Метод мажорант.

- *Школьникам*
- *Учителям*

Землянова Н.В.,
учитель математики
МБОУ «Гимназия №131»
г.Барнаул 2012

В материалах, предлагаемых выпускникам для решения на едином государственном экзамене, есть задачи, требующие специальных методов решения, которые, к сожалению, не изучаются в школе. Один из таких методов-метод мажорант. Красивейший способ решения сложных задач.

Содержание.

- *Определение мажоранты функции*
- *Примеры функций, имеющих мажоранту*
- *Метод мажорант*
- *Примеры решения задач методом мажорант*

Определение мажоранты функции.

Мажорантой *функции f(x) на множестве P называется такое число M, что либо f(x) ≤M для всех x є P, либо f(x) ≥ M для всех x є P.*

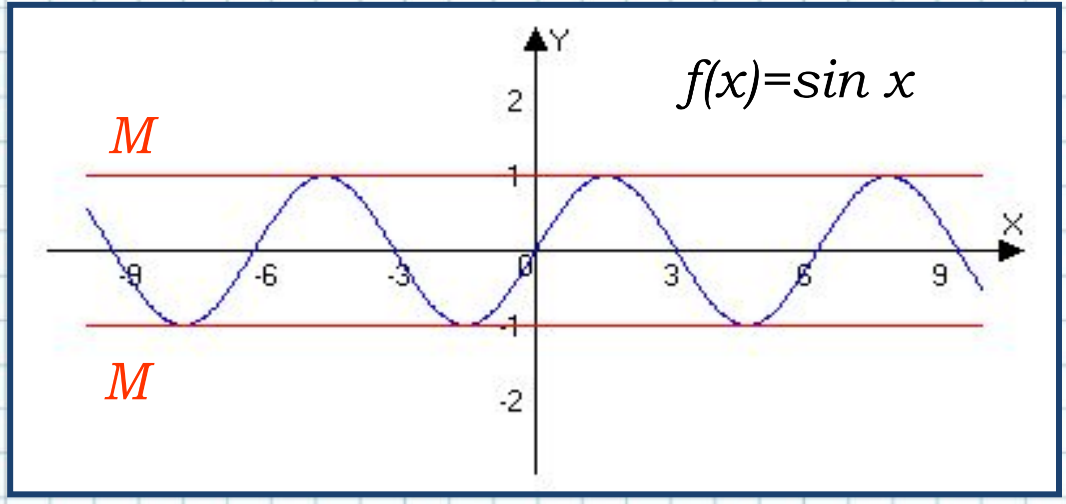
Примеры функций, имеющих мажоранту.

1.Тригонометрические функции .

f(x)=sin x

-1≤ sin x ≤ 1

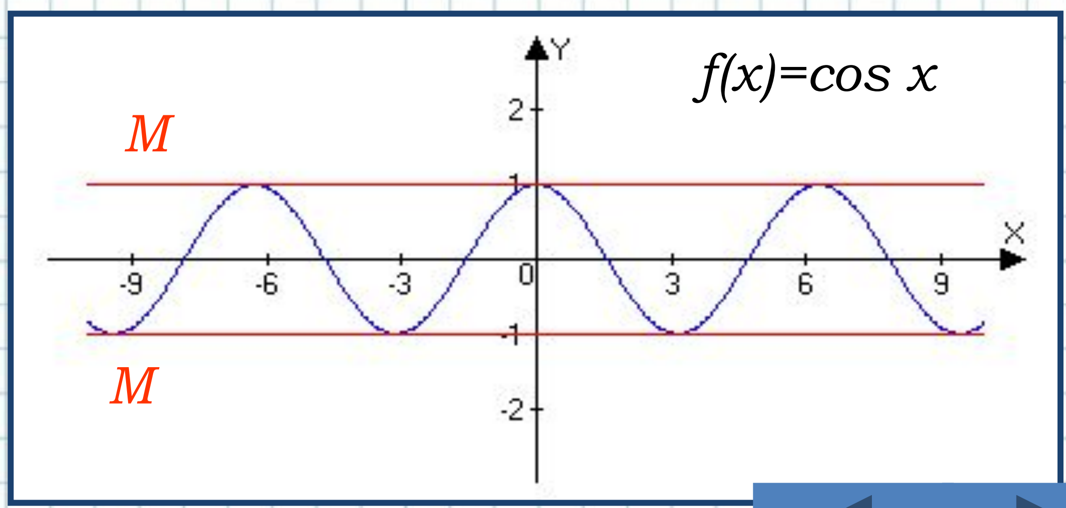
M=1, M=-1



f(x)=cos x

-1≤ cos x ≤ 1

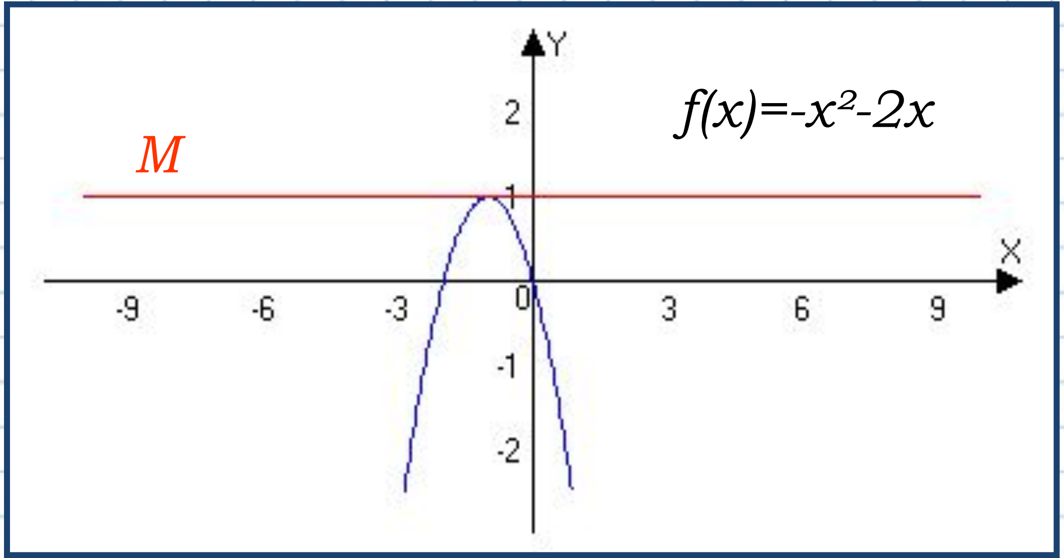
M=1, M=-1

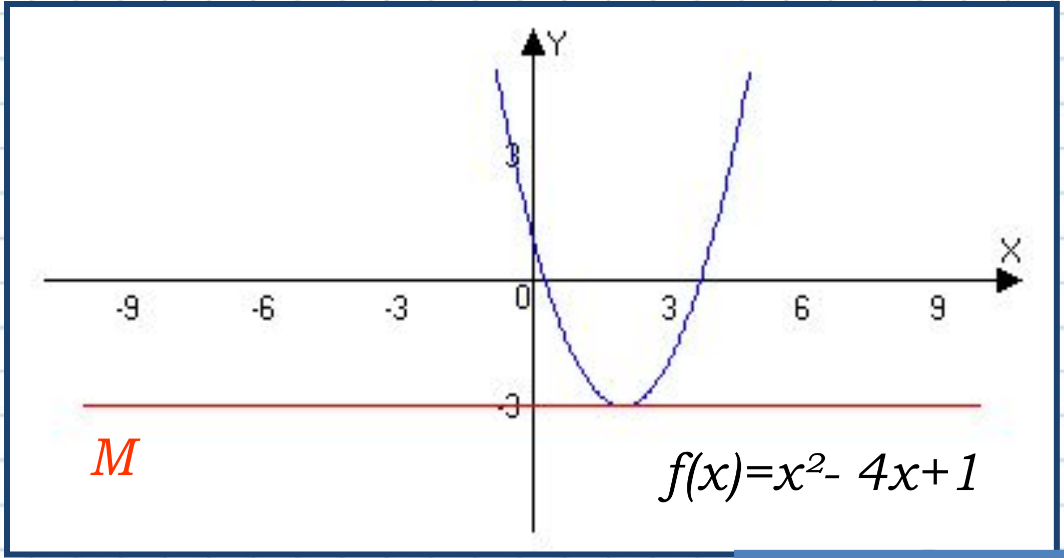


2.Квадратичная функция.

$f(x)= ax^2+bx+c$,
$(p\ ;\ n)$ -
вершина параболы

$M=n=(4ac-b^2)/\,4a$



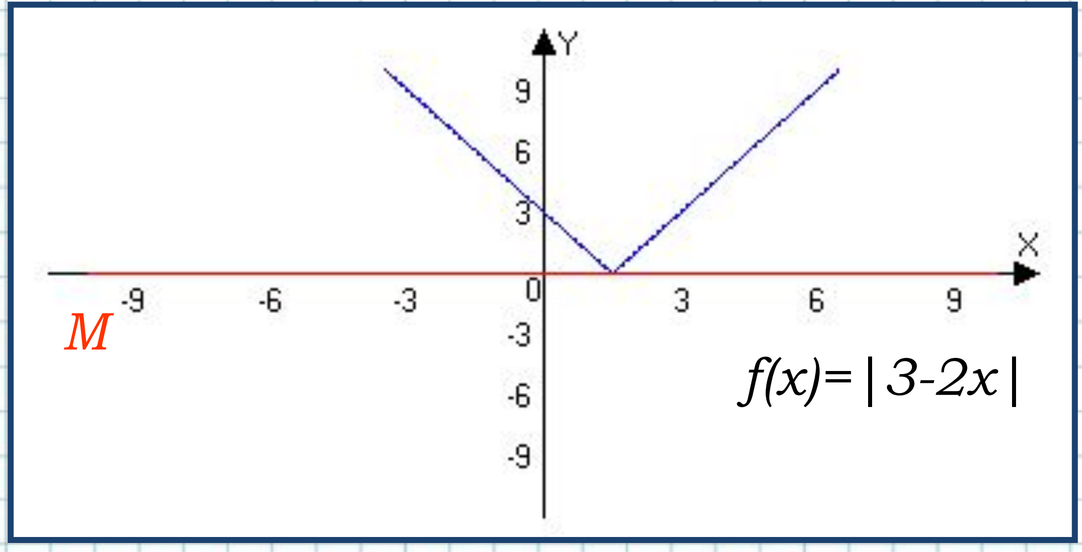


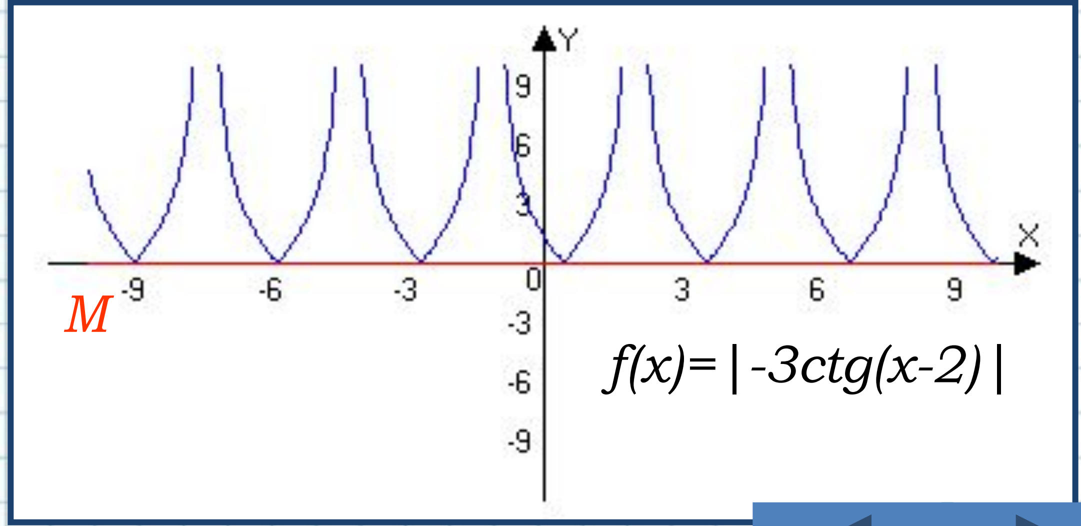
3. Функции, содержащие переменную под знаком модуля.

$f(x)=|g(x)|$

$0 \le |g(x)| < +\infty$

$M=0$



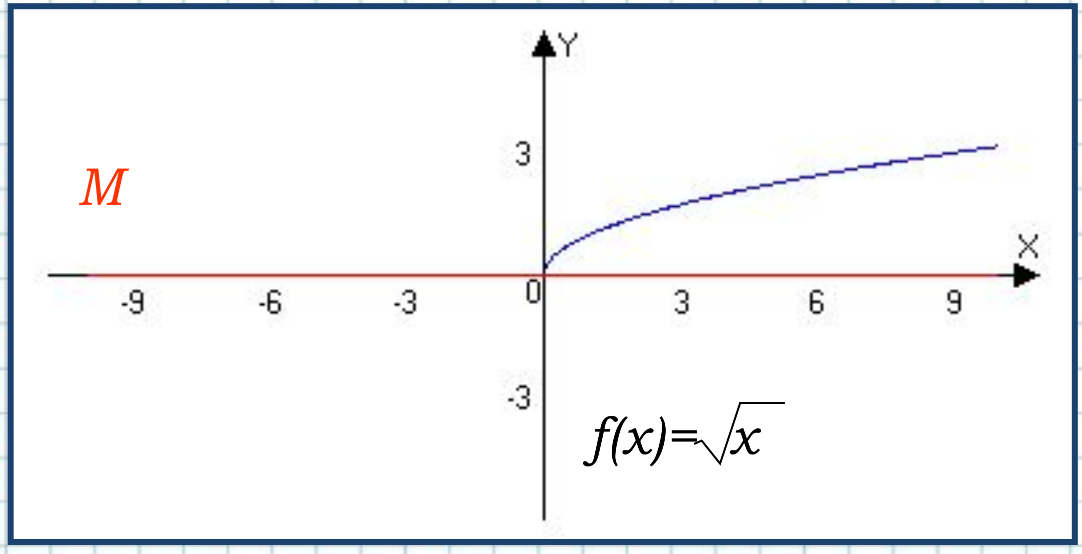


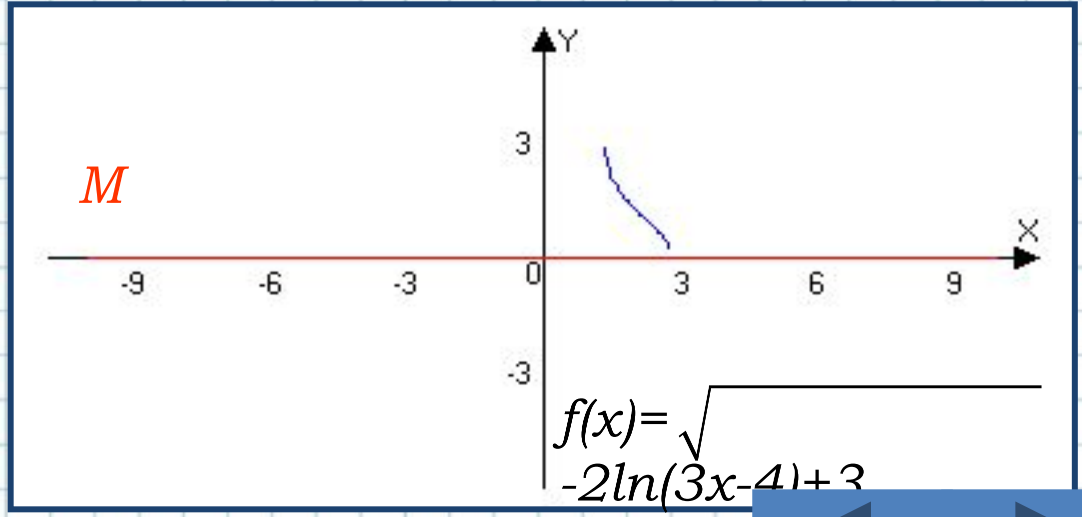
4. Функции, содержащие переменную под знаком корня.

$f(x) = \sqrt{g(x)}$

$0 \le \sqrt{g(x)} < +\infty$

$M = 0$





В более сложных случаях для того, чтобы определить мажоранту, нужно провести исследование функции, применяя различные методы . При этом можно использовать свойства неравенств, некоторые известные равенства и неравенства, определение возрастающей и убывающей функций и т. д.

Метод мажорант.

Теорема1. Пусть f(x) и g(x) – некоторые функции, определённые на множестве D. Пусть f(x) ограничена на этом множестве числом A сверху, а g(x) ограничена на этом множестве тем же числом A, но снизу. Тогда уравнение f(x) = g(x) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть f(x) и g(x) – некоторые функции, определённые на множестве D. Пусть f(x) и g(x) ограничены на этом множестве снизу (сверху) числами A и B соответственно. Тогда уравнение f(x) + g(x) = A+B равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = \grave{A} \\ g(x) = B \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть f(x) и g(x) – некоторые неотрицательные функции, определённые на множестве D. Пусть f(x) ограничена сверху (или снизу) числами A и B соответственно. Тогда уравнение f(x)·g(x)= A·B равносильно системе уравнений (при условии, что A>0 и B>0)

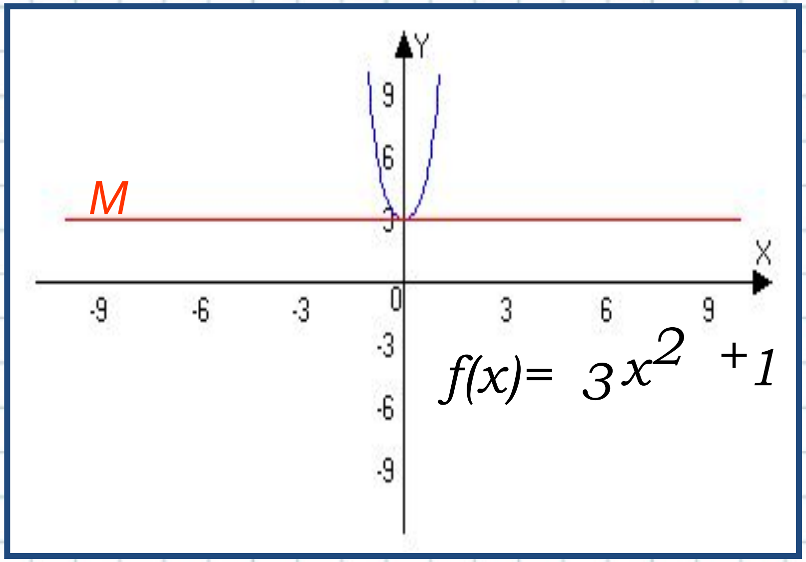
$$\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = B \end{cases}$$

Примеры решения задач методом мажорант.

1.Найдите мажоранту и область значения функции

$f(x)= 3^{x^2+1}$ (Рассмотрим два способа.)

1. Графический.



Очевидно, E (f) =[3;+∞], M=0

2. Аналитический.

Оценим выражение 3^{x^2+1}

$0 \le x^2 < +\infty$

$1 \le x^2+1 < +\infty$

$3 \le 3^{x^2+1} < +\infty$

E (f) =[3;+∞], M=0

Очевидно, что графический способ не всегда удобен, так как может потребоваться строить графики очень сложных функций! Поэтому мы будем учиться решать такие задания аналитически!

Найдите область значения функции.

Пример.

$$f(x) = 0{,}5^{\log_2(1+3\sin^2 x)}$$

Решение.

$$0 \le 3\sin^2 x \le 3$$

$$1 \le 1 + 3\sin^2 x \le 4$$

$$0 \le \log_2(1+3\sin^2 x) \le 2$$

$$0{,}25 \le 0{,}5^{\log_2(1+3\sin^2 x)} \le 1$$

$$E(f) = [\,0{,}25;\ 1]$$

Задания для самостоятельной работы.

1) $f(x) = 4^{\frac{1}{1-2^x}}$

2) $f(x) = \log_3 \dfrac{7}{17+\sqrt{16+|\lg x|}}$

3) $f(x) = \dfrac{8}{\pi}\, arctg\left(\dfrac{1}{4}(3\sin x - \cos x + 2)\right)$

2.Решите уравнения.

Пример.

$$3^{x} + 3^{-x} = \log_2(4 - |x|)$$

Решение.

а) Так как $a + \frac{1}{a} \geq 2$, то

$$3^{x} + \frac{1}{3^{x}} \geq 2.$$

б) $4 - |x| \leq 4$ Ю

$$\log_2(4 - |x|) \leq 2.$$

Из а), б) получим

$$\begin{cases} 3^{x} + 3^{-x} = 2 \\ \log_2(4 - |x|) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Задания для самостоятельной работы.

1) $\sqrt{2}\sin x\cos x = \sin 46^\circ$

2) $\sqrt{\cos^2(\sin x)} = 1 + \log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 6x + 10)$

3) $2^{x+1} + 2^{1-x} = -4x^2 - x^2$

4) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 29}} = 1,4$

3. Решите неравенства.

Пример.

$$\cos x - \sqrt{z^3} \geq y^2 + \frac{\pi}{3}$$

Решение.

а) $1 \leq \cos x \leq 1$

$+$

$-\infty < -\sqrt{z^3} \leq 0$

$-\infty < \cos x - \sqrt{z^3} \leq 1$

б) $y^2 + \frac{\pi}{3} \geq \frac{\pi}{3} > 1$

Правая часть неравенства не больше 1, левая – больше 1, значит, корней нет.

Задания для самостоятельной работы.

1) $2^{y} - 2\cos x + \sqrt{y - x^2 - 1} \leq 0$

2) $2x + 2 - x^2 \geq 3^{x^2 - 2x + 2}$

3) $x^2 + 4x + 6 \leq \frac{2}{y^2 - 6y + 10}$

4) $\cos 3x \leq x^6 + 1$

4.Различные задания

Пример.

Найти наибольшее целое значение с, при котором решение неравенства

$||2x+4|-7|-13 \le 2c^2$

удовлетворяет условию

$x \in [-37;35]$.

Решение.

$-37 \le x \le 35$

$-70 \le 2x+4 \le 74$

$0 \le |2x+4| \le 74$

$0 \le ||2x+4|-7| \le 67$

$-13 \le ||2x+4|-7|-13 \le 54$

Для выполнения неравенства, надо, чтобы $-13 \le 2c^2 \le 54$.

То есть наибольшее целое $c=5$.

Задания для самостоятельной работы.

1) Найти сумму целых значений функции

$f(x)=3\sqrt{36\cos_2 x-12\sin x+27}$

2) Из множества значений функции

$$f(x)=3+4\arcsin\frac{\sin 2x+\cos 2x}{2}$$

удалили целые числа. Сколько получилось числовых промежутков?

Пример задания группы С (С 3, ЕГЭ 2011).

Решите неравенство $7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x-x^2-7) \geq 1$

Решение.

а) $0 < 7^{-|x-3|} \leq 1$

б) $\log_2(6x-x^2-7)=\log_2(2-(x-3)^2) \leq \log_2 2 = 1$

Так как, левая часть неравенства не больше1, а правая - равна 1, то

$$\begin{cases} \log_2(6x-x^2-7) = 1 \\ 7^{-|x-3|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 3$$

Решите самостоятельно задание С3.

1. (2011 г.) $\cos^2(x+1)\cdot \lg(9-2x-x^2) \geq 1.$

2. (ЕГЭ 2012. Типовые тестовые задания.
Под редакцией А. Л. Семенова, И. В. Ященко)

М
П
П
Н
П
П
О

$$25^x + 3\cdot 10^x - 4\cdot 4^x > 0$$

$$\log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2-12|x|+37) - \log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2-12|x|+37) \geq 0$$

Удачи в изучении математи