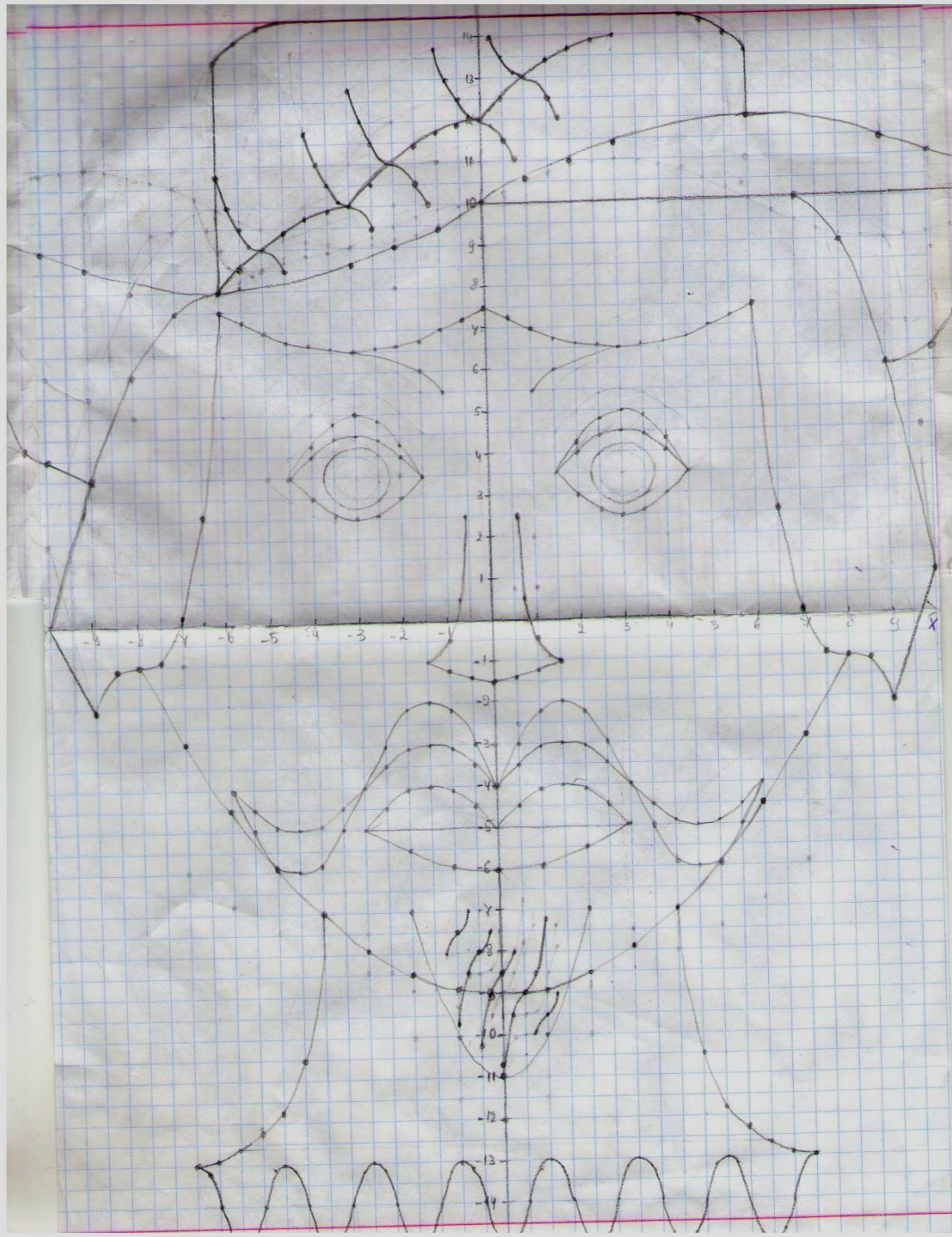
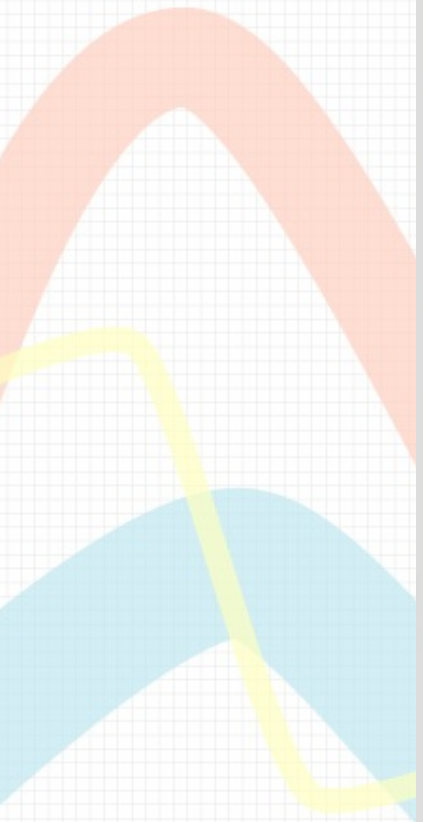
$$y = -\left| \sin \frac{x}{2} \right| + 7,5 \quad x \in [-6; 6]$$

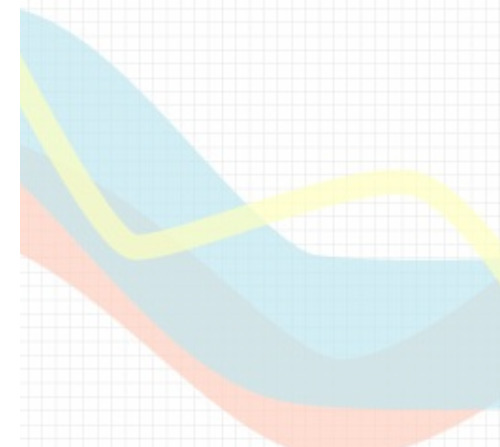
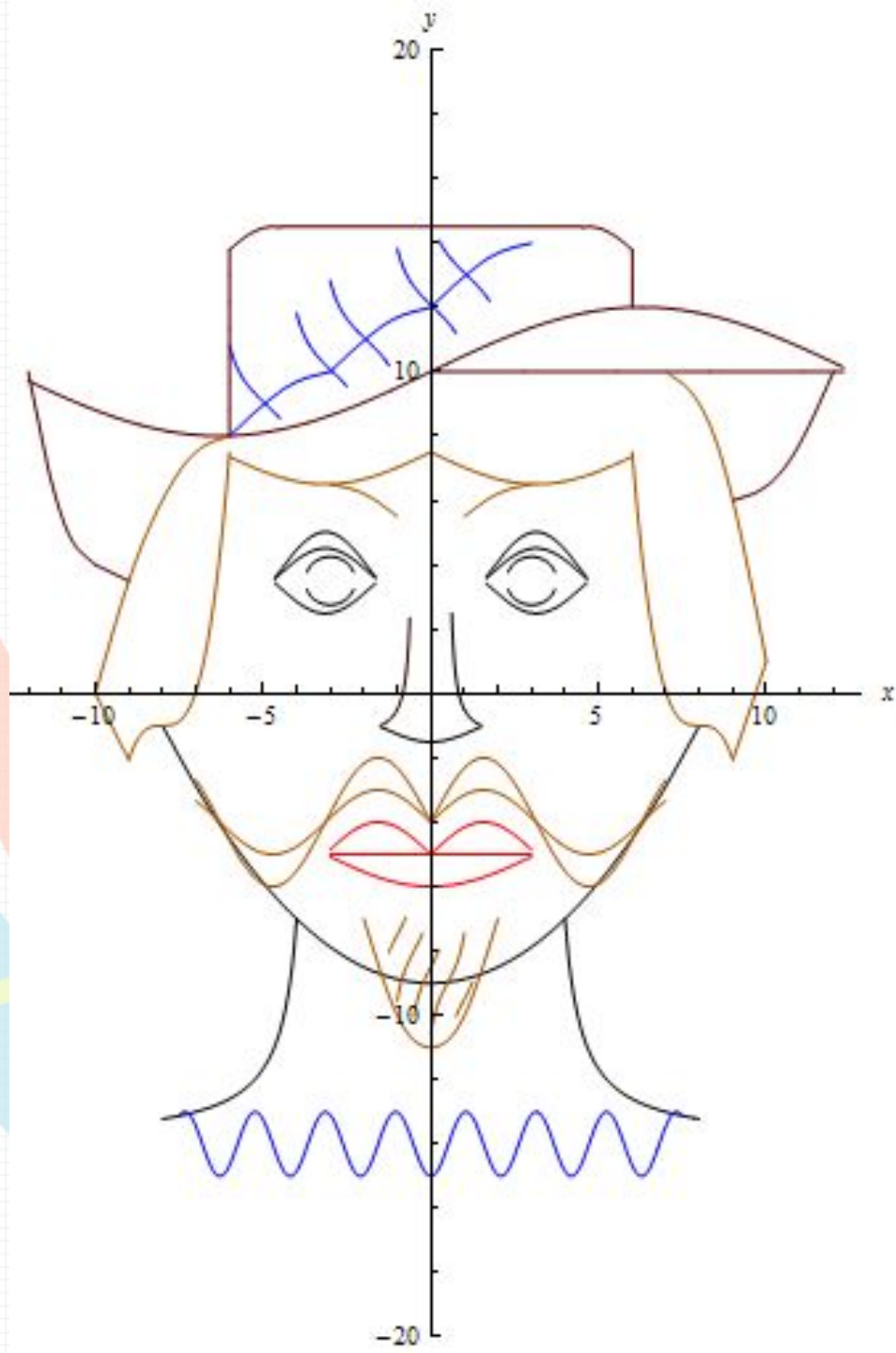
$$y = 1,0625(x+8)^3 - 1 \quad x \in [-9; -6]$$







$$y = -1,0625(x-8)^3 - 1 \quad x \in [6; 9]$$

$$y = 2 \sin \frac{x}{4} + 10 \quad x \in [-12; 12,3]$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+6)^2 + 8 \quad x \in [-10; -6]$$





| Microsoft Office Excel и Open Office Calc | Wolfram Mathematica |
|--|--|
| <p>1. Чтобы построить график функции необходимо указать список значений переменной «х», а затем ввести формулу для вычисления переменной «у». Только потом можно строить график. </p> | <p>1. В отличие от других систем Mathematica применяет разумную автоматизацию. То есть достаточно выбрать необходимую команду, ввести функцию и указать её область значений, а затем программа сама построит график. </p> |
| <p>2. Как следствие из первого пункта, на построение графиков затрачивается большое количество времени. </p> | <p>2. Исходя из первого пункта, можем сделать вывод, что на построение графиков затрачивается совсем немного времени. </p> |
| <p>3. Существует один способ построения графиков (мастер диаграмм – график или точечная) </p> | <p>3. Есть несколько способов построения графиков функций (Plot, ListPlot и т.д.). </p> |

4. Чтобы каким-либо образом видоизменить график, необходимо зайти в меню «Диаграмма». Там указаны все возможные способы видоизменений графика.



4. Большинство различных видоизменений графика соответствует определённой опции, наименование которой необходимо знать наизусть или найти в справочном материале.



5. Интерфейс сложнее, чем в Mathematica и занимает большее пространство.



5. Интерфейс пакета значительно упрощён по сравнению с другими программами. Он строится из нескольких базовых понятий: Тетрадь, Ячейка и Палитра.

Поэтому, работая в этой системе, можно убрать всё ненужное и оставить только необходимое.



6. Не возникло трудностей с построением, т.к. всё уже знакомо.



6. При построении графиков у меня возникли трудности, потому что мы впервые столкнулись с этой программой, многое расположено в других местах и метод построения графиков совершенно новый.



Но с опытом работы этот способ построения стал доступным и более лёгким.



Заключение

Цель достигнута, мы изучили способы построения графиков функций с помощью различных преобразований.

Задачи выполнены, мы исследовали взаимосвязь графика функции $y=f(x)$ с графиками функций $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $y=f(kx)$, $y=kf(x)$, $y=-f(x)$, $y=f(x)+b$, $y=f(x-a)$, научились строить эти графики, рассмотрели задания с применением таких функций, построили лицо мушкетёра, используя исследуемые функции, выяснили с помощью каких программных средств кроме Excel и Calc можно строить графики функций, выявили, в чём их преимущества и недостатки.

Теперь мы знаем, что для построения графиков используется не только Microsoft Office Excel и Open Office Calc, но есть и другие программы, не только не уступающие по возможностям этим программам, но и превышающие их, например, Wolfram Mathematica.

Значимость полученных результатов: сейчас нам стало известно, как строить графики сложных функций с помощью преобразований графика исходной функции, и если встретятся задания с применением этих функций, то мы будем знать, как они выполняются.

Использовать эти результаты можно при решении заданий единого государственного экзамена.

Спасибо за внимание!

