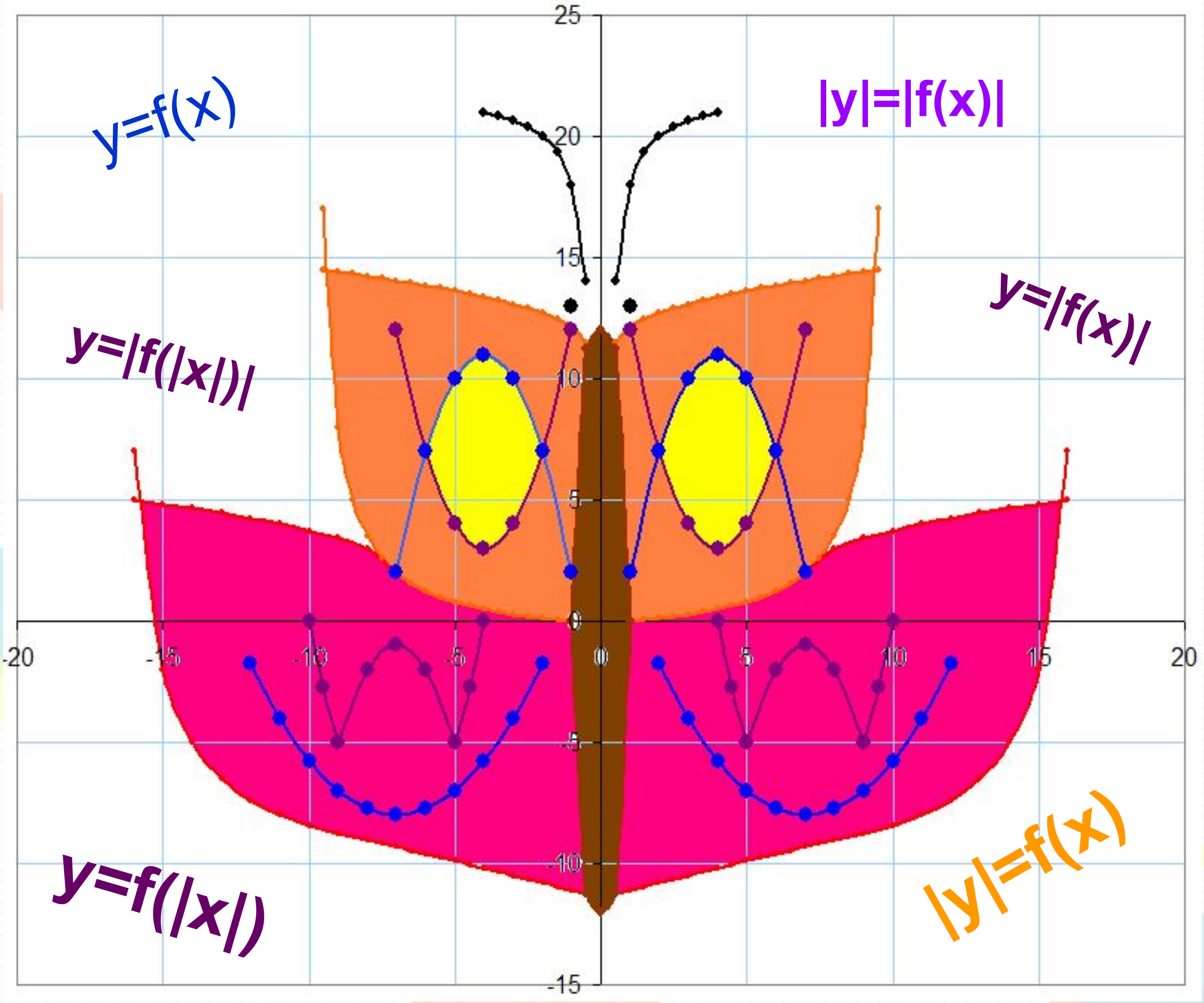
Преобразования графиков функций

Исследовательская работа

Выполнена ученицей 10 а класса
МОУ СОШ №1 г.Архангельска
Тёмкиной Валентиной Сергеевной
Научные руководители:
учитель математики ВКК
МОУ СОШ №1 г.Архангельска
Котцова Ольга Валентиновна
учитель информатики и ИКТ
ГБОУ АО Кадетская школа-интернат
«Архангельский морской кадетский корпус»

2012


y=f(x)
|y|=|f(x)|
y=|f(|x|)|
y=|f(x)|
y=f(|x|)
|y|=f(x)
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20

Актуальность: Эта тема актуальна, т.к. в конце 11 класса необходимо сдавать единый государственный экзамен по математике, куда будут включены задания, связанные с преобразованием графиков функций.

Нами были **проанализированы** различные собрания с экзаменационными заданиями.

Вывод: в сборниках КИМ единого государственного экзамена по математике встречаются задания на использование знаний о различных преобразованиях графиков функций.

Цель: Изучение способов построения графиков функций с помощью различных преобразований.

Задачи:

- Исследовать взаимосвязь графика функции $y=f(x)$ с графиками функций $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $y=f(kx)$, $y=kf(x)$, $y= -f(x)$, $y=f(x)+b$, $y=f(x-a)$.
- Рассмотреть задания на построение графиков функций с помощью преобразований.
- Попробовать создать рисунок, используя исследуемые функции.
- Узнать, есть ли более профессиональные и эффективные системы для построения графиков в декартовых системах координат кроме Excel и Calc, которые мы использовали для построения в прошлой работе.
- Выявить в чём преимущества и недостатки этих компьютерных программ.

Рабочая гипотеза: графики сложных функций, можно построить с помощью преобразований графика исходной функции.

Объект – графики функций.

Предмет – построение графиков сложных функций с помощью преобразования графика исходной функции.

Методы исследования: наблюдения, сравнения, анализ, обобщение, прогнозирование, знаковое моделирование.

$y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{Симметрия относительно оси «ох»}}$ $y=-f(x)$

$y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{Сохраняя ту часть, где } x\geq 0,}$ $y=f(|x|)$

выполнить её симметрию относительно оси «оу»

$y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{Сохраняя ту часть, где } y\geq 0, \text{ выполнить}}$ $y=|f(x)|$

симметрию относительно «ох» той части, где $y<0$

$$y=\cos x \xrightarrow{?} y=-\cos x$$

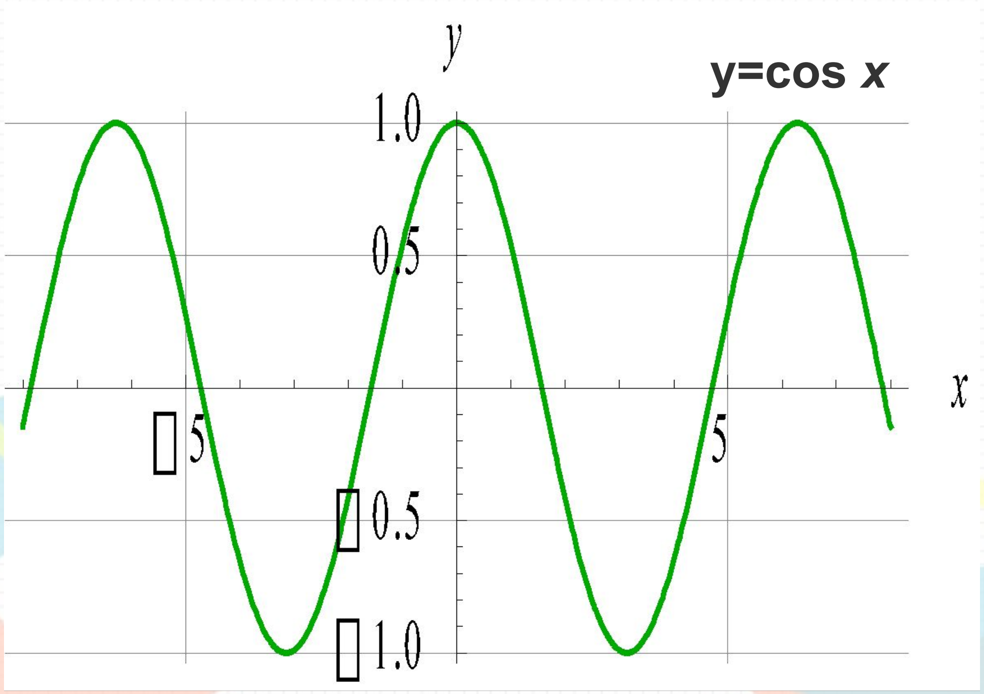
$$y=\cos x \xrightarrow{?} y=\cos |x|$$

$$y=\cos x \xrightarrow{?} y=|\cos x|$$

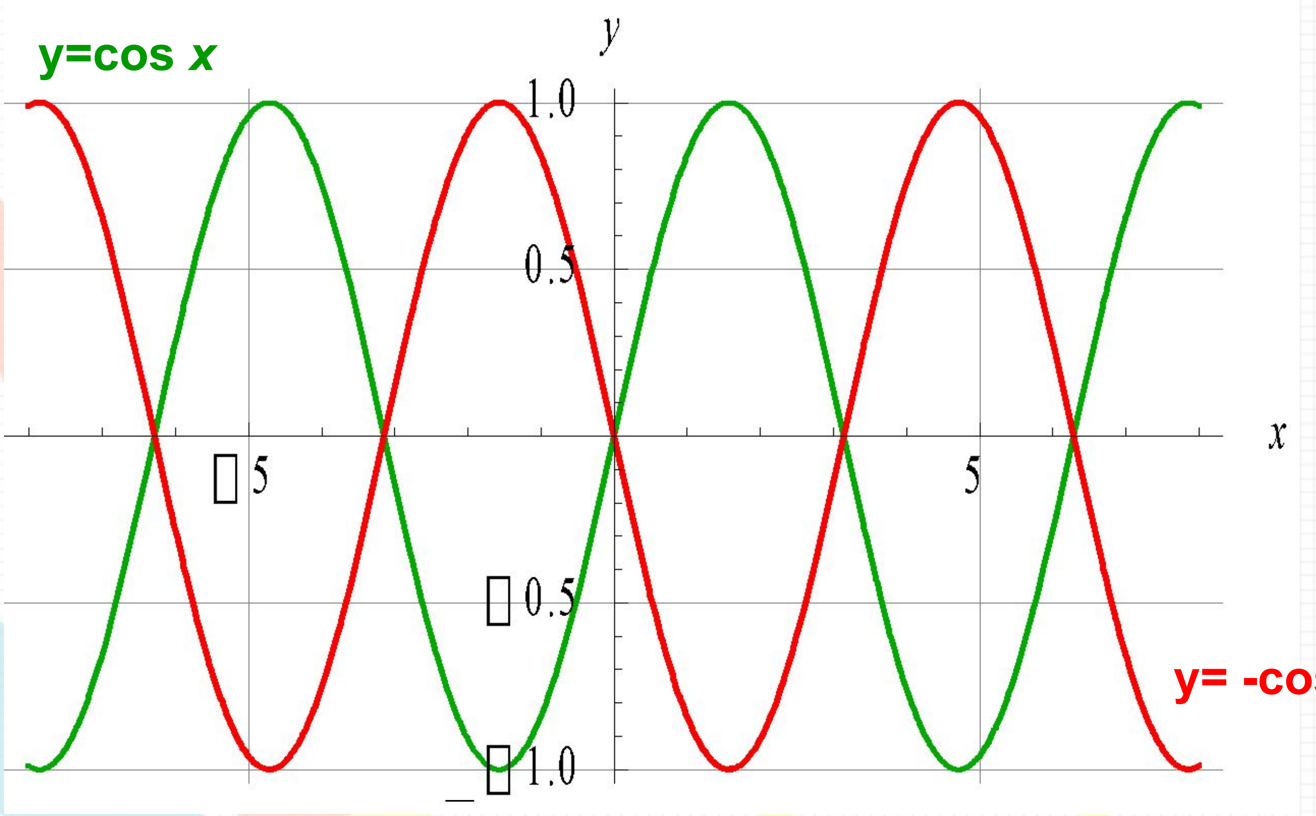
y=cos *x*

Графиком является косинусоида, проходящая через точки:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,5	0	-0,5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

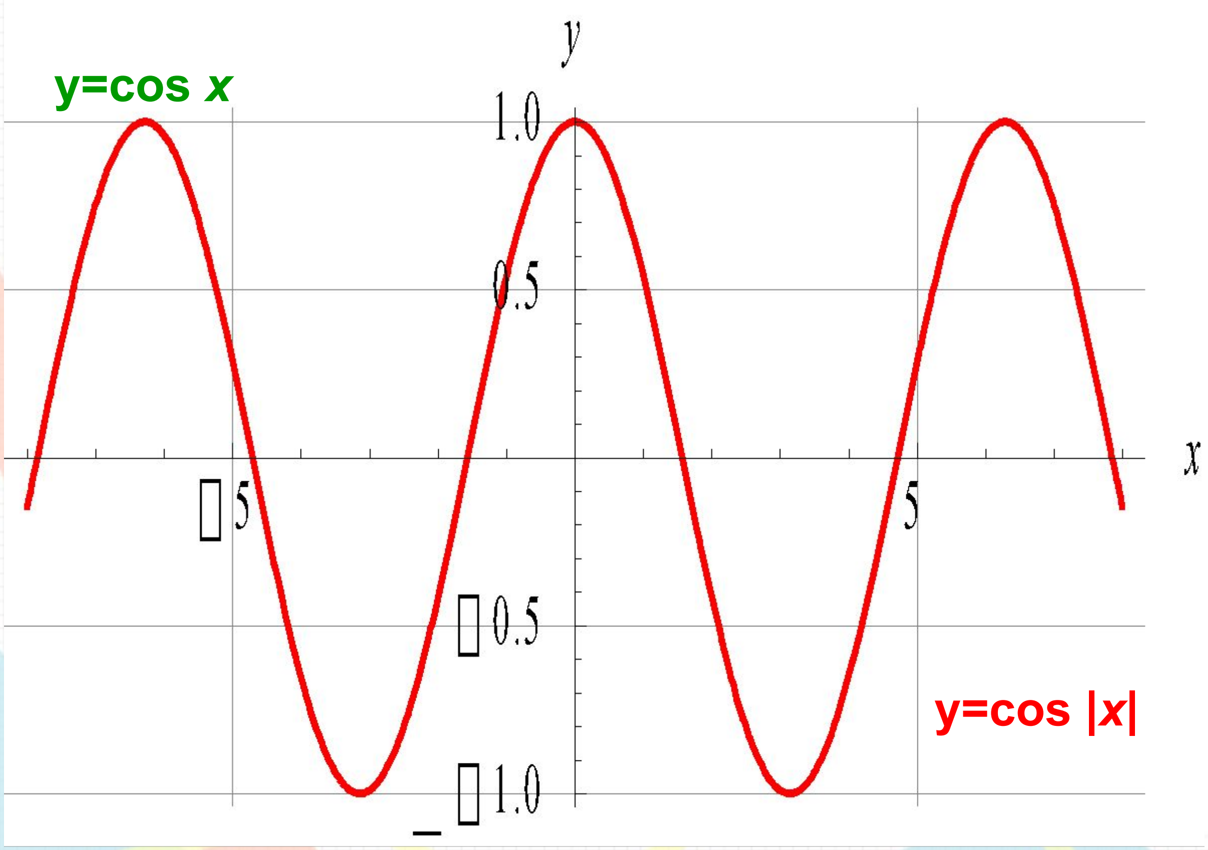


$y = \cos x \xrightarrow{?} y = -\cos x$



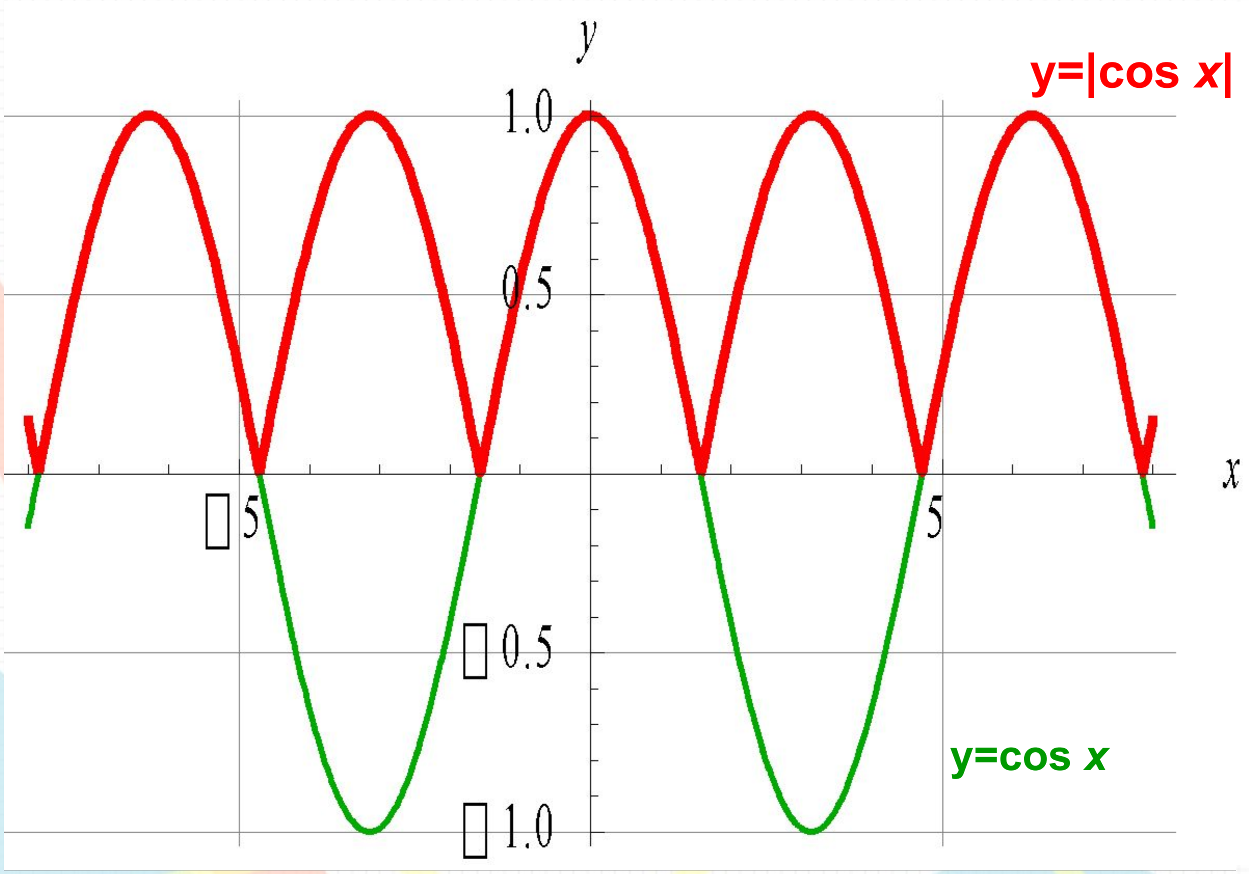
Для того, чтобы из графика функции y=cos *x* получить график функции y= - cos *x* , необходимо выполнить симметрию исходного графика относительно оси «ох».

$y=\cos x \xrightarrow{?} y=\cos|x|$



Для того, чтобы из графика функции y=cos *x* получить график функции y=cos |x|, необходимо сохранить ту часть исходного графика, где x≥0, и выполнить её симметрию относительно «оу», а это и будет сам график y=cos *x*.

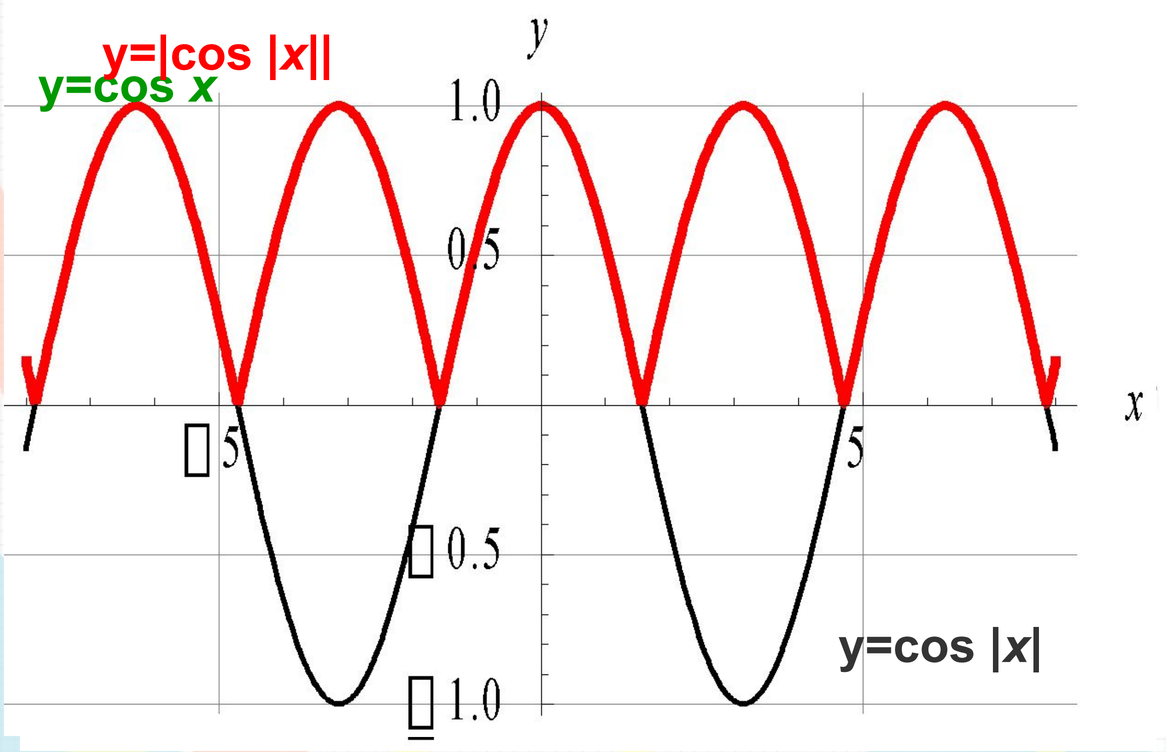
y=cos *x* $\xrightarrow{?}$ **y=|cos *x*|**



Для того, чтобы из графика функции y=cos*x* получить график функции y=|cos *x*|, необходимо сохранить ту часть исходного графика, где y≥0, и выполнить симметрию относительно «ox» той части, где y<0.

y=cos *x* $\xrightarrow{?}$ **y=|cos |*x*||**

y=cos *x* ⟶ **y=cos |*x*|** ⟶ **y=|cos |*x*||**



Для того, чтобы из графика функции y=cos*x* получить график функции y=|cos|x||, необходимо сохранить ту часть исходного графика, где x≥0, и выполнить её симметрию относительно «оу», а затем сохранить ту часть получившеюся графика, где y≥0, и выполнить её симметрию относительно «ох» той части, где y<0.

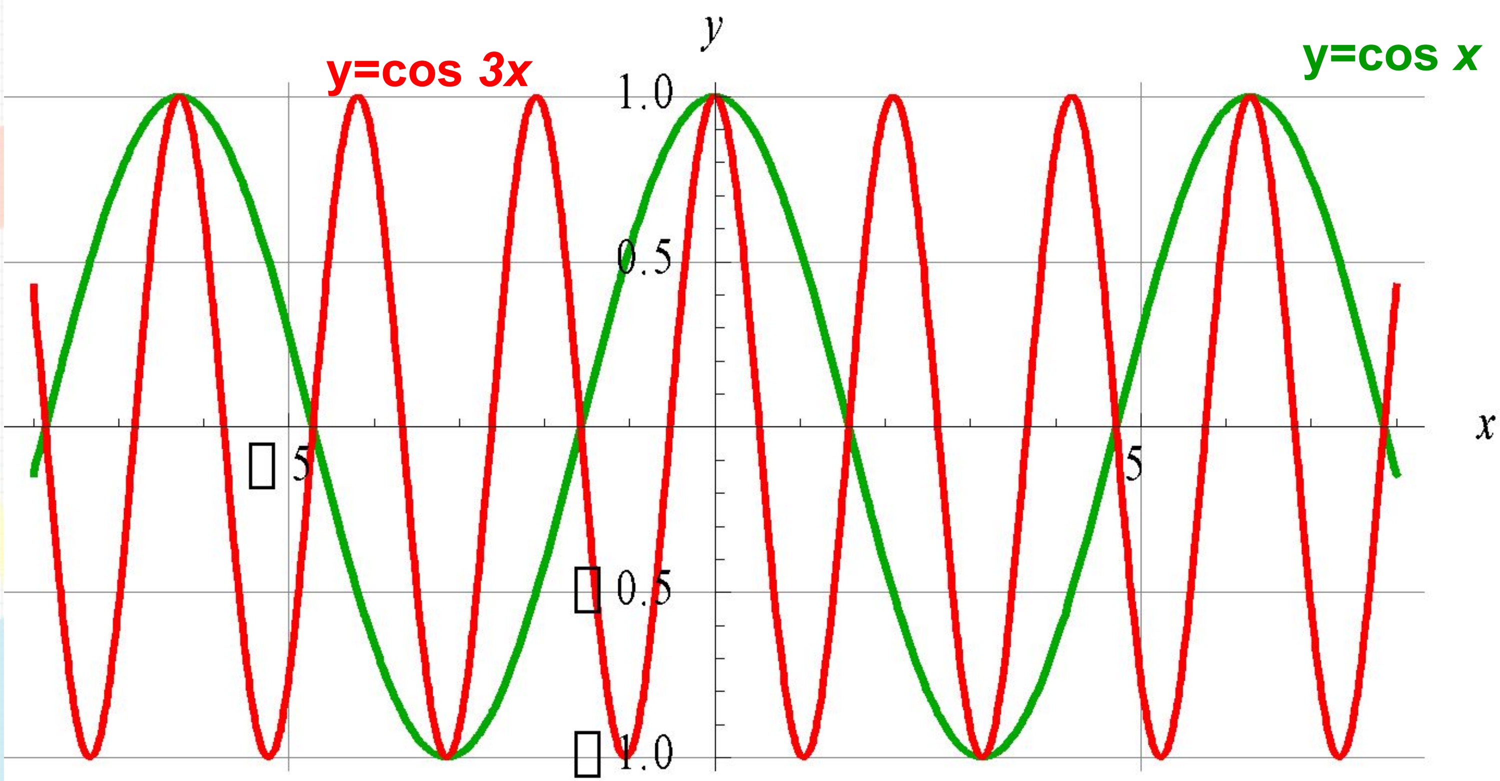
y=cos *x* $\xrightarrow{?}$ y=cos *3x*

y=cos *3x*

График этой функции проходит через точки:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\pi$
y	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1

y=cos *x* $\xrightarrow{?}$ **y=cos *3x***



<u>Вывод:</u> Для того, чтобы из графика функции y=cos*x* получить график функции y=cos 3*x*, необходимо сжать исходный график в 3 раза вдоль «ox».

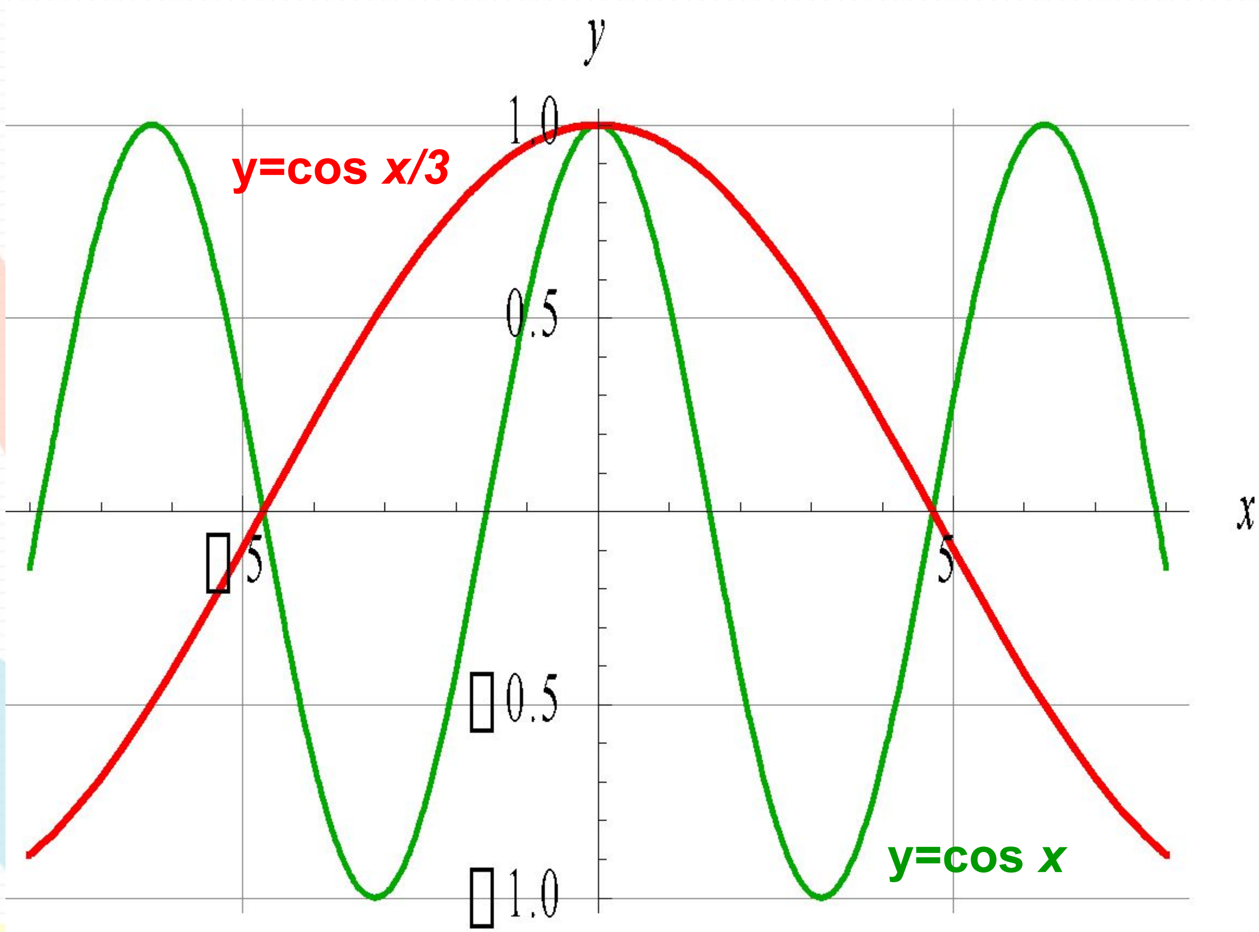
$y=\cos x \xrightarrow{?} y=\cos x/3$

$y=\cos x/3$

График этой функции проходит через точки:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
y	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

y=cos *x* $\xrightarrow{?}$ y=cos *x/3*



<u>Вывод</u>: Для того, чтобы из графика функции y=cos *x* получить график функции y=cos *x/3,* необходимо выполнить растяжение исходного графика в 3 раза вдоль оси «ох».

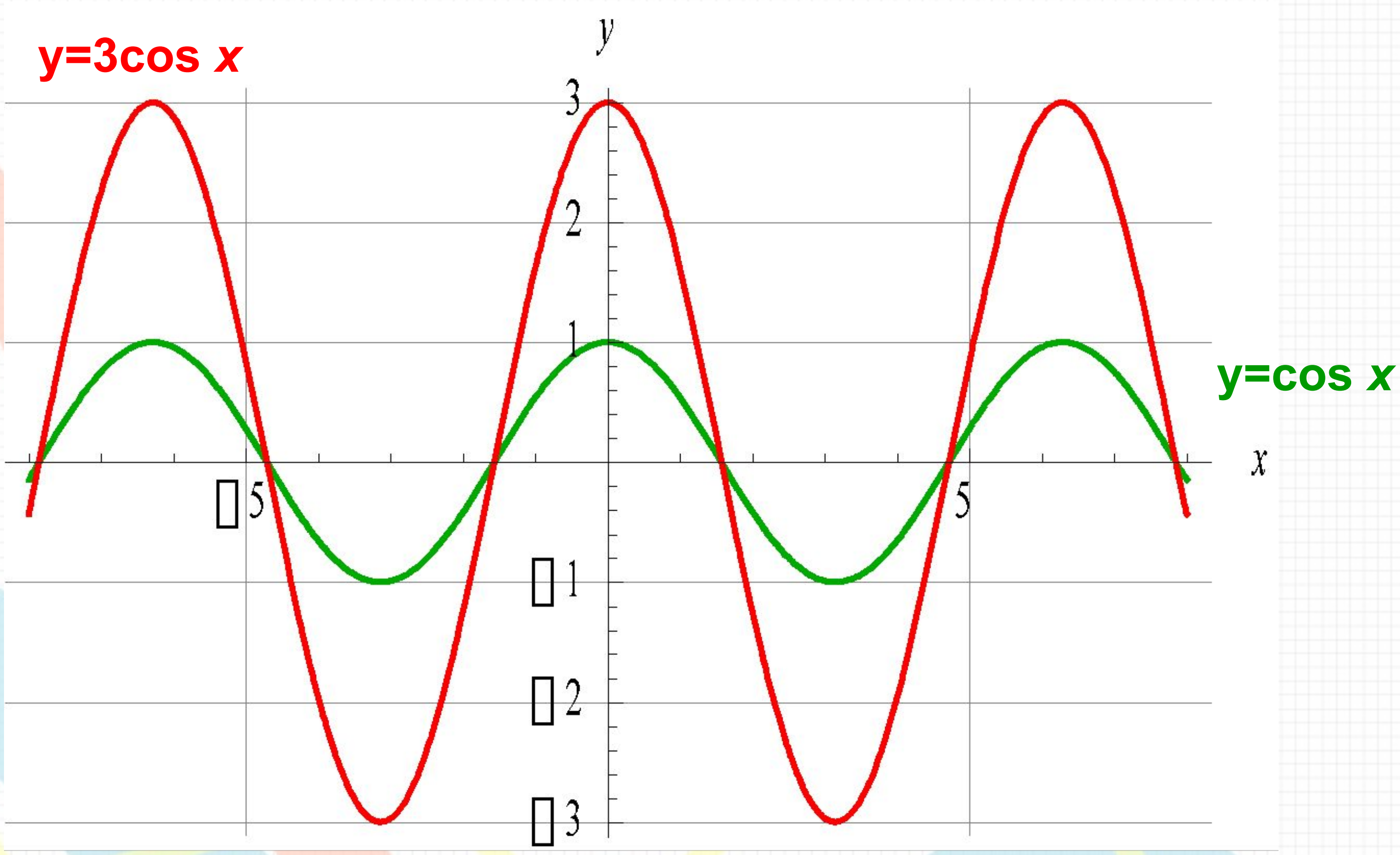
y=cos *x* $\xrightarrow{?}$ y=3cos *x*

y=3cos *x*

График проходит через точки:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\pi$
y	3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	1,5	0	-1,5	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	-3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	1,5	0	-1,5	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	-3

$y=\cos x \xrightarrow{?} y=3\cos x$



<u>Вывод:</u> Для того, чтобы из графика функции y=cos *x* получить график функции y=3cos *x*, необходимо растянуть исходный график в 3 раза вдоль оси «оу».

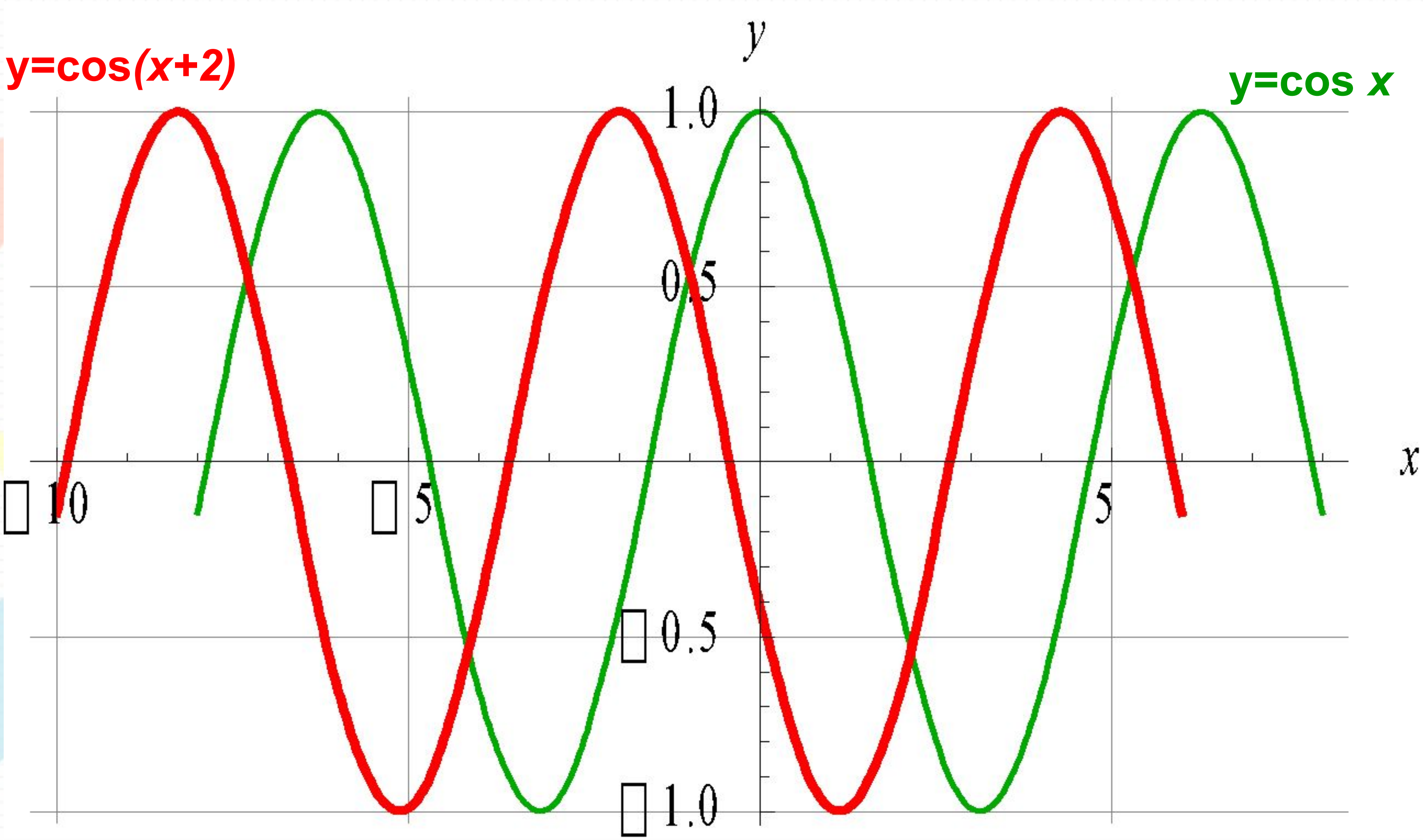
$y=\cos x \xrightarrow{?} y=\cos(x+2)$

$y=\cos(x+2)$

Графиком является косинусоида, проходящая через точки:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\pi$
y	-0,5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,5	0	0,5	0	0,5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,5

y=cos *x* $\xrightarrow{?}$ **y=cos(*x*+2)**



<u>Вывод:</u> Для того, чтобы из графика функции y=cos*x* получить график функции y=cos(*x*+2) , необходимо сдвинуть исходный график вдоль оси «ох» на 2 единицы влево.

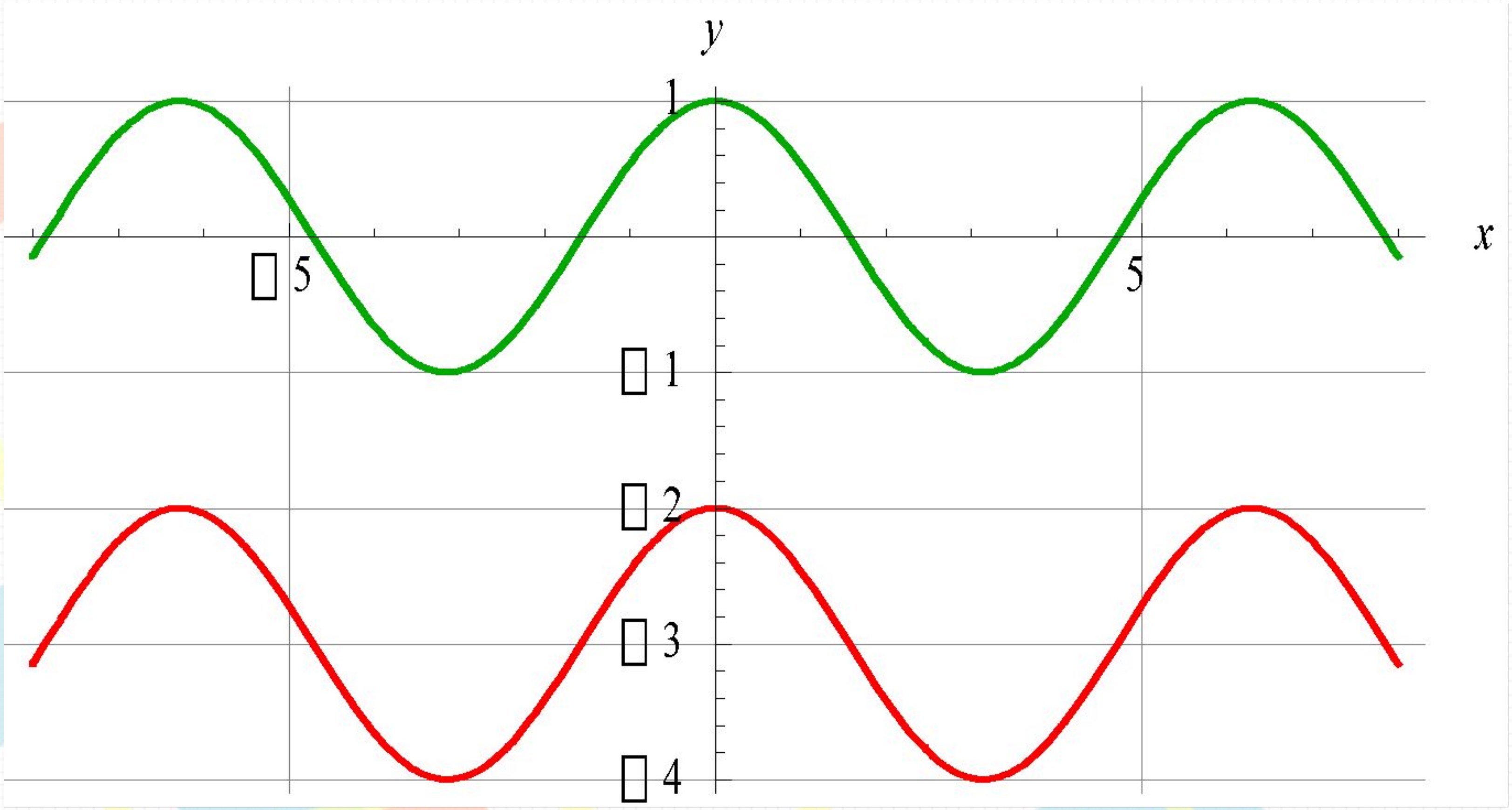
y=cos *x* $\xrightarrow{?}$ y=cos*x*-3

y=cos*x*-3

Графиком является косинусоида, проходящая через точки:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\pi$
y	-2	$\frac{\sqrt{3}-6}{2}$	-2,5	-3	-3,5	$-\frac{\sqrt{3}+6}{2}$	-4	$\frac{\sqrt{3}-6}{2}$	-2,5	-3	-3,5	$-\frac{\sqrt{3}+6}{2}$	-4

y=cos *x* $\xrightarrow{?}$ y=cos*x*-3



Вывод: Для того, чтобы из графика функции y=cos*x* получить график функции y=cos *x* -3, необходимо сдвинуть исходный график вдоль оси «оу» на 3 единицы вниз.

Итог:

$y=f(x)$ — Сохраняя ту часть исходного графика, где $x \geq 0$, выполнить её симметрию относительно оси «оу» → $y=f(|x|)$

$y=f(x)$ — Сохраняя ту часть, где $y \geq 0$, выполнить симметрию относительно оси «ох» той части, где $y<0$ → $y=|f(x)|$

$y=f(x)$ — Если $k>1$, то сжатие исходного графика в k раз вдоль оси «ох», если $0<k<1$, то растяжение графика в k раз вдоль «ох» → $y=f(kx)$

$y=f(x)$ — Если $k>1$, то растяжение исходного графика в k раз вдоль оси «оу», если $0<k<1$, то сжатие графика в k раз вдоль «оу» → $y=kf(x)$

$y=f(x)$ — Симметрия исходного графика относительно оси «ох» → $y= -f(x)$

$y=f(x)$ — Сдвиг вдоль оси «ох», если $a \geq 0$, то на *a* единиц вправо, если $a<0$, то на *a* единиц влево → $y=f(x-a)$

$y=f(x)$ — Сдвиг вдоль оси «оу», если $b \geq 0$, то на *b* единиц вверх, если $b<0$, то на *b* единиц вниз → $y=f(x)+b$

Исследование количества корней уравнения:

$$4\cos x = a$$

$$\begin{cases} y = 4\cos x \\ y=a \end{cases}$$

1. $y = 4\cos x$

$y = \cos x \longrightarrow y = 4\cos x$

Мы знаем, что для того, чтобы из графика функции $y = \cos x$ получить график функции $y = 4\cos x$ необходимо растянуть исходный график в 4 раза вдоль оси «оу».

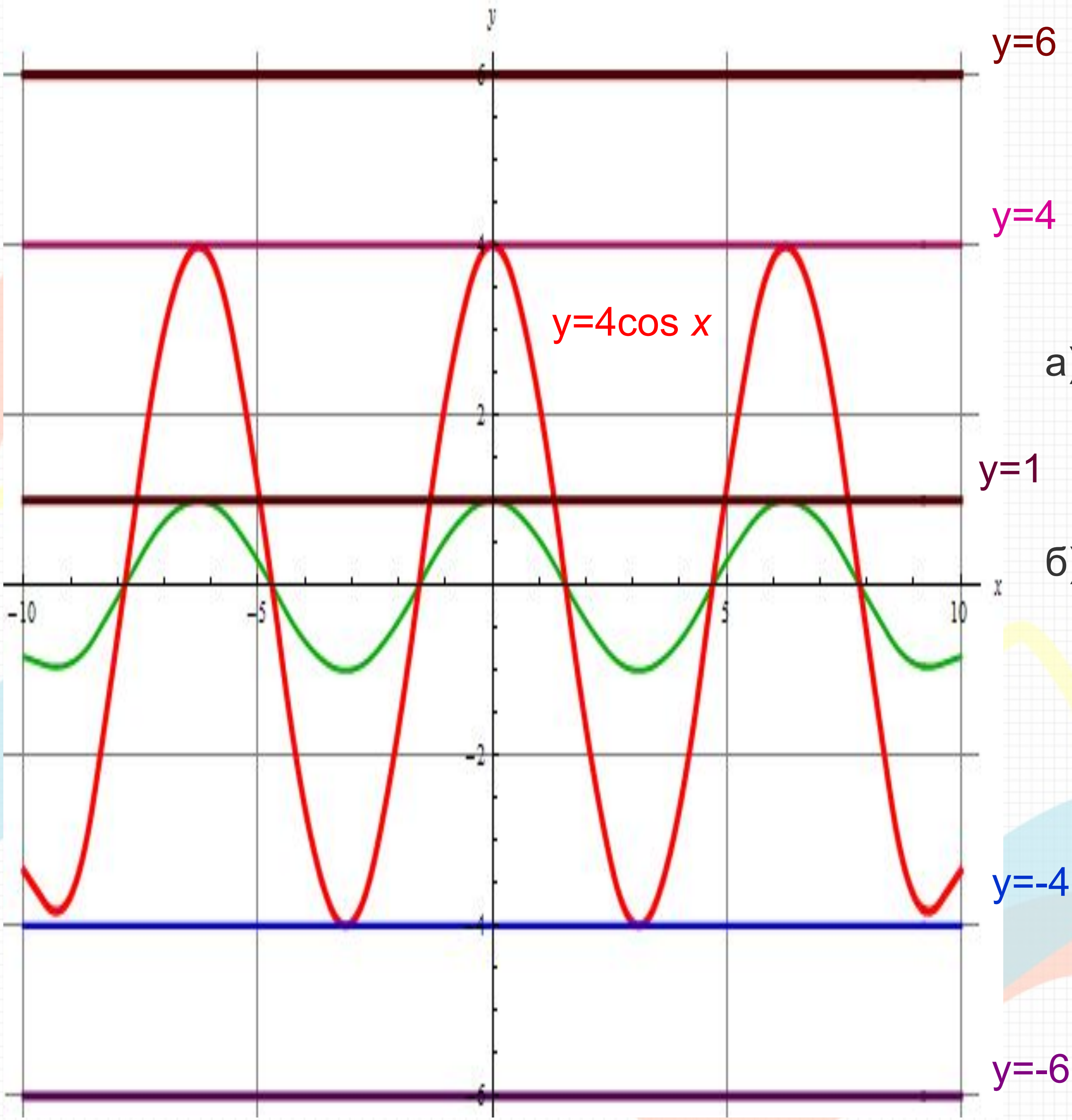
$y = \cos x$

Графиком является косинусоида, проходящая через точки:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,5	0	-0,5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

2. y=a – линейная функция.

Графиком является прямая, параллельная оси «ох» и проходящая через точки (2;a) и (0;a).



а) Уравнение 4cos *x*=а имеет бесконечное множество корней при $a \in [-4;4]$

б) Уравнение 4cos *x*=а не имеет корней при $a \in (-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$

Исследование количества корней уравнения:

$|\cos 2x| = x^2$

$$\begin{cases} y=|\cos 2x| \\ y=x^2 \end{cases}$$

1. $y=|\cos 2x|$

$y=\cos x \longrightarrow y=\cos 2x \longrightarrow y=|\cos 2x|$

Мы знаем, что для того, чтобы из графика функции $y=\cos x$ получить график функции $y=\cos 2x$, необходимо сжать исходный график в 2 раза вдоль оси «ох», а затем, чтобы получить график функции $y=|\cos 2x|$, необходимо сохранить ту часть графика, где $y \geq 0$, и выполнить симметрию относительно оси «ох» той части, где $y<0$.

$y=\cos x$

Графиком является косинусоида, проходящая через точки:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,5	0	-0,5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

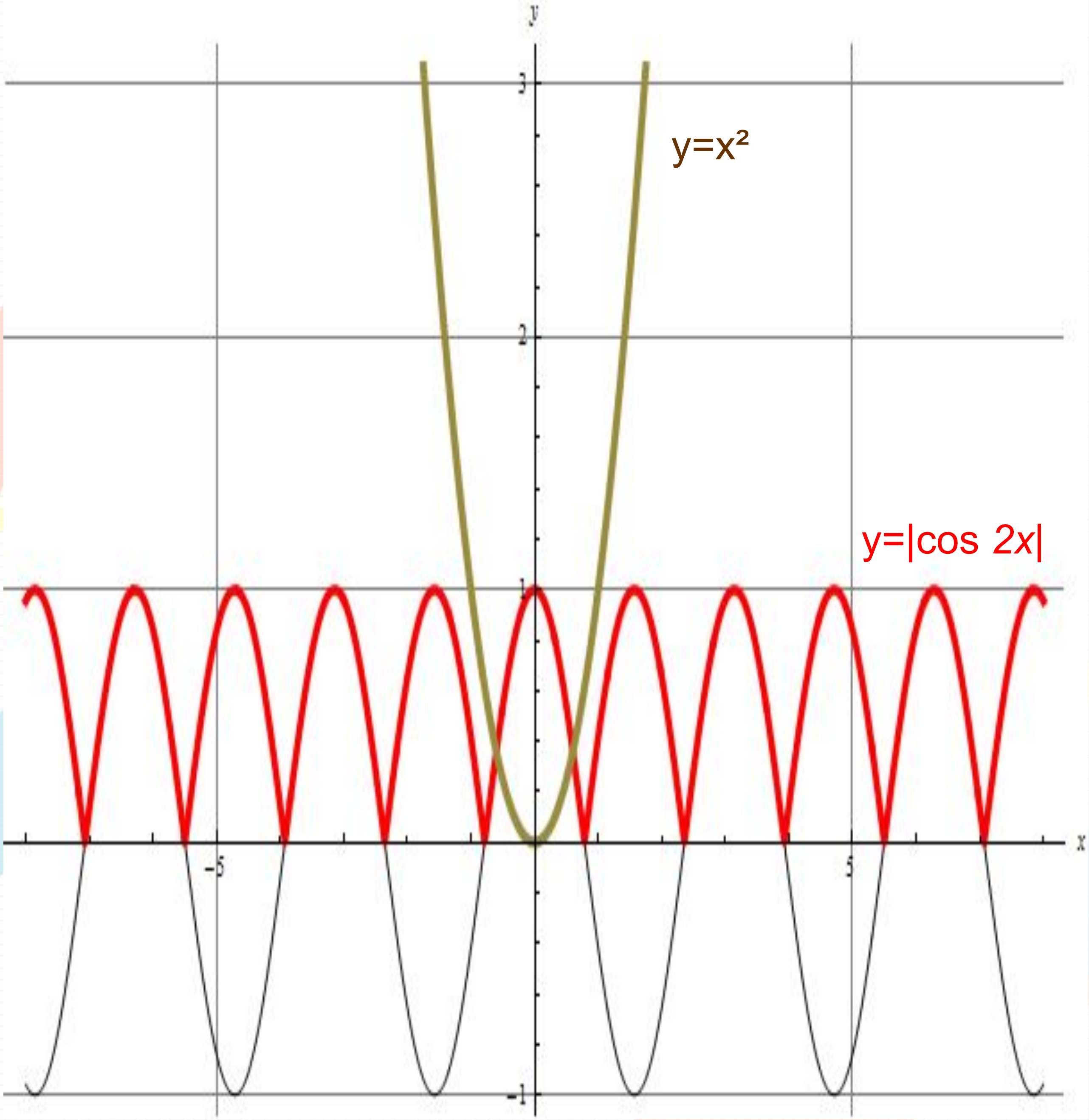
$y=x^2$ - квадратичная функция.

Графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

(0;0) – вершина параболы.

«оу» - ось симметрии параболы.

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	0	1	4	9	1	4	9



Т.к. графики функций $y=|\cos 2x|$ и $y=x^2$ пересекаются в двух точках, то уравнение $|\cos 2x|=x^2$ имеет 2 корня.

Функции, использованные для построения рисунка

$y=\frac{1}{8}x^2-9 \quad x\in[-8;8]$

$y=-5 \quad x\in[-3;3]$

$y=|\sin x|-5 \quad x\in[-3;3]$

$y=-\cos\frac{x}{2}-5 \quad x\in[-3;3]$

$y=\sin|x|-4 \quad x\in[-7;7]$

$y=2\sin|x|-4 \quad x\in[-7;7]$

$y=x^2-11 \quad x\in[-2;2]$

$y=tg2(x-1)-9.5 \quad x\in[0,75;1.25]$

$y=tg2(x-0,5)-9 \quad x\in[0;1]$

$y=tg2x-8,5 \quad x\in[-0,5;0,25]$

$y=tg2(x+0,5)-8 \quad x\in[-1;-0,25]$

$y=tg2(x+1)-7,5 \quad x\in[-1,25;-0,75]$

$y=\frac{3,5}{x-3,5}-14 \quad x\in[4;8]$

$y=\frac{3,5}{x+3,5}-14 \quad x\in[-8;-4]$

$y=\frac{0,5}{x-0,5}-1,5 \quad x\in[0,625;1,5]$

$y=-\frac{0,5}{x+0,5}-1,5 \quad x\in[-1,5;-0,625]$

$y=-\frac{1}{2}\cos x-1 \quad x\in[-1,5;1,5]$

$y=|\cos x|+3,5 \quad x\in[-4,65;-1,5]\cup[1,65;4,7]$

$y=-|\cos x|+3,5 \quad x\in[-4,65;-1,5]\cup[1,65;4,7]$

$y=3,5+\sqrt{0,75^2-(x+3)^2} \quad x\in[-10;10]$

$y=3,5-\sqrt{0,75^2-(x+3)^2} \quad x\in[-10;10]$

$y=3,5+\sqrt{0,75^2-(x-3)^2} \quad x\in[-10;10]$

$y=3,5-\sqrt{0,75^2-(x-3)^2} \quad x\in[-10;10]$

$y=1,5|\cos x|+3,5 \quad x\in[-4,65;-1,5]\cup[1,65;4,7]$

$y=\frac{1}{2}\sqrt{2(|x|-1)}+5,5 \quad x\in[-3;-1]\cup[1;3]$

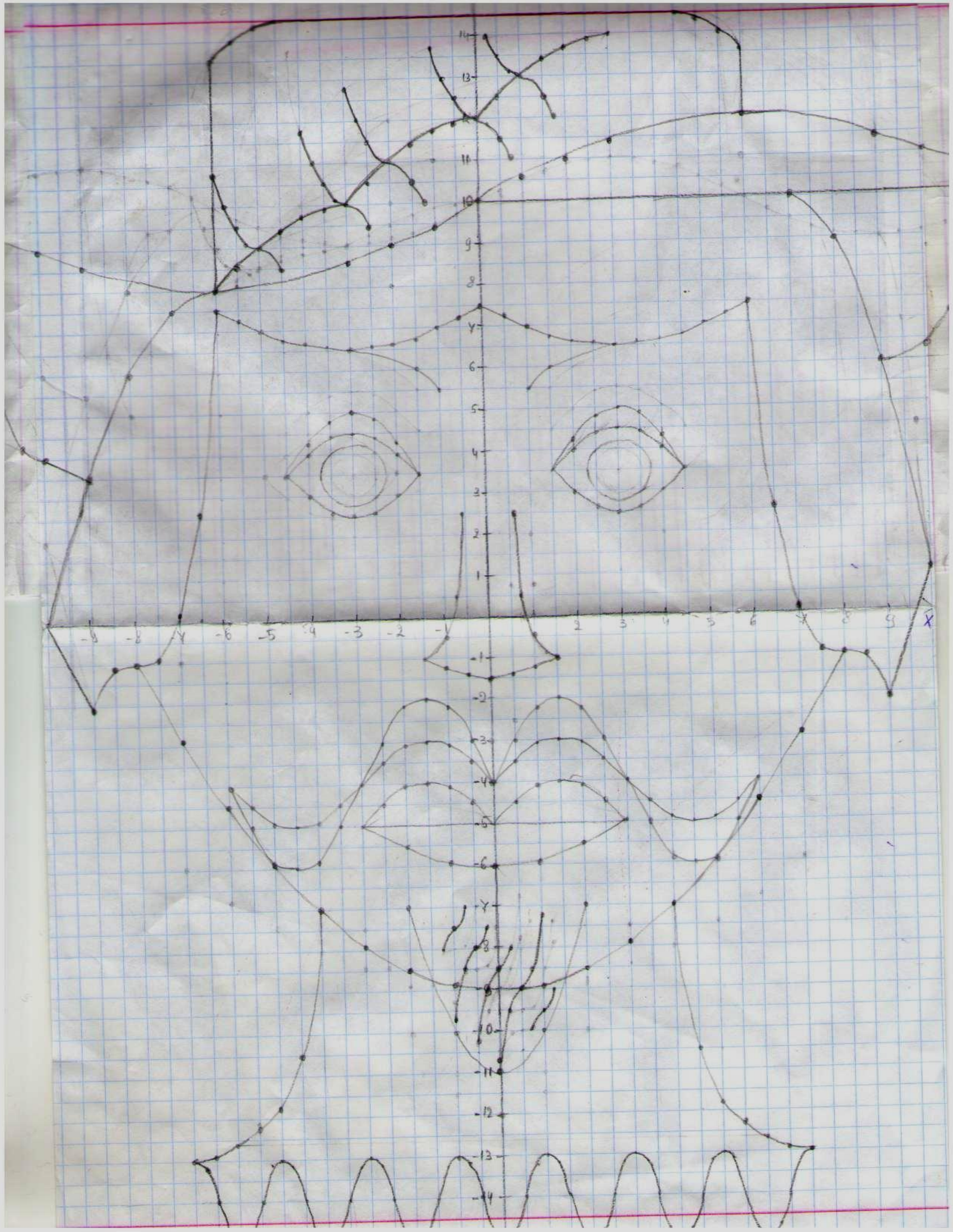
$y=-\left|\sin\frac{x}{2}\right|+7,5 \quad x\in[-6;6]$

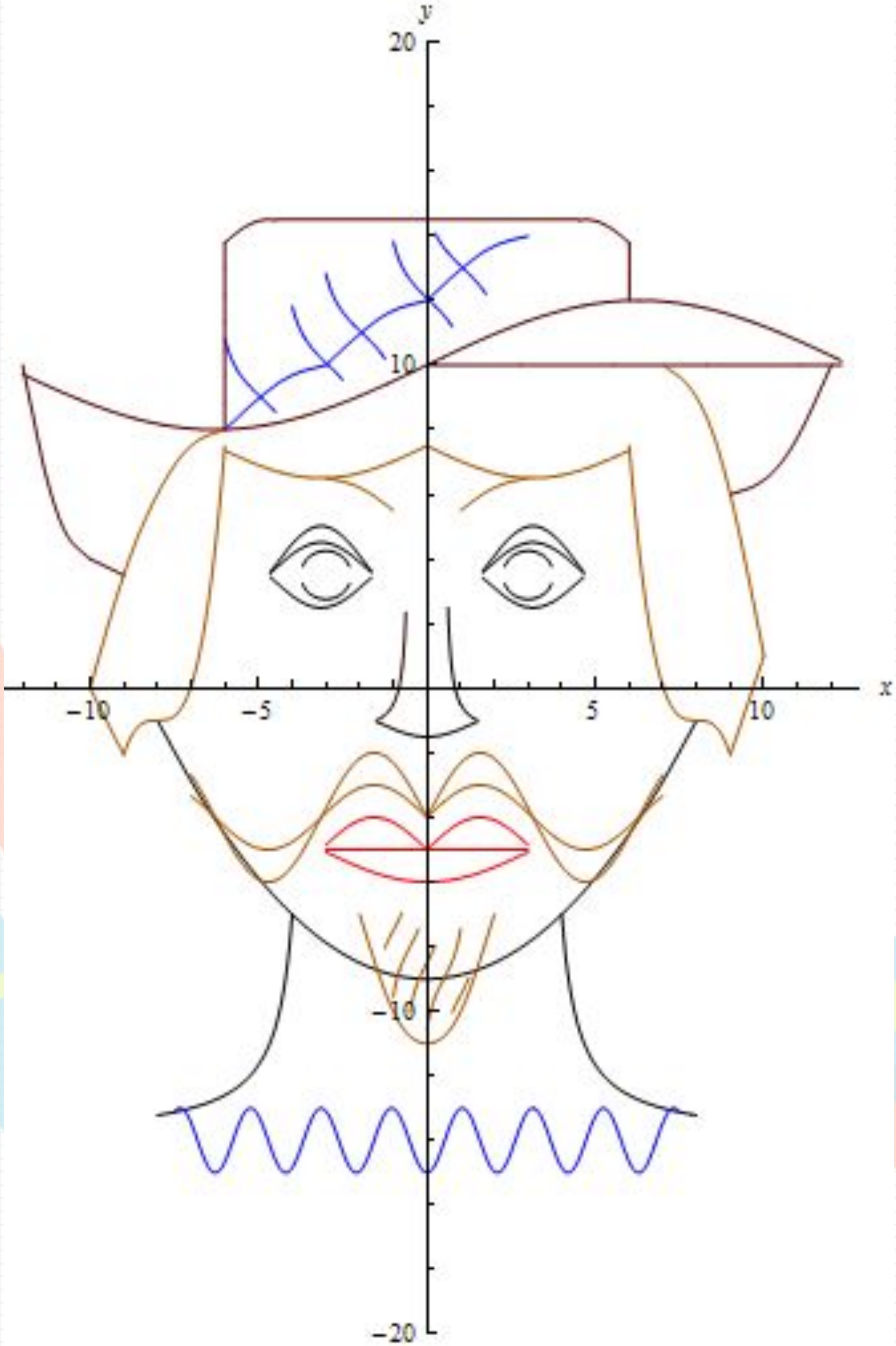
$y=1,0625(x+8)^3-1 \quad x\in[-9;-6]$

$y=-1,0625(x-8)^3-1 \quad x\in[6;9]$

$y=2\sin\frac{x}{4}+10 \quad x\in[-12;12,3]$

$y=-\frac{1}{2}(x+6)^2+8 \quad x\in[-10;-6]$





y
20
10
x
−10
−5
5
10
−10
−20

Microsoft Office Excel и Open Office Calc	Wolfram Mathematica
1. Чтобы построить график функции необходимо указать список значений переменной «х», а затем ввести формулу для вычисления переменной «у». Только потом можно строить график.	1. В отличие от других систем Mathematica применяет разумную автоматизацию. То есть достаточно выбрать необходимую команду, ввести функцию и указать её область значений, а затем программа сама построит график.
2. Как следствие из первого пункта, на построение графиков затрачивается большое количество времени.	2. Исходя из первого пункта, можем сделать вывод, что на построение графиков затрачивается совсем немного времени.
3. Существует один способ построения графиков (мастер диаграмм – график или точечная)	3. Есть несколько способов построения графиков функций (Plot, ListPlot и т.д.).

4. Чтобы каким-либо образом видоизменить график, необходимо зайти в меню «Диаграмма». Там указаны все возможные способы видоизменений графика.	4. Большинство различных видоизменений графика соответствует определённой опции, наименование которой необходимо знать наизусть или найти в справочном материале.
5. Интерфейс сложнее, чем в Mathematica и занимает большее пространство.	5. Интерфейс пакета значительно упрощён по сравнению с другими программами. Он строится из нескольких базовых понятий: Тетрадь, Ячейка и Палитра. Поэтому, работая в этой системе, можно убрать всё ненужное и оставить только необходимое.
6. Не возникло трудностей с построением, т.к. всё уже знакомо. и -	6. При построении графиков у меня возникли трудности, потому что мы впервые столкнулись с этой программой, многое расположено в других местах и метод построения графиков совершенно новый. и Но с опытом работы этот способ построения стал доступным и более лёгким.

Заключение

Цель достигнута, мы изучили способы построения графиков функций с помощью различных преобразований.

Задачи выполнены, мы исследовали взаимосвязь графика функции y=f(x) с графиками функций y=|f(x)|, y=f(|x|) , y=f(kx), y=kf(x), y= -f(x), y=f(x)+b, y=f(x-a),научились строить эти графики, рассмотрели задания с применением таких функций, построили лицо мушкетёра, используя исследуемые функции, выяснили с помощью каких программных средств кроме Excel и Calc можно строить графики функций, выявили, в чём их преимущества и недостатки.

Теперь мы знаем, что для построения графиков используется не только Microsoft Office Excel и Open Office Calc, но есть и другие программы, не только не уступающие по возможностям этим программам, но и превышающие их, например,Wolfram Mathematica.

Значимость полученных результатов: сейчас нам стало известно, как строить графики сложных функций с помощью преобразований графика исходной функции, и если встретятся задания с применением этих функций, то мы будем знать, как они выполняются.

Использовать эти результаты можно при решении заданий единого государственного экзамена.

Спасибо за внимание!