

Преобразования Лапласа

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt,$$

устанавливает соответствие между функциями действительной переменной t и функциями комплексной переменной p . Функцию времени $x(t)$, входящую в интеграл Лапласа, называют *оригиналом*, а результат интегрирования – функцию $X(p)$ - *изображением* функции $x(t)$ по Лапласу.

$$L^{-1}[X(p)] = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)e^{pt} dp$$

Изображение производной некоторой функции равно изображению самой функции, умноженному на параметр преобразования P

Таблица преобразований Лапласа

$x(t) (t > 0)$	$X(s) = L[x(t)]$
$1(t)$	$1/s$
$\delta(t)$	1
t	$1/s^2$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s - a)$
e^{-at}	$1/(s + a)$
$t \cdot e^{at}$	$1/(s - a)^2$
$t^n \cdot e^{at}$	$n!/(s - a)^{n+1}$
$\sin(\omega t)$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$s/(s^2 + \omega^2)$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$[\sin(\varphi) \cdot s + \cos(\varphi) \cdot \omega]/(s^2 + \omega^2)$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$[\cos(\varphi) \cdot s - \sin(\varphi) \cdot \omega]/(s^2 + \omega^2)$
$e^{at} \cdot \sin(\omega t)$	$\omega/[(s - a)^2 + \omega^2]$
$e^{at} \cdot \cos(\omega t)$	$(s - a)/[(s - a)^2 + \omega^2]$
$e^{at} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	$[\sin(\varphi) \cdot (s - a) + \cos(\varphi) \cdot \omega]/[(s - a)^2 + \omega^2]$
$e^{at} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	$[\cos(\varphi) \cdot (s - a) - \sin(\varphi) \cdot \omega]/[(s - a)^2 + \omega^2]$

Характеристики САУ

Математическое описание линейного непрерывного динамического элемента системы сводится к описанию связи между его входом и выходом. Данная связь может быть задана в виде:

- 1) линейного дифференциального уравнения;
- 2) передаточной функции;
- 3) частотных характеристик;
- 4) временных характеристик;

Передаточной функцией звена $W(p)$ называется отношение изображений Лапласа выходной и входной величин при нулевых начальных условиях.

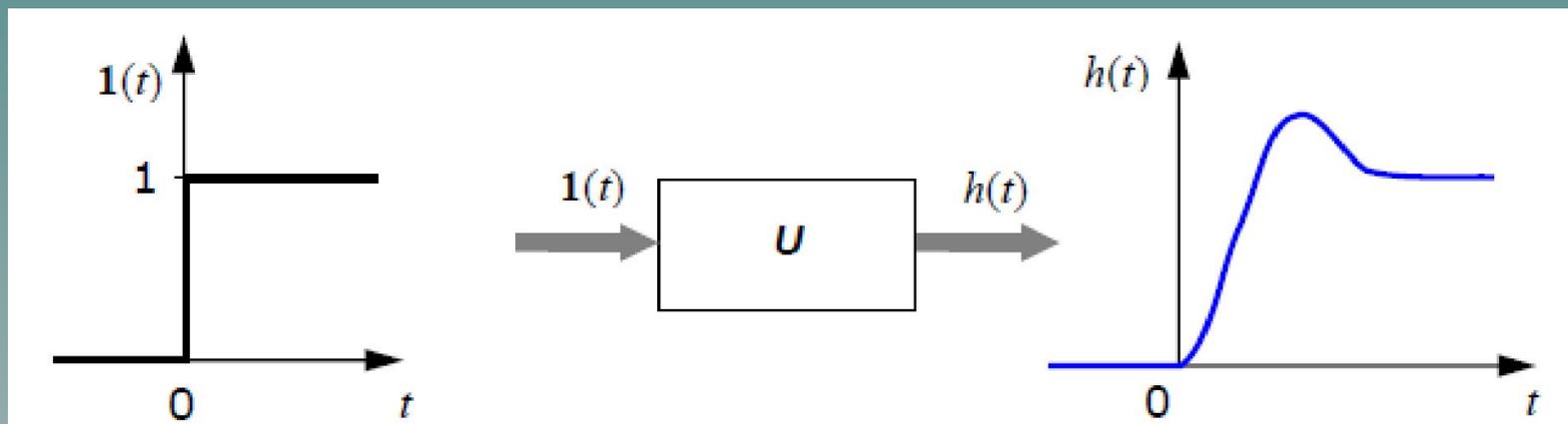
$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}}.$$

Временные характеристики

Переходная функция

Переходная функция звена представляет собой реакцию на выходе звена, вызванную подачей на его вход единичного ступенчатого воздействия. *Единичное ступенчатое воздействие (единичная ступенчатая функция)* – это воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до единицы и далее остается неизменным.

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



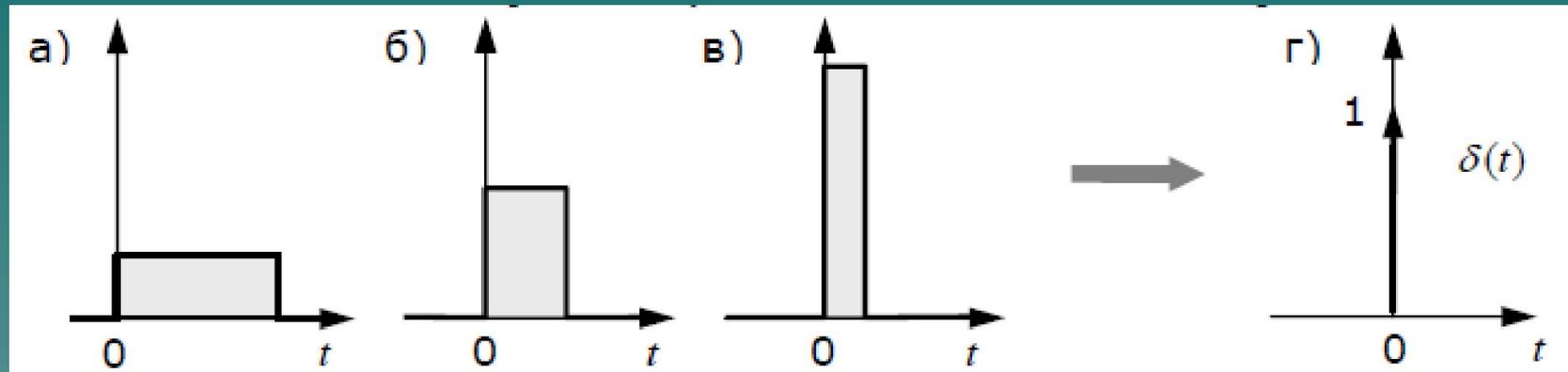
Переходная функция

Переходная характеристика наглядно представляет переход объекта от одного статического состояния к другому. Следовательно, переходная характеристика характеризует динамические свойства системы.

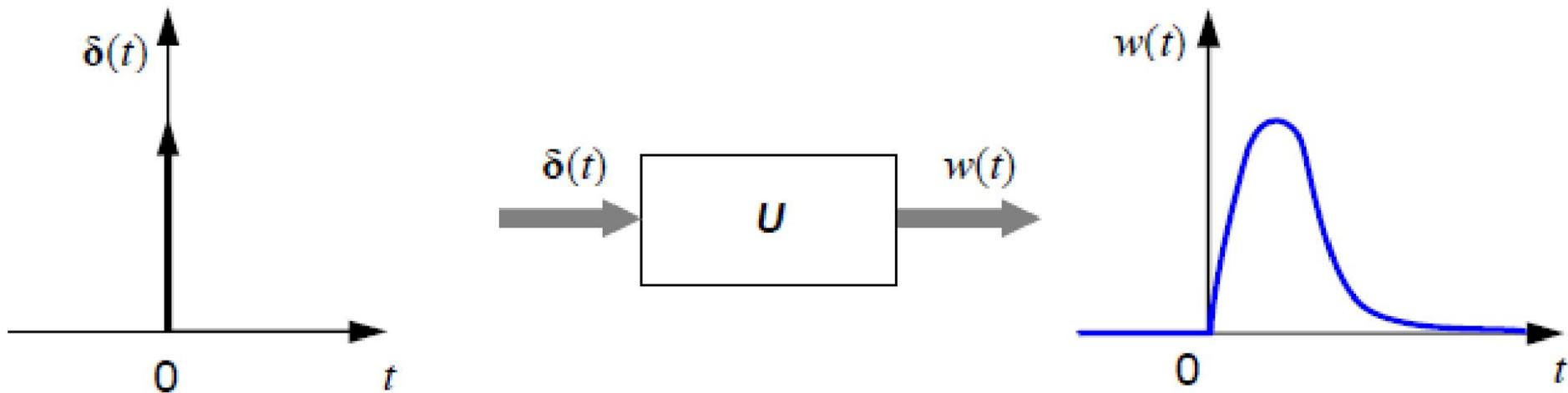
$Y(p) = \frac{W(p)}{p}$ - преобразование Лапласа для выходного сигнала системы

$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(p)}{p} \right]$ - переходная функция

Импульсная характеристика (весовая функция)



Реакция системы на единичный импульс (дельта-функцию) называется импульсной характеристикой



Импульсная характеристика (весовая функция)

Весовая функция эта характеристика представляет собой реакцию звена на единичный импульс. *Единичный импульс (единичная импульсная функция, или дельта-функция)* – это математическая идеализация предельно короткого импульсного сигнала. Единичный импульс – это импульс, площадь которого равна единице при длительности, равной нулю, и высоте, равной бесконечности.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

$$L[\delta(t)] = 1$$

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\}$$

Частотные характеристики

Частотные характеристики описывают установившиеся вынужденные колебания на выходе звена, вызванные гармоническим воздействием на входе

$$x = x_{\max} \sin \omega t$$

$$y = y_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$$

По окончании переходного процесса на выходе звена будут существовать гармонические колебания с той же частотой, что и входные колебания, но отличающиеся в общем случае по амплитуде и фазе.

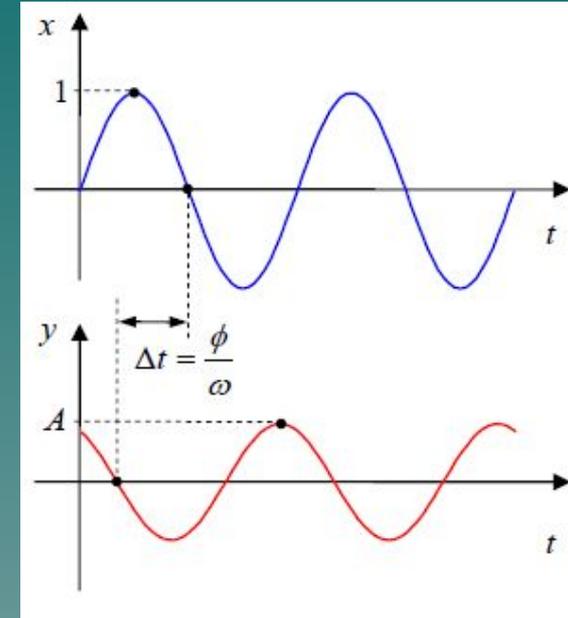
$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega}$$

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$|W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

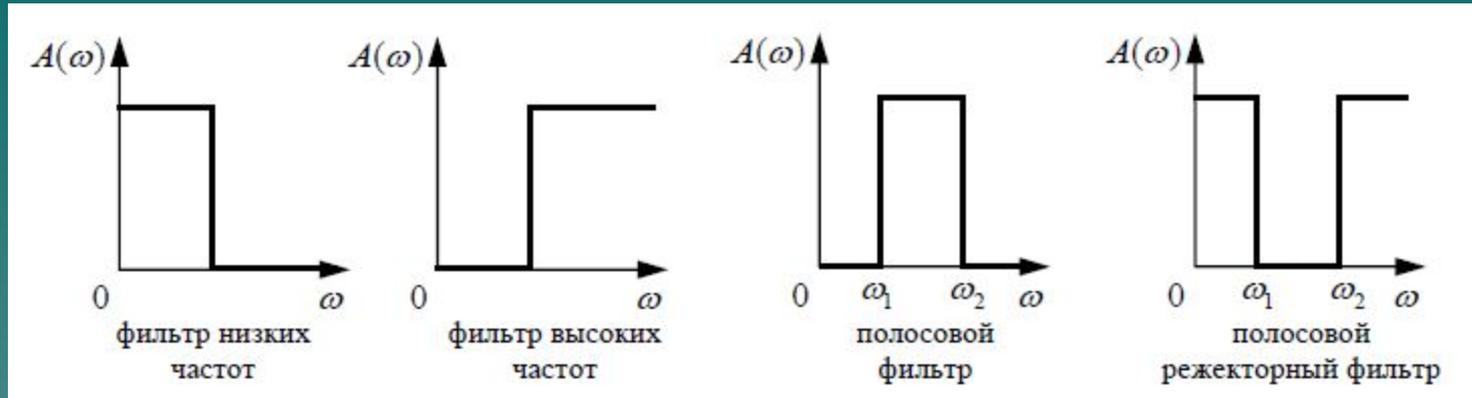
$$A(\omega) = |W(j\omega)|,$$

$$A = y_{\max} / x_{\max}$$



амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), показывает во сколько раз изменяется амплитуда выходного синусоидального сигнала в зависимости от частоты входного сигнала;

Частотные характеристики

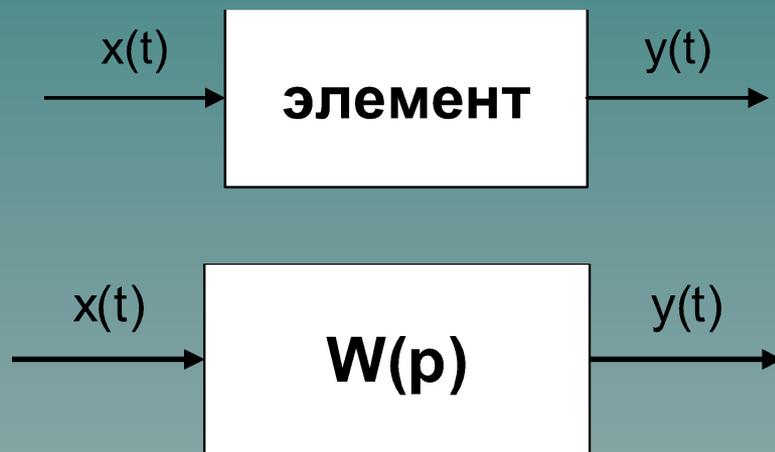


$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) показывает фазовый сдвиг выходного синусоидального сигнала относительно входного в зависимости от частоты входного сигнала;

Типовые динамические звенья

Динамическим звеном называется любой элемент системы автоматического управления, имеющий определенное математическое описание, т.е. для которого известна передаточная функция.



Усилительное (пропорциональное) звено

Передаточная функция

$$W(p) = K$$

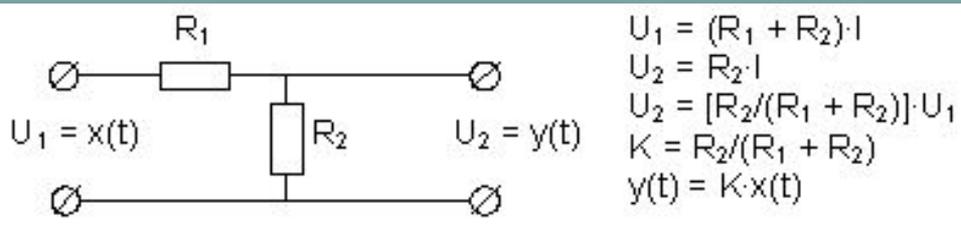
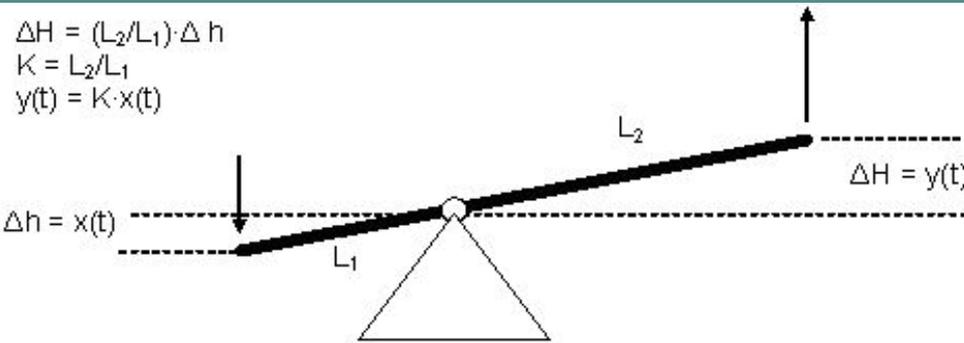
где K – коэффициент усиления.

Математическое описание звена

$$y(t) = K \cdot x(t)$$

Физическая реализация звена.

Примерами таких звеньев могут служить, рычажный механизм, жесткая механическая передача, редуктор, электронный усилитель сигналов на низких частотах, делитель напряжения и др.



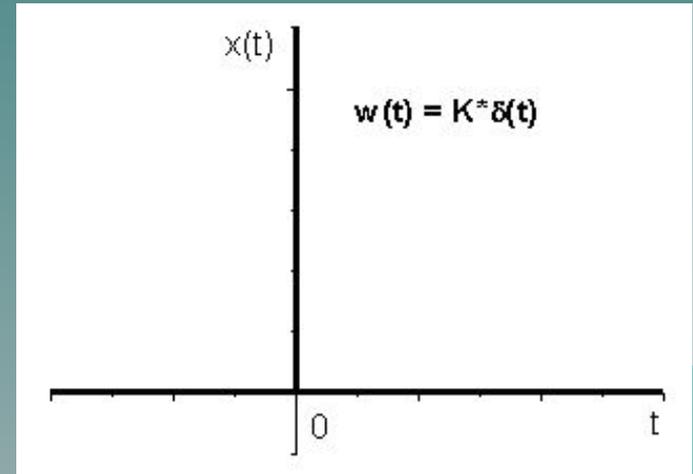
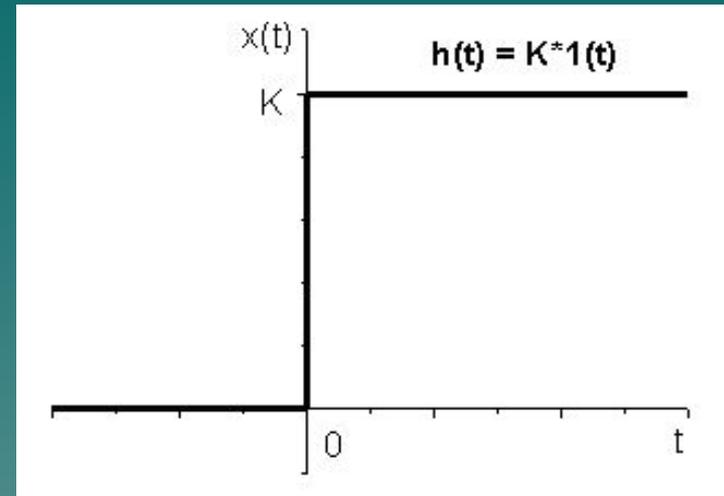
Усилительное (пропорциональное) звено

Переходная функция.

$$h(t) = L^{-1}[W(s)/s] = L^{-1}[K/s] = K \cdot 1(t)$$

Весовая функция.

$$w(t) = L^{-1}[W(s)] = K \cdot \delta(t)$$



Усилительное (пропорциональное) звено

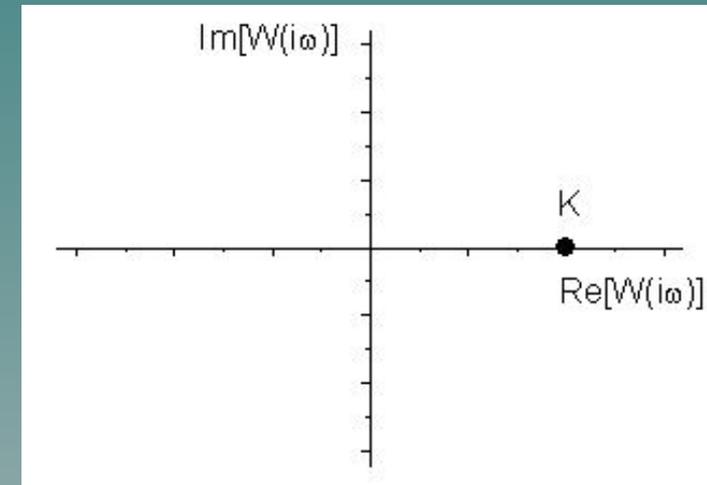
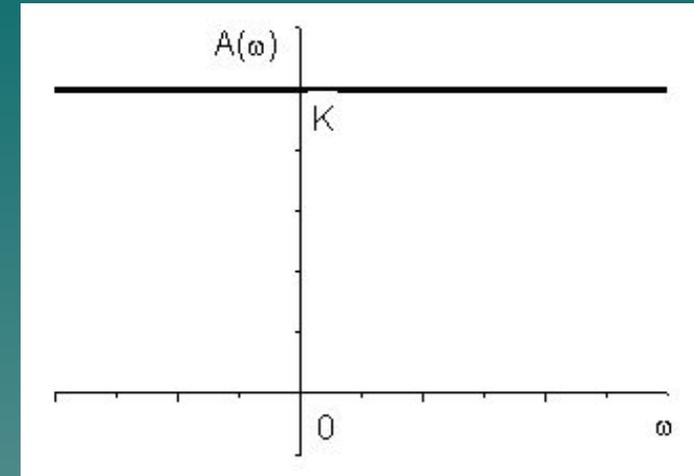
Частотные характеристики

$$W(j\omega) = K = K + 0 \cdot j$$

$$A(\omega) = \sqrt{K^2 + 0^2} = K$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(0/K) = 0$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg[A(\omega)] = 20 \cdot \lg(K)$$



Апериодическое звено

Передаточная функция.

$$W(p) = K / (T \cdot p + 1)$$

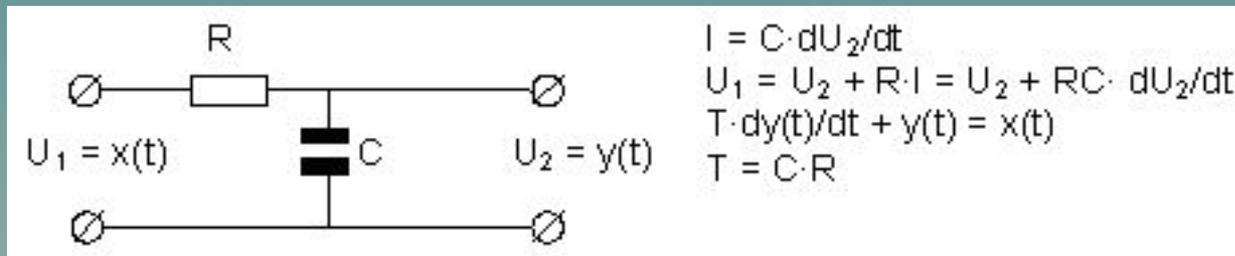
где K – коэффициент усиления; T – постоянная времени, характеризующая инерционность системы, т.е. продолжительность переходного процесса в ней.

Математическое описание звена

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t)$$

Физическая реализация звена.

Примерами апериодического звена могут служить: электрический RC-фильтр; термоэлектрический преобразователь; резервуар с сжатым газом и т. п.



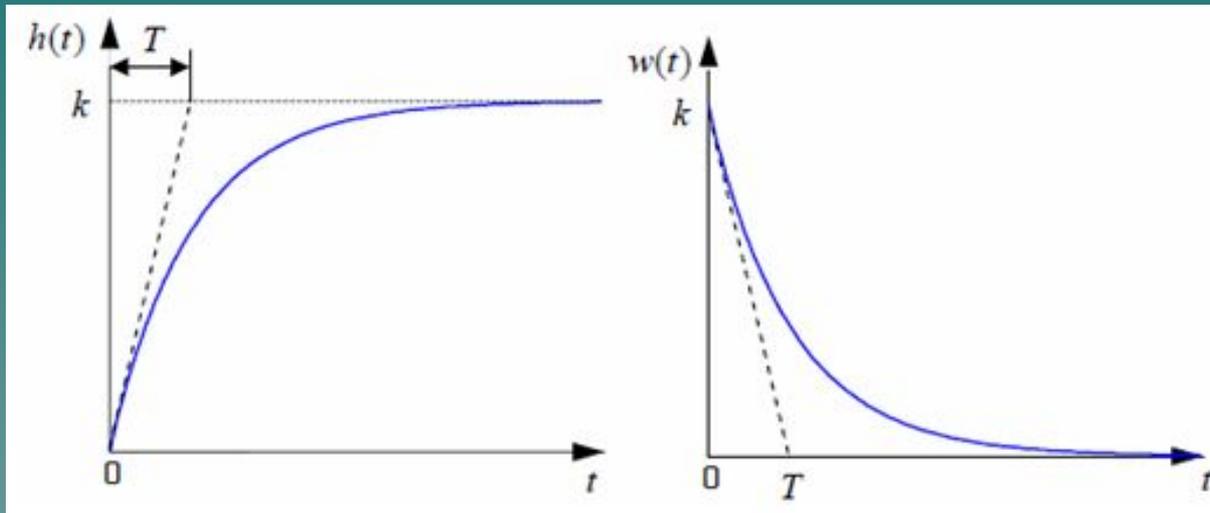
Апериодическое звено

Переходная функция.

$$h(t) = L^{-1}[W(p) \cdot 1(t)] = K \cdot (1 - e^{-t/T})$$

Весовая функция.

$$w(t) = L^{-1}[W(p)] = (K/T) \cdot e^{-t/T}$$



Предельное значение переходной характеристики равно k , а касательная к ней в точке $t = 0$ пересекается с линией установившегося значения при $t = T$.
Переходная и импульсная характеристики выходят на установившееся значение (с ошибкой не более 5%) примерно за время $3T$. Это позволяет определять постоянную времени экспериментально, по переходной характеристике звена.

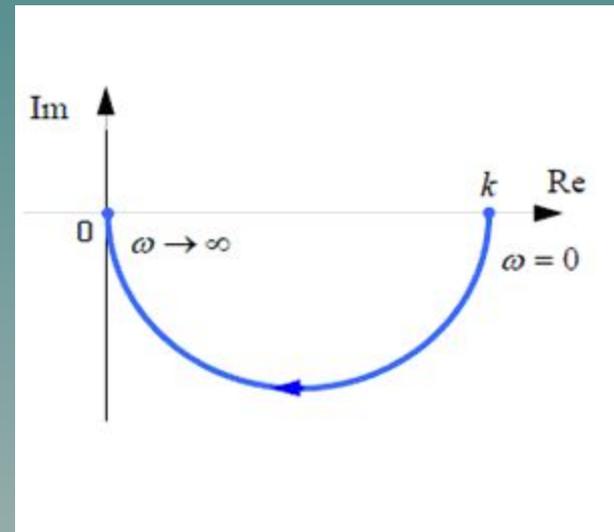
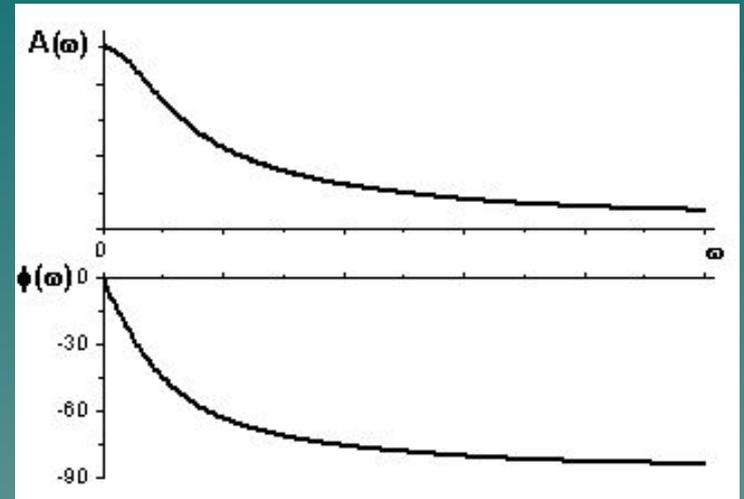
Апериодическое звено

Частотные характеристики

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = \frac{k(1 - Tj\omega)}{T^2\omega^2 + 1} = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} - \frac{jkT\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg}(T\omega)$$



Колебательное звено

Передаточная функция

$$W(p) = K/[T^2 \cdot p^2 + 2T \cdot \xi \cdot p + 1]$$

где K – коэффициент передачи; T – постоянная времени, характеризующая инерционность системы, т.е. продолжительность переходного процесса в ней. ($T > 0$); ξ – коэффициент (декремент) затухания, который характеризует рассеяние энергии в звене

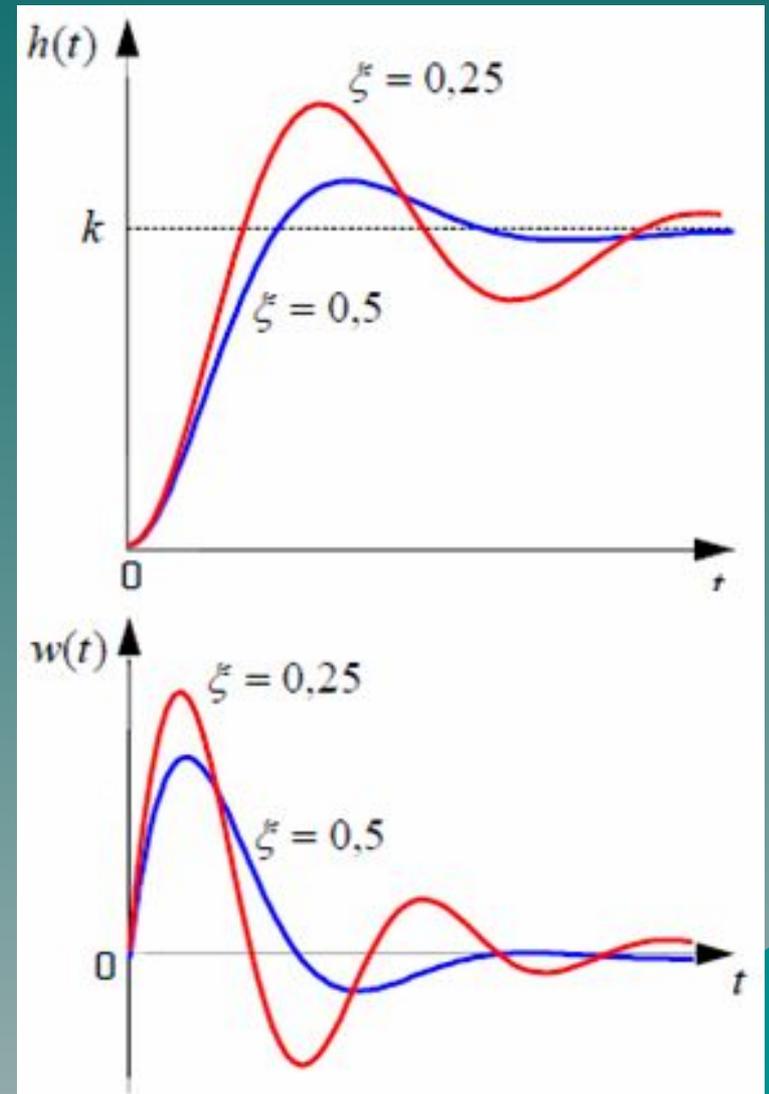
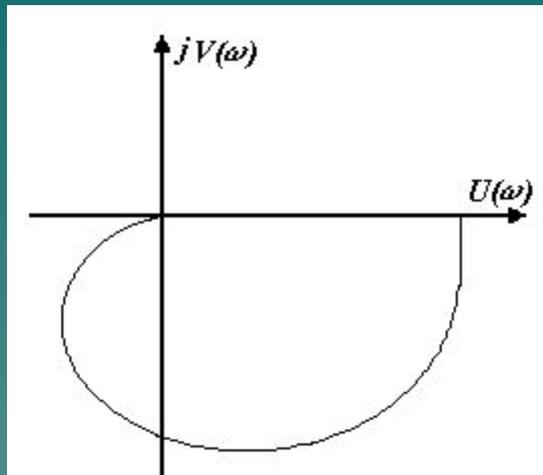
Математическое описание звена

$$T^2 \cdot d^2y(t)/dt^2 + 2T \xi \cdot dy(t)/dt + y(t) = K \cdot x(t)$$

Физическая реализация звена

Примером колебательного звена является электрический колебательный контур, груз на пружине, маятник, стрелочный прибор

Колебательное звено



Интегрирующее звено

Передаточная функция

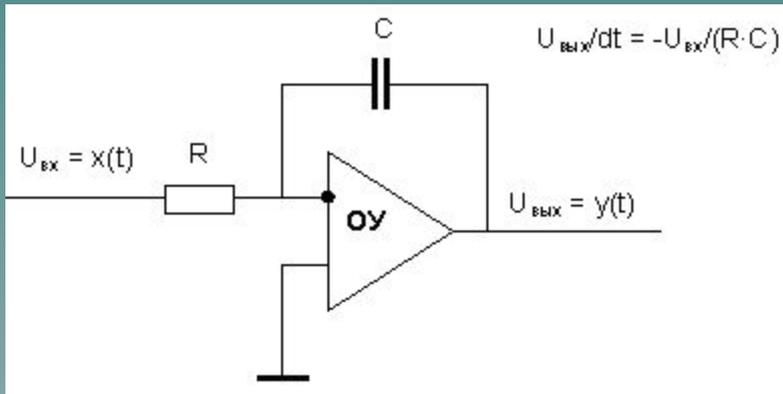
$$W(p) = K/p$$

Математическое описание звена

$$\frac{dy(t)}{dt} = k \cdot x(t),$$

Физическая реализация звена

Примерами интегрирующего звена являются: резервуар, наполняемый жидкостью; электродвигатель постоянного тока; операционный усилитель в режиме интегрирования.



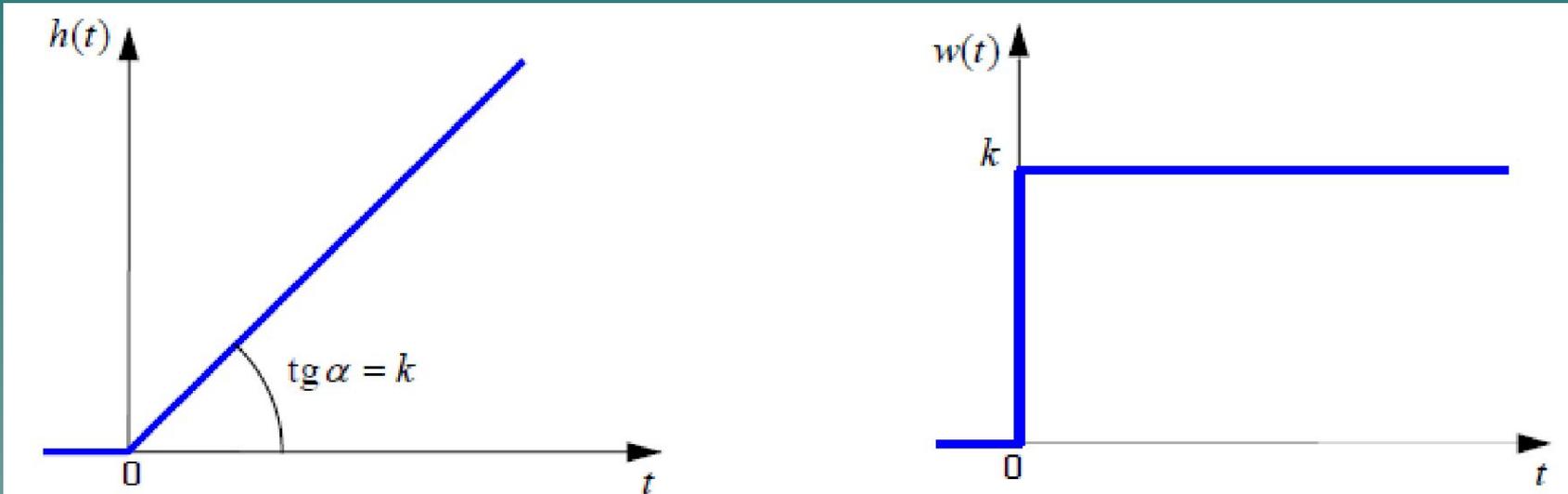
Интегрирующее звено

Переходная функция

$$h(t) = K \cdot t$$

Весовая функция

$$w(t) = K \cdot 1(t)$$

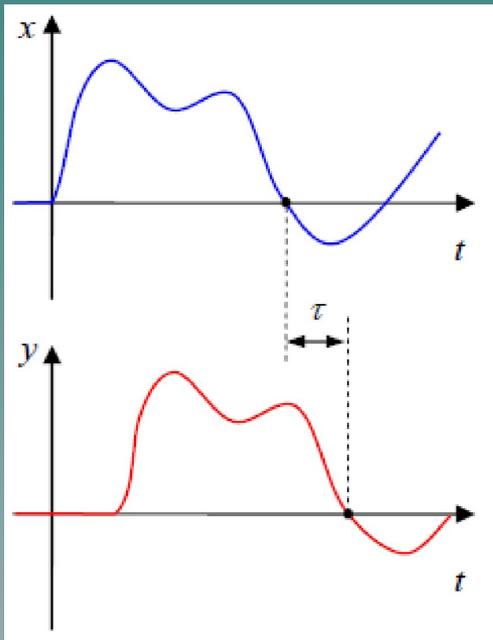
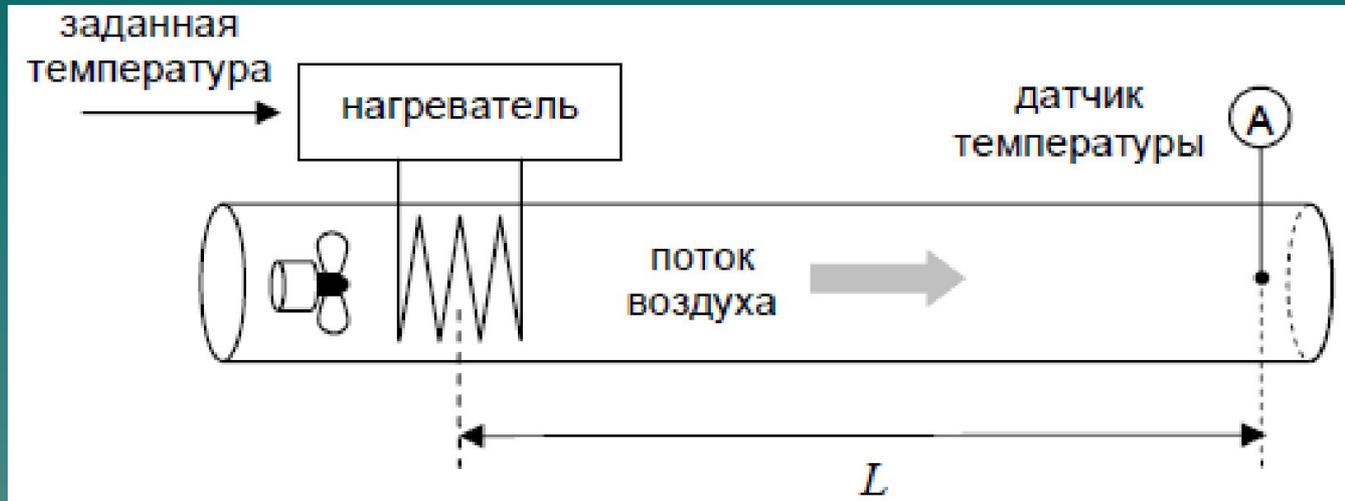


Дифференцирующее звено

$$W(s) = T \cdot p$$

$$h(t) = k\delta(t), \quad w(t) = k \frac{d\delta(t)}{dt}.$$

Запаздывание



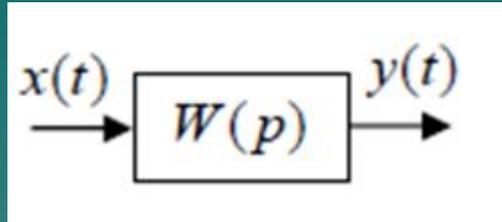
Звено с чистым запаздыванием – это такое звено, у которого выходной сигнал полностью повторяет входной сигнал с некоторой задержкой во времени.

$$W_{\tau}(s) = e^{-s\tau}$$

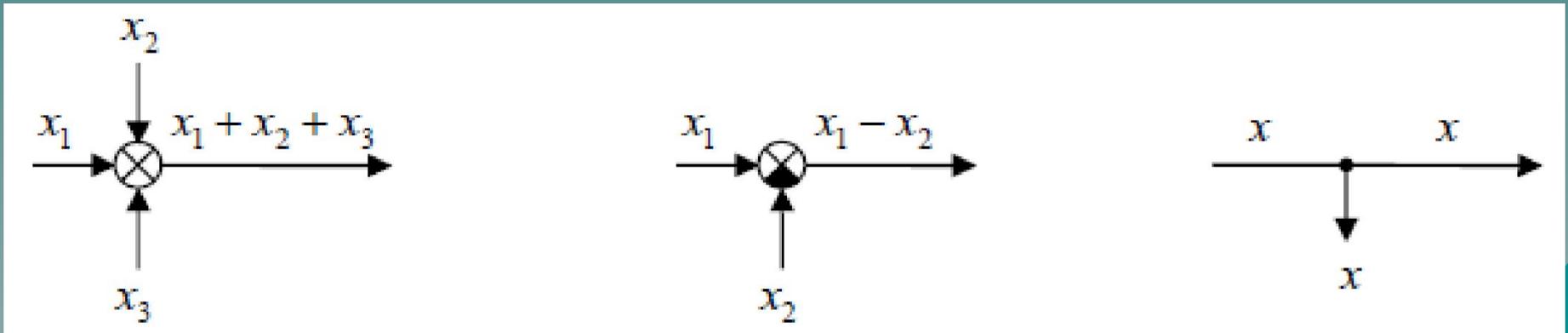
где τ – время чистого запаздывания

$$A(j\omega) = |W_{\tau}(j\omega)| = 1, \quad \phi(j\omega) = \arg W_{\tau}(j\omega) = -\omega\tau.$$

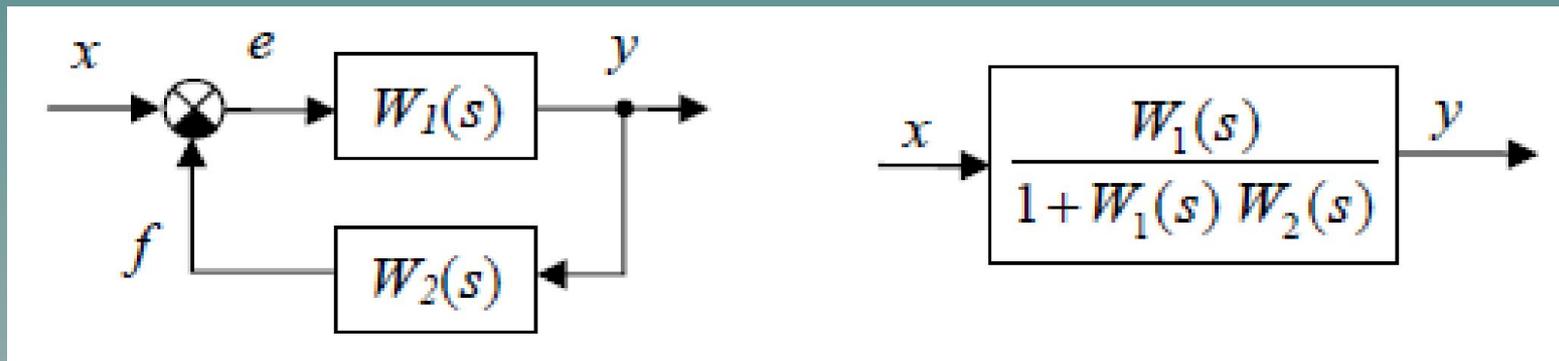
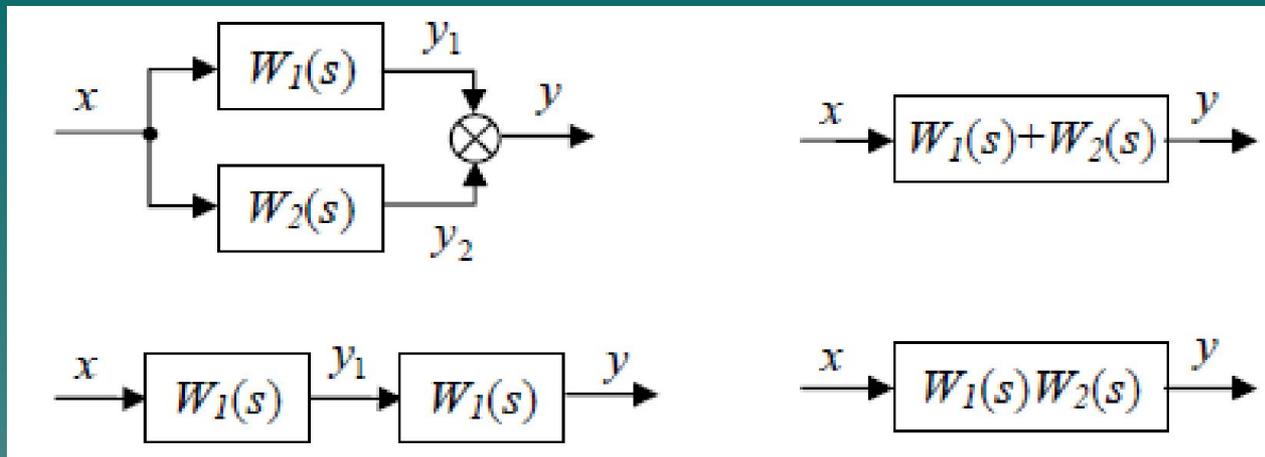
Условные обозначения

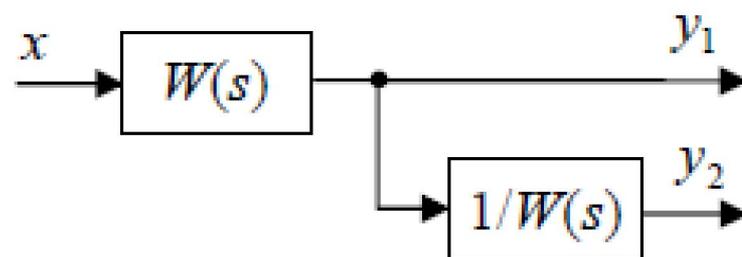
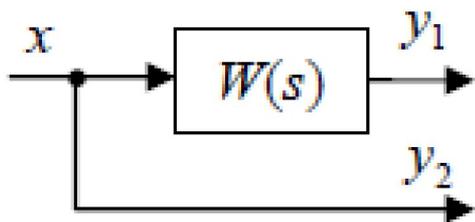
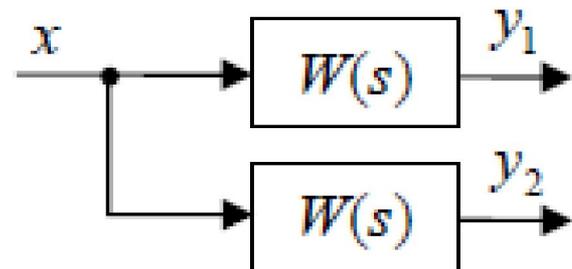
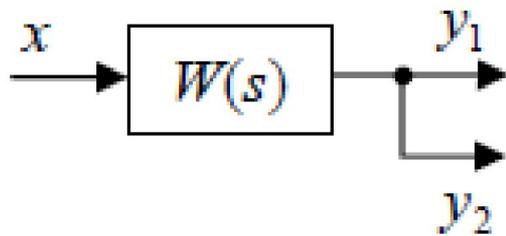
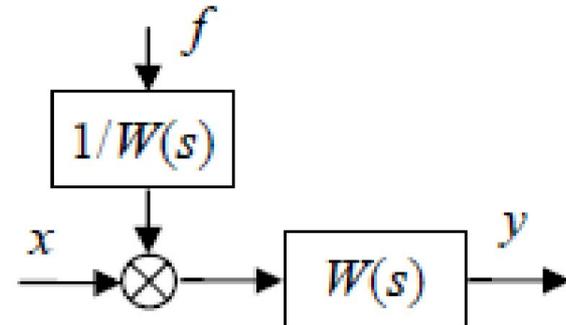
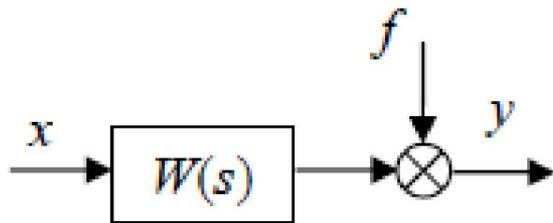
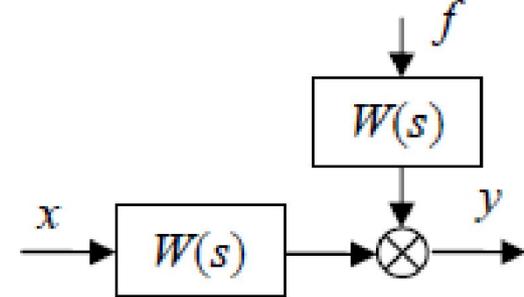
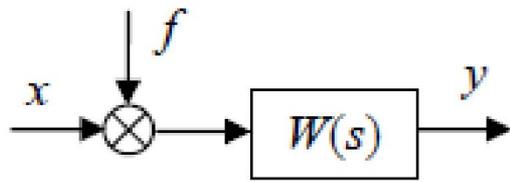


Суммирование

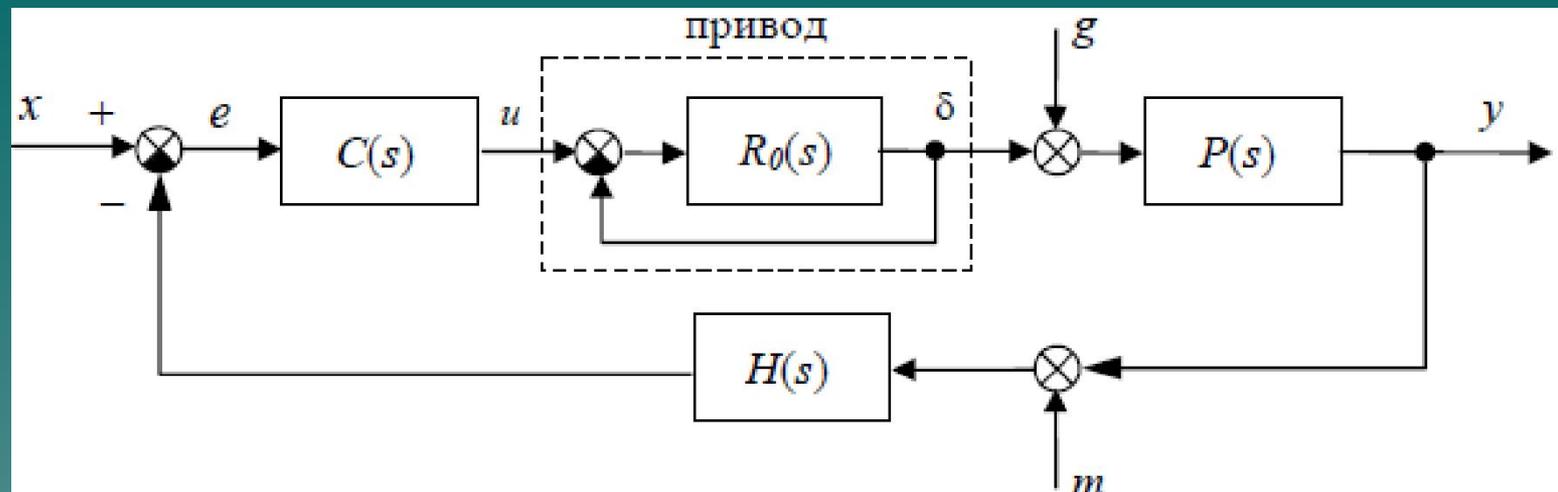


Правила преобразования

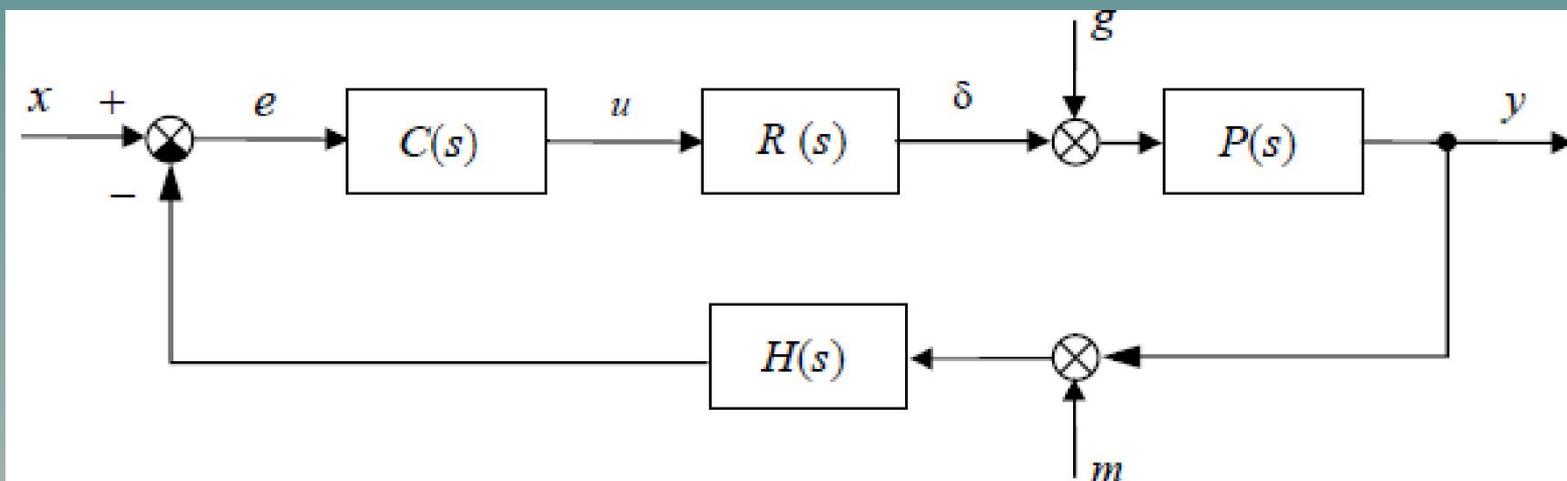


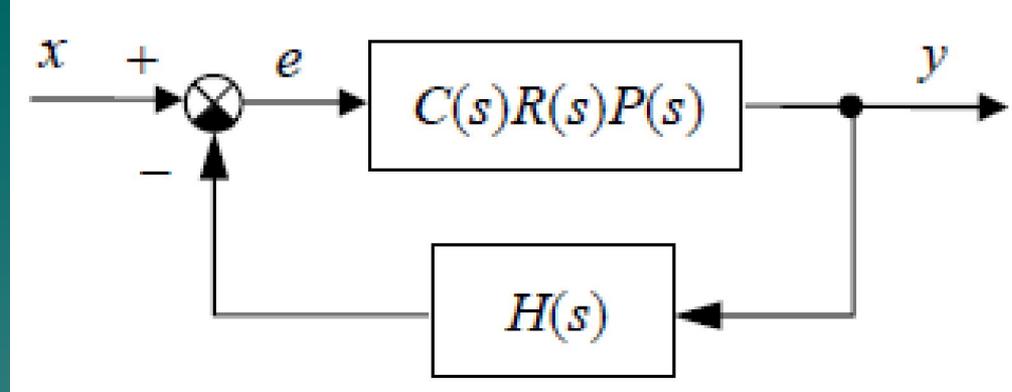


Типовая одноконтурная система

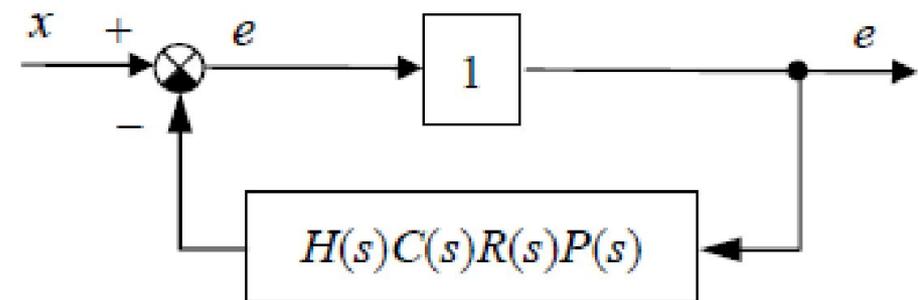
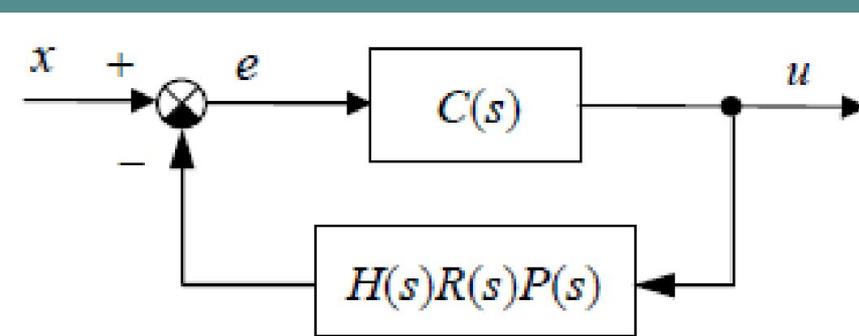


$$R(s) = \frac{R_0(s)}{1 + R_0(s)}$$





$$W(s) = \frac{C(s)R(s)P(s)}{1 + H(s)C(s)R(s)P(s)}$$



$$W_u(s) = \frac{C(s)}{1 + H(s)C(s)R(s)P(s)}, \quad W_e(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)R(s)P(s)}$$