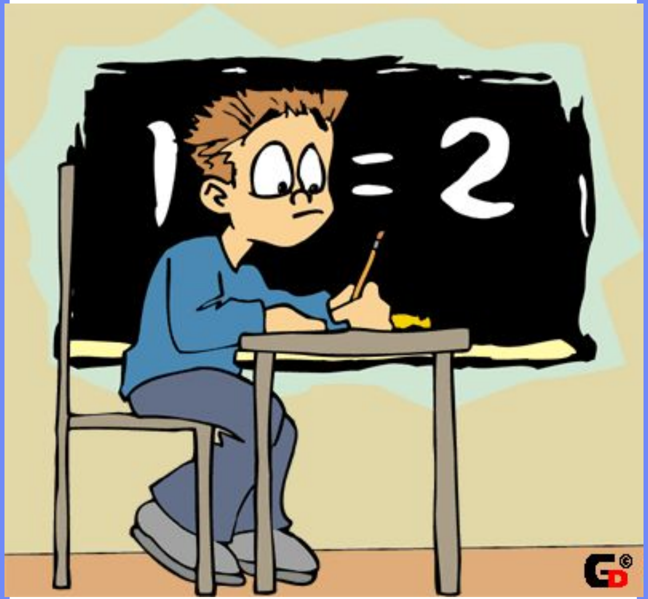
Длина окружности

Геометрия. 9 класс.



Мастер подключения презентации к уроку.

S T O P

Дальнейший просмотр возможен только при наличии соответствующих знаний. А они у тебя есть?

Да.

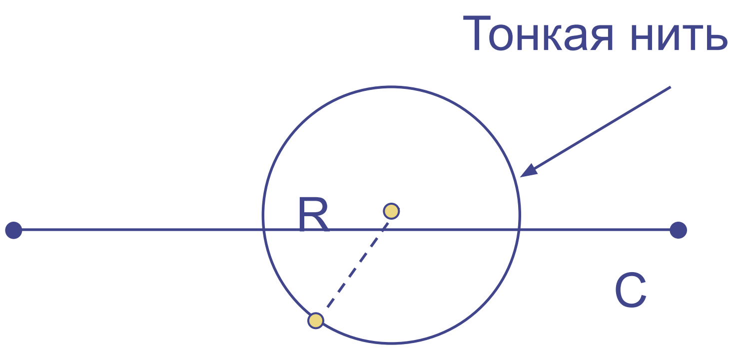
Могу доказать.

Да, но я устал и думать не хочу.

Ничего не знаю и знать не хочу.

Понятие длины окружности.

- Представим себе нить в форме окружности. Разрежем её и растянем за концы.

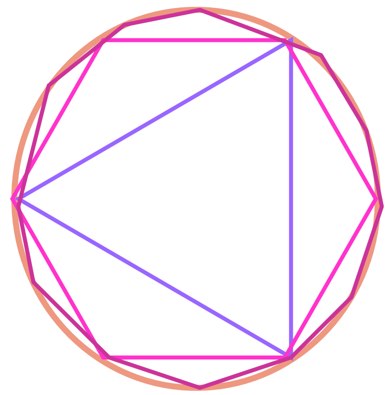


- Длина полученного отрезка и есть длина окружности.

Периметр любого вписанного в окружность многоугольника

является приближённым значением длины окружности.

- При увеличении числа сторон правильный многоугольник всё ближе и ближе «прилегает» к окружности.
- *Длина окружности – это предел*, к которому стремится периметр правильного вписанного многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон.



Свойство длины окружности.

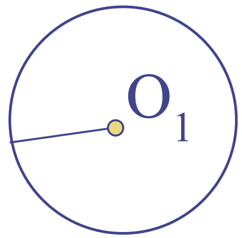
- ***Отношение длины окружности к её диаметру есть одно и то же число для всех окружностей.***
- (стр. 265, курсив предпоследний абзац)

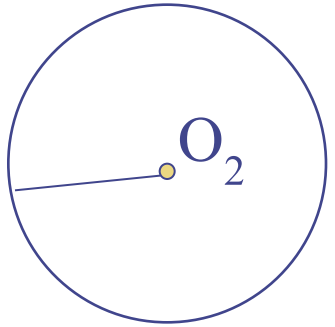
Дано:

$Окр(O_1;R_1), Окр(O_2;R_2),$

C_1 – длина $Окр(O_1; R_1)$,
C_2 – длина $Окр(O_2; R_2)$.

Доказать: $\boxed{\dfrac{C_1}{2R_1} = \dfrac{C_2}{2R_2}.}$





Доказательство:

1) Впишем в каждую окружность правильный n-угольник.

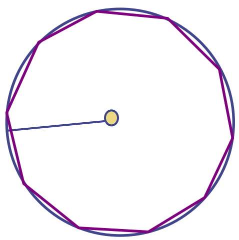
2) Пусть P_1, P_2 – их периметры;

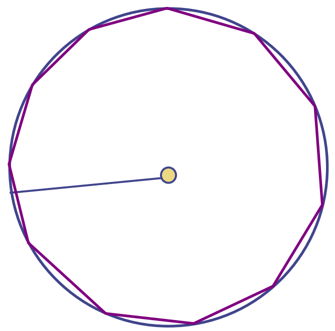
а a_{n1}, a_{n2} – их стороны.

Тогда $P_1 = n \cdot a_{n1} = n \cdot 2R_1 \sin \frac{180^\circ}{n}$.

$$P_2 = n \cdot a_{n2} = n \cdot 2R_2 \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$$





3) Если число сторон неограниченно увеличивать, то $n \to \infty$, $P_1 \to C_1$, $P_2 \to C_2$ тогда $\frac{P_1}{P_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

$$\Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}.$$

4) По свойству пропорции $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$. Ч.т.д.

Число «пи». Вывод формулы длины окружности.

- Из свойства длины окружности следует . что $\frac{C}{2R}$ есть число постоянное и теоретически доказано, что это число иррациональное.

  Обозначают его греческой буквой «пи».

$$\pi \approx 3{,}14159$$

Это я знаю и помню прекрасно.

$$\boxed{\frac{C}{2R} = \pi} \Rightarrow \boxed{C = 2\pi R}$$

- формула длины окружности.

Задача 1. Вообразите, что вы обошли землю по экватору. На сколько при этом верхушка вашей головы прошла более длинный путь, чем кончик вашей ноги?

- Решение.

1) Ноги прошли путь $2\pi R$, где R радиус земного шара.
2) Верхушка головы - $2\pi(R+1,7)$, где 1,7м рост человека.
3) Разность путей равна $2\pi(R+1,7)-2\pi R=2\pi\cdot 1,7=10,7$м

Итак голова прошла путь на 10,7 м больше, чем ноги.

- Ответ:10,7 м.

Задача 2. Если обтянуть земной шар по экватору проволокой и затем прибавить к её длине 1м, то сможет ли между проволокой и землёй проскочить мышь.

Обычно отвечают, что промежуток будет тоньше волоса.

- Решение. Пусть длина промежутка x см.

Если R радиус земли, то длина проволоки была 2пRсм, а станет 2п (R + x)см.

А по условию задачи их разность равна 100 см.

Уравнение.

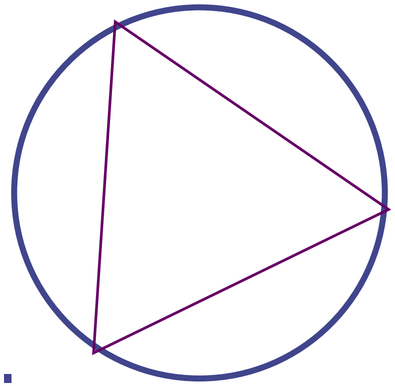
$$2\pi(R+x)-2\pi R=100$$
$$2\pi x=100$$
$$x=\frac{100}{2\pi},$$
$$x\approx 16\text{см}.$$

- Ответ:16 см.

№ 1104(а). Найти длину окружности описанной около правильного треугольника со стороной *а*.

- Выразите R через *а*.

$$a = R\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

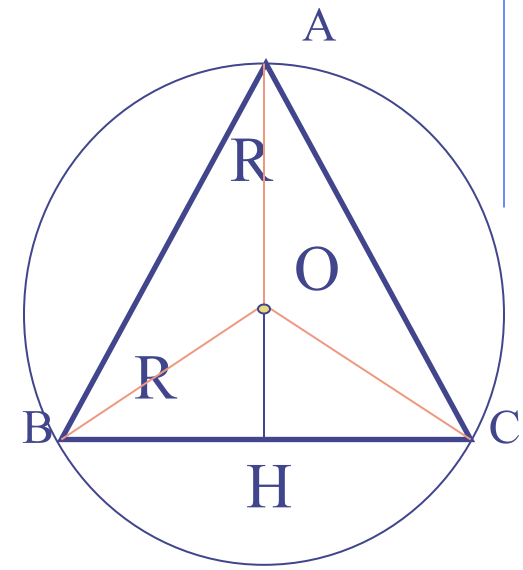


Подставьте в формулу длины окружности.

$$C = 2\pi R = 2\pi\,\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}.$$

№ 1104 (в). Найти длину окружности описанной около равнобедренного треугольника с основанием *a* и стороной *b*.

- Дано: △ ABC – равнобедренный, вписан в O(O; R); AB=AC=b, BC=a.
- Найти: C.
- Решение. 1) $O \in AH$, где $AH \perp BC$.



2) $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a.$

3) Из △ABH: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}.$

4) Так как AO=R, то $OH = AH - AO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} - R = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2} - R.$

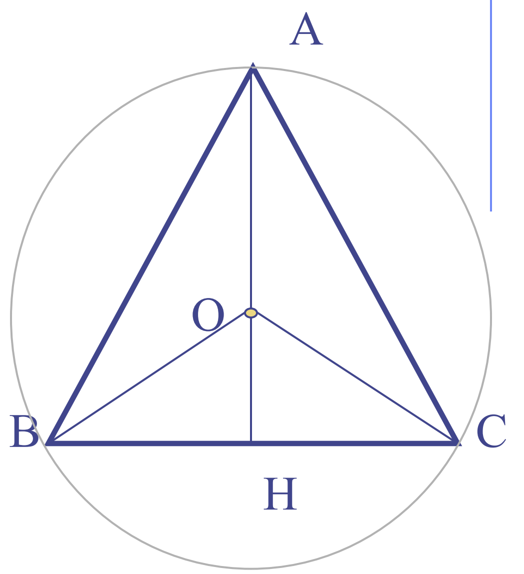
№ 1104 (в). Найти длину окружности описанной около равнобедренного треугольника с основанием *a* и боковой стороной *b*.

5) Из $\triangle BOH$: $BO^2=OH^2+BH^2=R^2=$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}-\mathrm{R}\right)^2+\frac{1}{4}a^2,$$

$$\mathrm{R}^2=\frac{1}{4}\left(4b^2-a^2\right)-\mathrm{R}\sqrt{4b^2-a^2}+\mathrm{R}^2+\frac{1}{4}a^2,$$

$$\mathrm{R}\sqrt{4b^2-a^2}=b^2\Rightarrow \mathrm{R}=\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}},$$



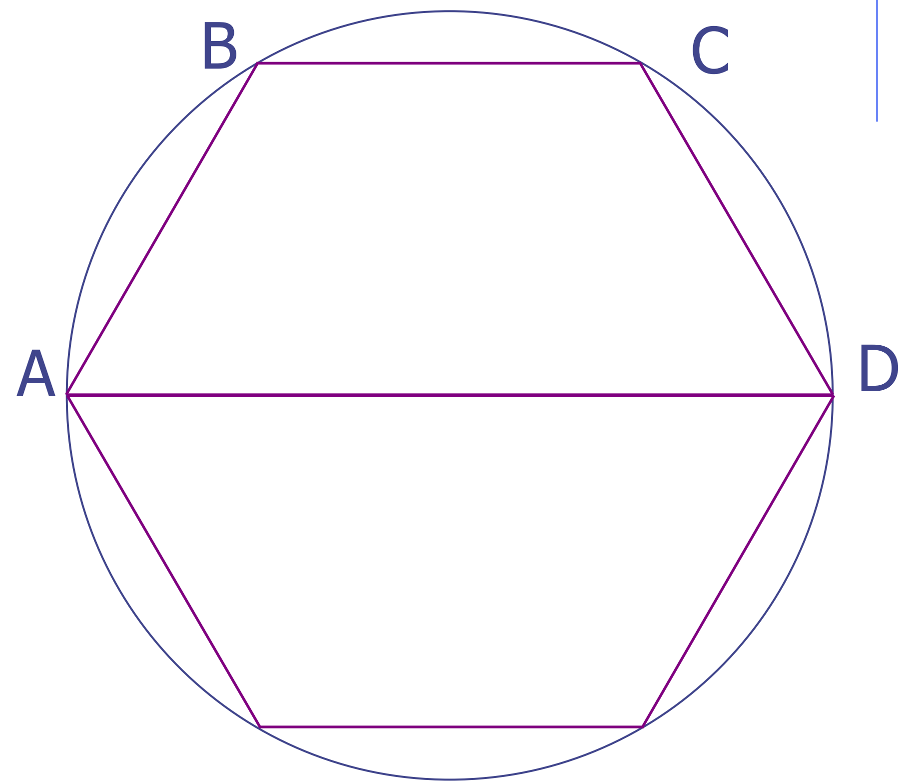
6) C= $2\pi R=\dfrac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}.$

- Ответ: $\dfrac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}.$

№ 3. Дана равнобедренная трапеция со сторонами **2а**, **а**, **а**, **а**. Найти длину окружности, описанной около трапеции.

- Дано: ABCD – трапеция, AB=BC=CD= a, AD=2a. Окр(O; R) описанная около окружности.
- Найти: Длину окружности.
- Решение.

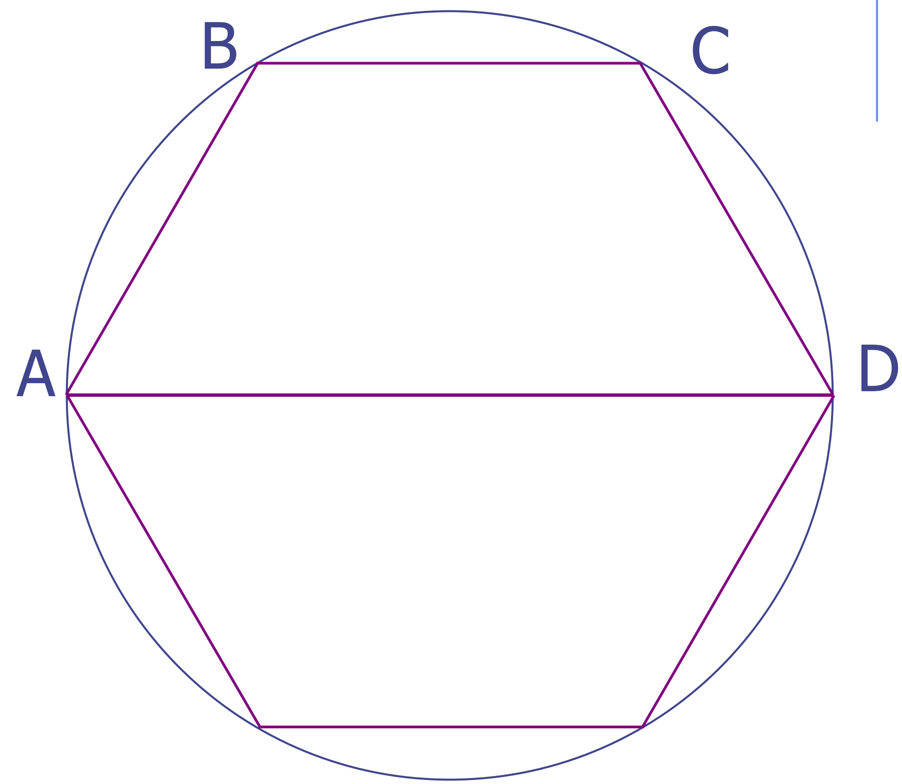
1) Достроим трапецию ABCD до правильного шестиугольника. Тогда окружность описанная около шестиугольника будет описана и около трапеции.



№ 3. Дана равнобедренная трапеция со сторонами **2a**, **a**, **a**, **a**. Найти длину окружности, описанной около трапеции.

2) Так как шестиугольник правильный, то радиус описанной окружности равен стороне.
А значит C=2πR=2πa.

- Ответ: 2πa.



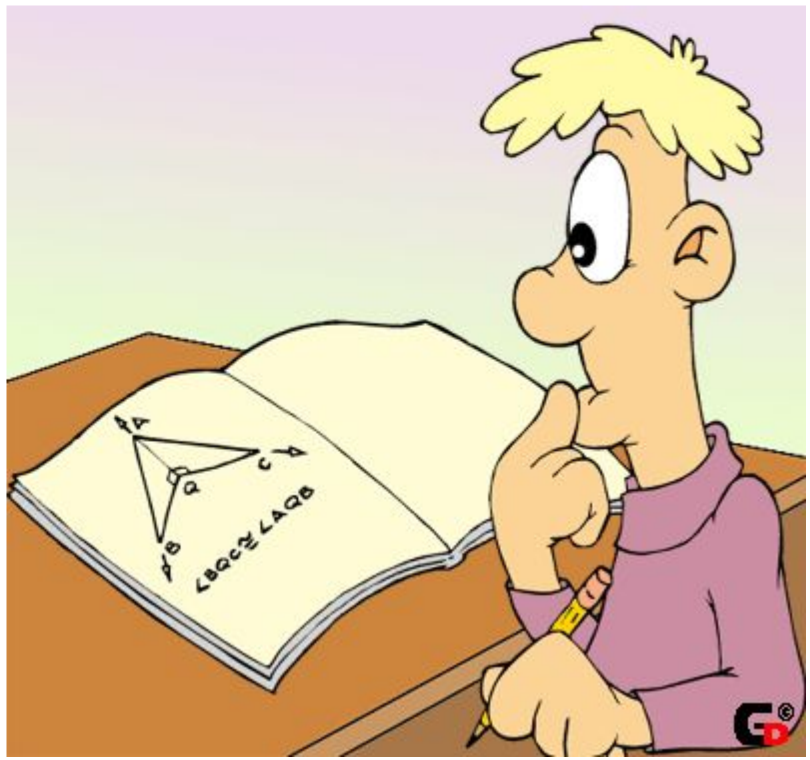
ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

- Сформулируйте основное свойство длины окружности. На чём основывается его доказательство?
- Как вычисляется длина окружности по формуле?
- Какое число обозначается буквой п и чему равно его приближённое значение?
- Как изменится длина окружности, если радиус окружности уменьшить (увеличить) в k раз?
- Как изменится длина окружности, если радиус окружности уменьшить (увеличить) в k раз?

Домашнее задание

- Вопросы 8-9(стр. 270).
- №1108, №1105(а).

Спасибо за урок, дети.



<<<