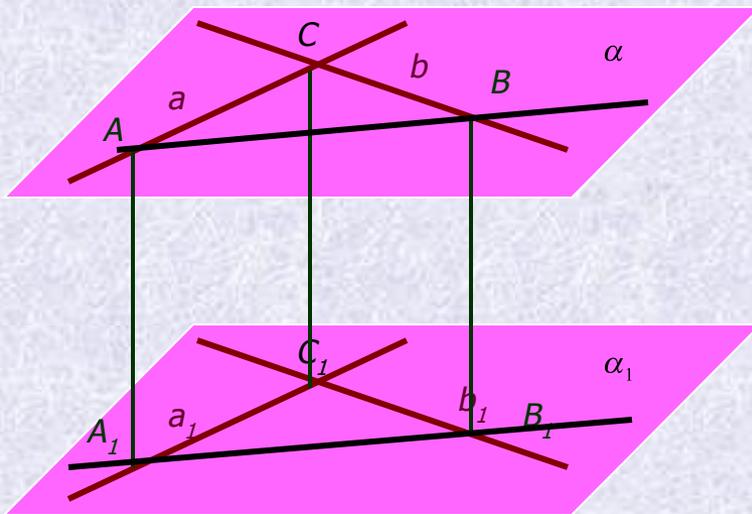


Перпендикулярность

прямых и плоскостей

Определение. Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

**Теорема 3.1** Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.



**Задача № 3 (П 14).** Прямые  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$  попарно перпендикулярны. Найдите отрезок  $CD$ , если  $AB = 3$  см,  $BC = 7$  см,  $AD = 1,5$  см.

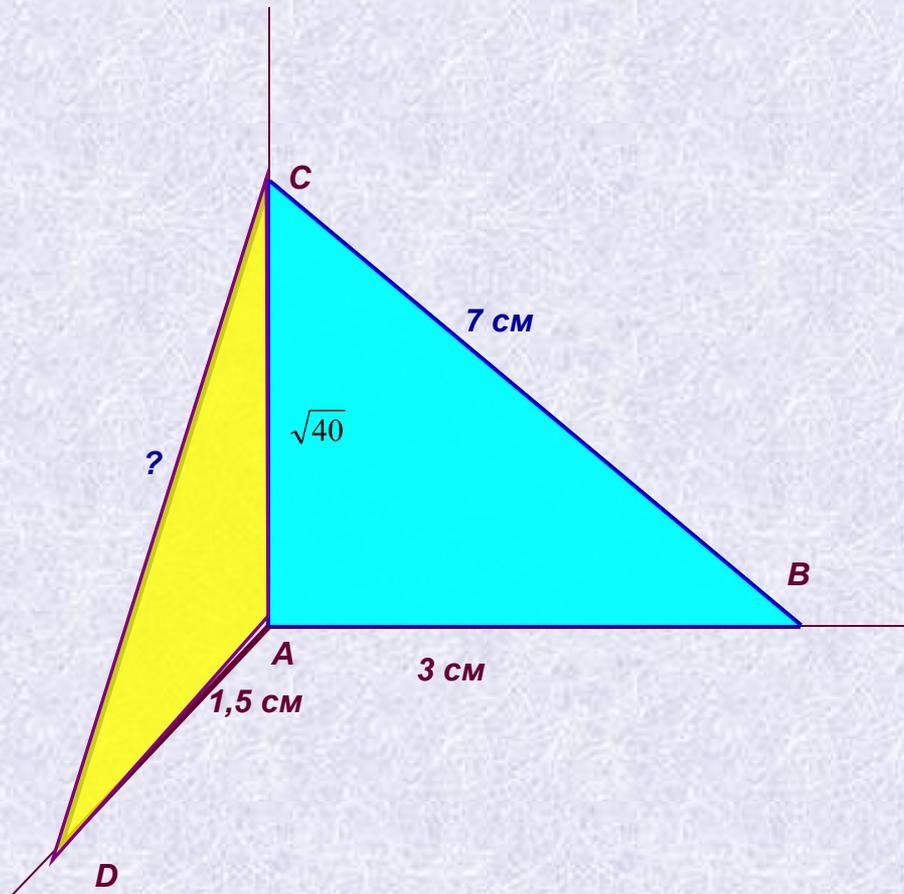
Дано:  $AB \perp AC$ ,  $AB \perp AD$ ,  $AD \perp AC$ .  
 $AB = 3$  см,  $BC = 7$  см,  $AD = 1,5$  см.

*Найти  $CD$ .*

**Решение:** 1)  $\triangle ABC$  – прямоугольный, по теореме Пифагора  $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 49 - 9 = 40$ ,  $AC = \sqrt{40}$  см.

2)  $\triangle ACD$  – также прямоугольный, по теореме Пифагора  $CD^2 = AC^2 + AD^2 = 40 + 2,25 = 42,25$ .  $CD = \sqrt{42,25}$  см = 6,5 см.

Ответ:  $CD = 6,5$  см.



**Задача № 3 2) (П 14).** Прямые АВ, АС и AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если  $BD = 9$  см,  $BC = 16$  см,  $AD = 5$  см.

Дано:  $AB \perp AC$ ,  $AB \perp AD$ ,  $AD \perp AC$ .  
 $BD = 9$  см,  $BC = 16$  см,  $AD = 5$  см.

Найти  $CD$ .

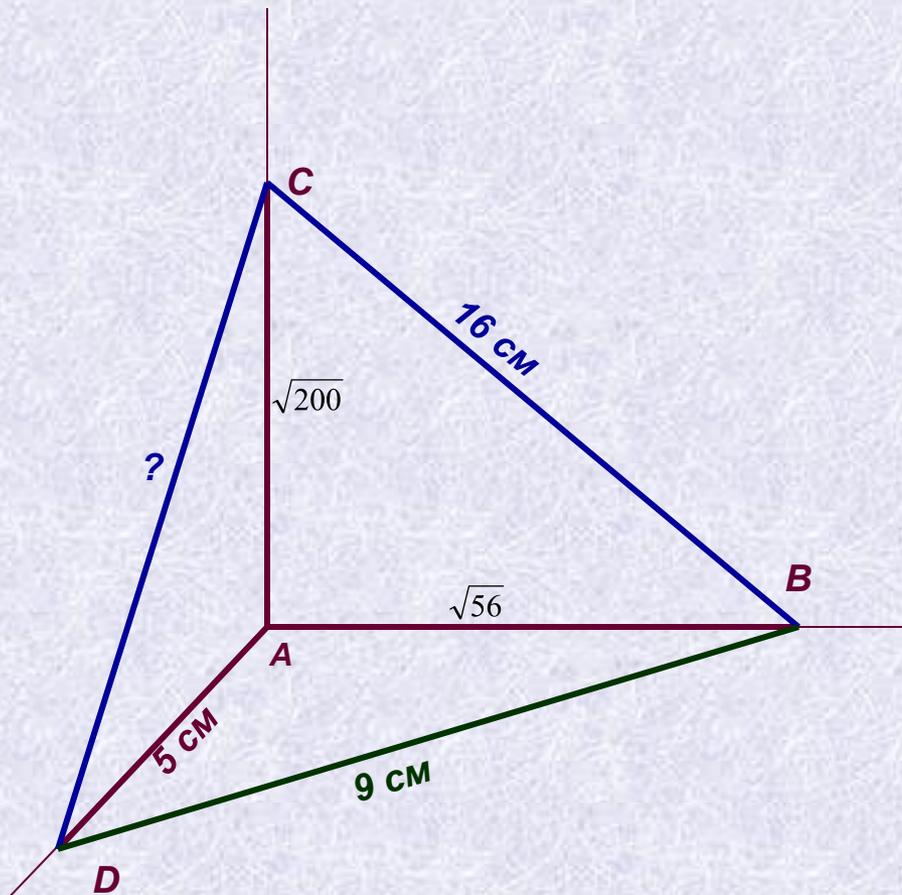
**Решение:** 1)  $\triangle ABD$  – прямоугольный,

по теореме Пифагора  $AB^2 = BD^2 - AD^2 = 81 - 25 = 56$ ,  $AC = \sqrt{56}$  см.

2)  $\triangle ACB$  – также прямоугольный, по теореме Пифагора  $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 256 - 56 = 200$ .  $AC = \sqrt{200}$  см.

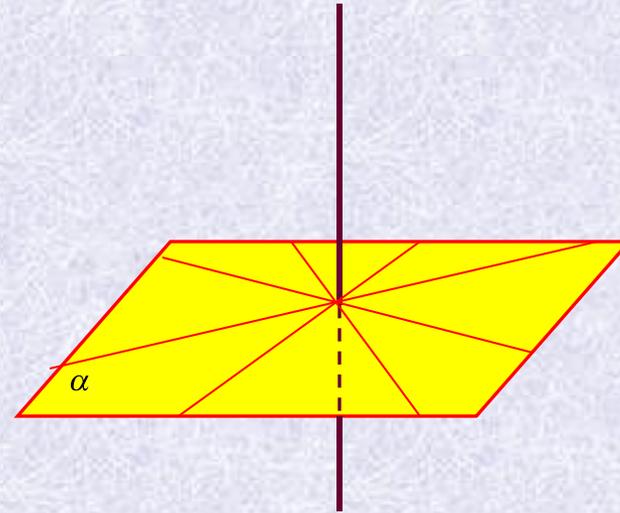
3)  $\triangle ACD$  – прямоугольный,  $CD^2 = AC^2 + AD^2 = 200 + 25 = 225$ ,  $CD = 15$  см.

Ответ:  $CD = 15$  см.



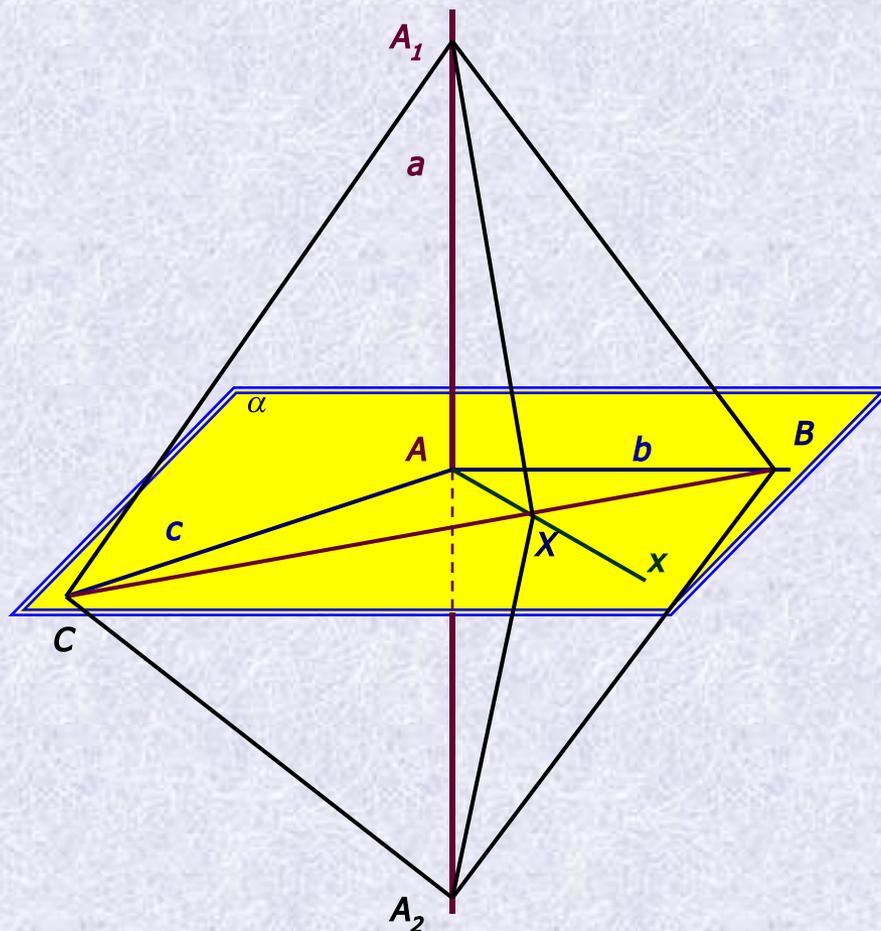
# Перпендикулярность прямой и плоскости.

Определение. Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения данной прямой и плоскости



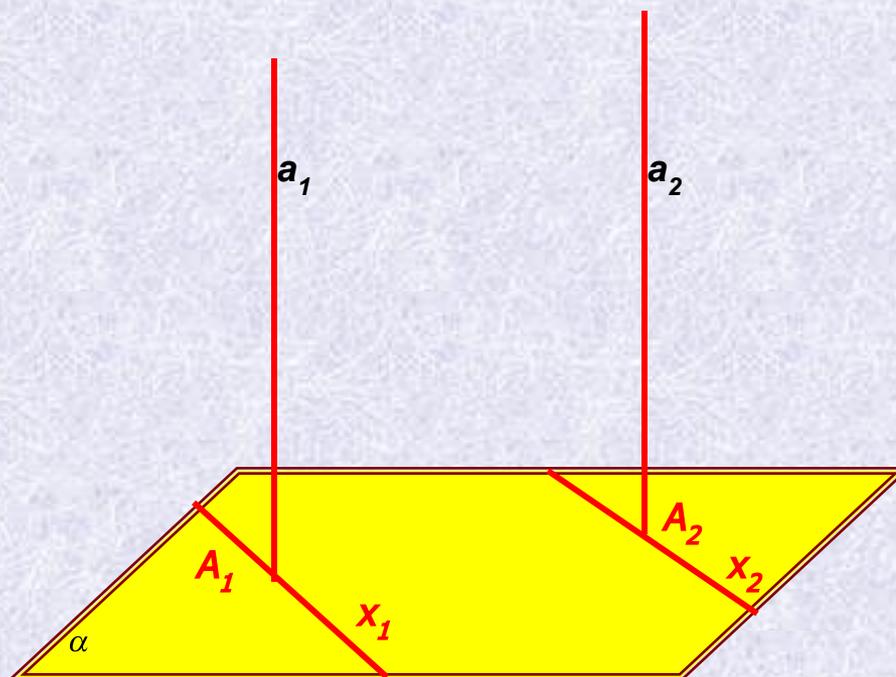
# Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

**Теорема 3.2** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

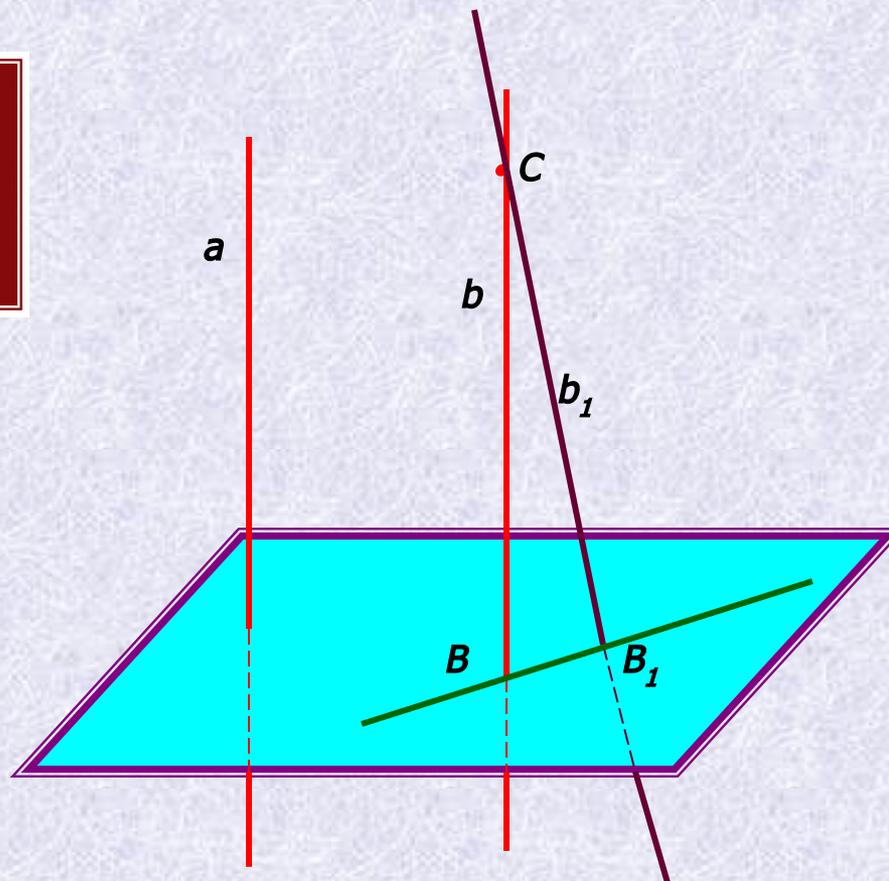


## Свойства перпендикулярных прямой и плоскости.

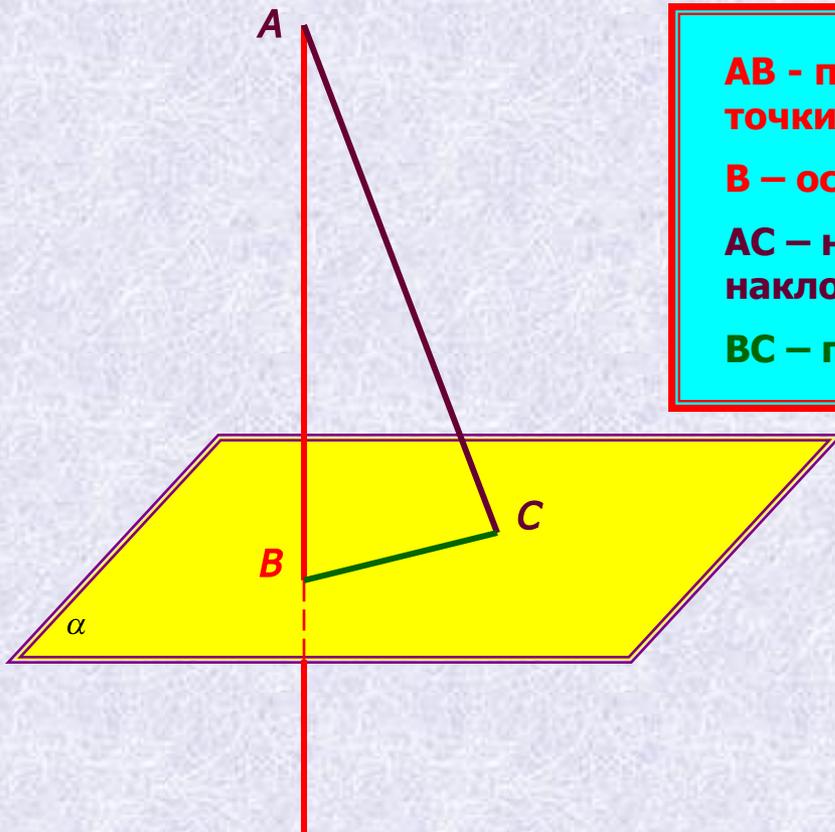
**Теорема 3.3** Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.



**Теорема 3.4** Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.



# Перпендикуляр и наклонная.



**$AB$  - перпендикуляр, расстояние от точки до плоскости.**

**$B$  - основание перпендикуляра.**

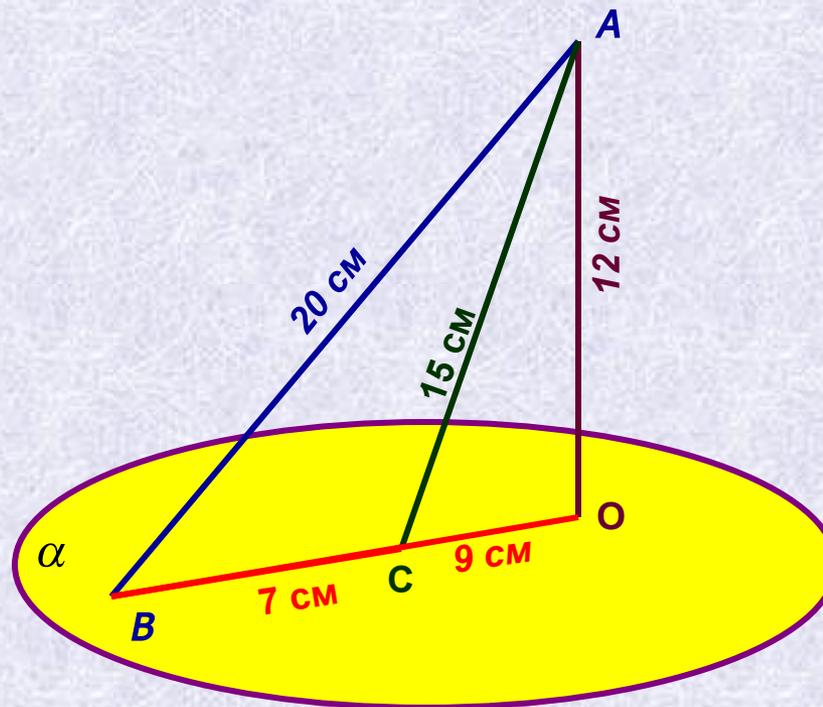
**$AC$  - наклонная,  $C$  - основание наклонной.**

**$BC$  - проекция наклонной**

**Задача** Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 15 см и 20 см. Разность проекций этих наклонных равна 7 см. Найдите проекции наклонных.

**Дано:**  $AB$  и  $AC$  – наклонные к плоскости  $\alpha$   
 $AO \perp \alpha$ ,  $AB = 20$  см,  $AC = 15$  см,  $BC = 7$  см.

**Найти:**  $BO$  и  $CO$ .



**Решение:** 1) Найдём площадь  $\triangle ABC$  по формуле Герона:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

$$p = (a+b+c)/2 = (20+15+7)/2 = 21 \text{ см. } S = \sqrt{21 \cdot (21-20) \cdot (21-15) \cdot (21-7)} = \sqrt{21 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 14} = \\ = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2} = 7 \cdot 6 = 42 \text{ см}^2.$$

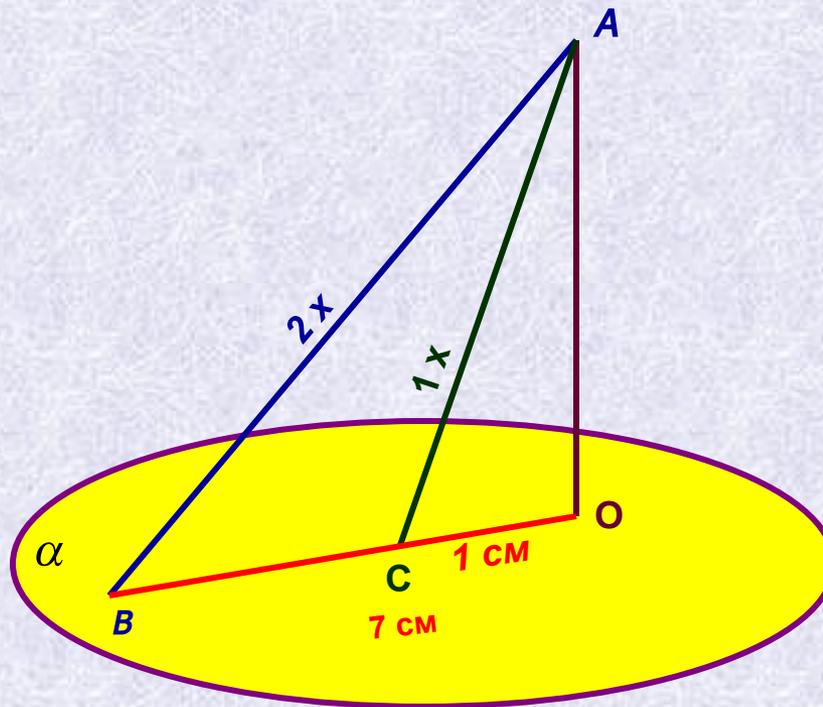
$$2) S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2S}{a}, AO = 2 \cdot 42 / 7 = 84 / 7 = 12 \text{ см.}$$

3)  $\triangle AOC$  – прямоугольный, по теореме Пифагора  $OC^2 = AC^2 - AO^2 = 225 - 144 = 81$ ,  
 $OC = 9$  см. 4)  $OB = BC + OC = 7 + 9 = 16$  см.

**Ответ:** 9 см и 16 см.

**Задача 24 2)** Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если наклонные относятся как 1:2, а проекции наклонных равны 1 см и 7 см.

**Дано:**  $AB$  и  $AC$  – наклонные к плоскости  
 $AO \perp \alpha$ ,  $AB : AC = 2 : 1$ ,  $BO = 7$  см,  $CO = 1$  см.  
**Найти:**  $AB$  и  $AC$ .



**Решение:** Пусть  $AB = 2x$  см,  $AC = x$ . В  $\triangle ABO$   $AO^2 = AB^2 - BO^2 = 4x^2 - 49$ ,  
В  $\triangle ACO$   $AO^2 = AC^2 - CO^2 = x^2 - 1$ . Т. к. левые части этих равенств равны, то  
равны и правые:  $4x^2 - 49 = x^2 - 1$ ,  $3x^2 = 48$ ,  $x^2 = 16$ ,  $x = 4$ .

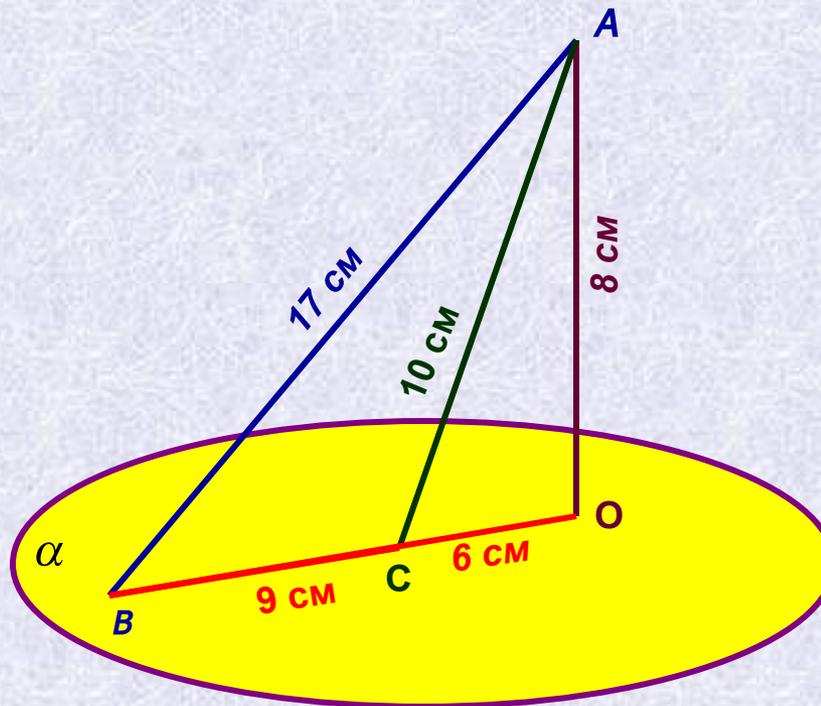
Таким образом,  $AC = 4$  см,  $AB = 8$  см.

**Ответ:** 4 см и 8 см.

**Задача 23** Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см. Разность проекций этих наклонных равна 9 см. Найдите проекции наклонных.

**Дано:**  $AB$  и  $AC$  – наклонные к плоскости  $\alpha$   
 $AO \perp \alpha$ ,  $AB = 17$  см,  $AC = 10$  см,  $BC = 9$  см.

**Найти:**  $BO$  и  $CO$ .



**Решение:** 1) Найдём площадь  $\triangle ABC$  по формуле Герона:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

$$p = (a+b+c)/2 = (17+10+9)/2 = 18 \text{ см.} \quad S = \sqrt{18 \cdot (18-17) \cdot (18-10) \cdot (18-9)} = \sqrt{18 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9} = 9 \cdot 4 = 36 \text{ см}^2.$$

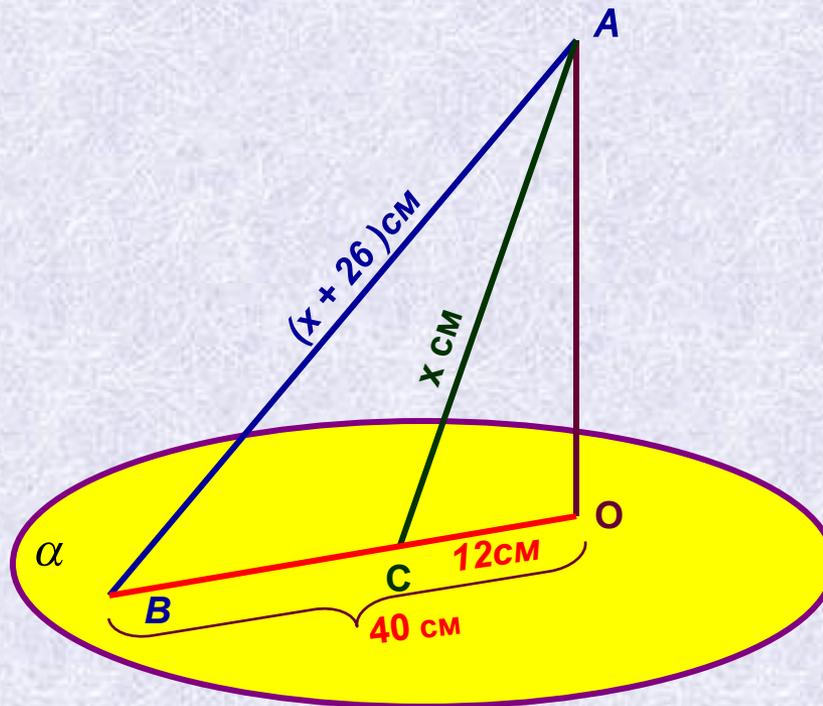
$$2) S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2S}{a}, \quad AO = 2 \cdot 36 / 9 = 72 / 9 = 8 \text{ см.}$$

3)  $\triangle ABC$  – прямоугольный, по теореме Пифагора  $OC^2 = AC^2 - AO^2 = 100 - 64 = 36$ ,  
 $OC = 6$  см. 4)  $OB = BC + OC = 9 + 6 = 15$  см.

**Ответ:** 6 см и 15 см.

**Задача 24 1)** Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если одна из них на 26 см больше другой, а проекции наклонных равны 12 см и 40 см.

**Дано:**  $AB$  и  $AC$  – наклонные к плоскости  
 $AO \perp \alpha$ ,  $AC = x$  см,  $AB = x+26$  см,  $CO = 12$  см,  
 $OB = 40$  см.  
**Найти:**  $AB$  и  $AC$ .



**Решение:** Пусть  $AC = x$  см,  $AB = (x+26)$  см. В  $\triangle ABO$   $AO^2 = AB^2 - OB^2 = (x+26)^2 - 40^2$ ,  
В  $\triangle ACO$   $AO^2 = AC^2 - CO^2 = x^2 - 12^2$ . Т. к. левые части этих равенств равны, то  
равны и правые:  $(x+26)^2 - 40^2 = x^2 - 12^2$ ,  $x^2 + 52x + 676 - 1600 = x^2 - 144$ ,  $52x = 780$ ,  $x = 15$  см.

Таким образом,  $AC = 15$  см,  $AB = 41$  см.

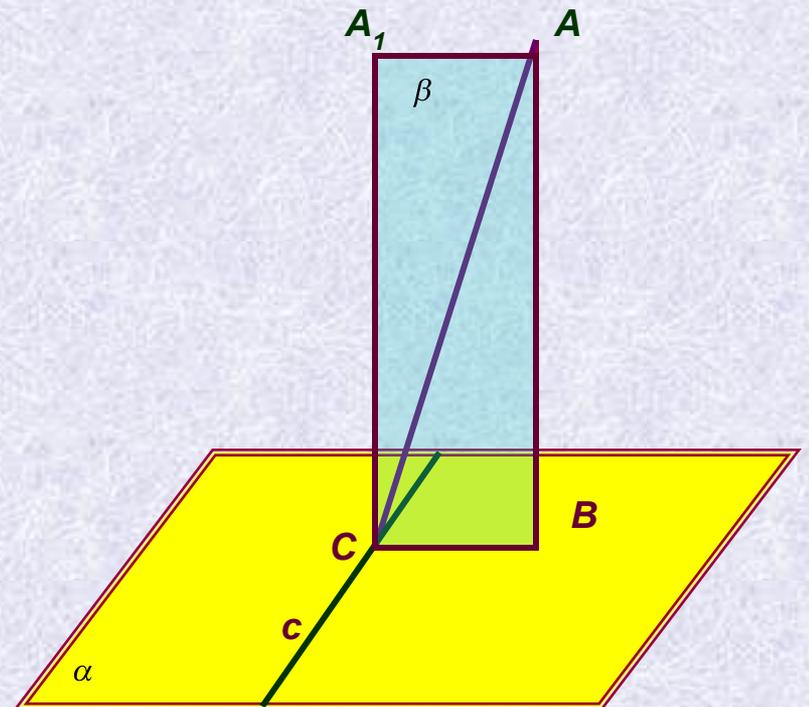
**Ответ:** 15 см и 41 см.

# Теорема о трёх перпендикулярах.

**Теорема 3.5** Если прямая, проведённая на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна наклонной.

## **Обратная теорема**

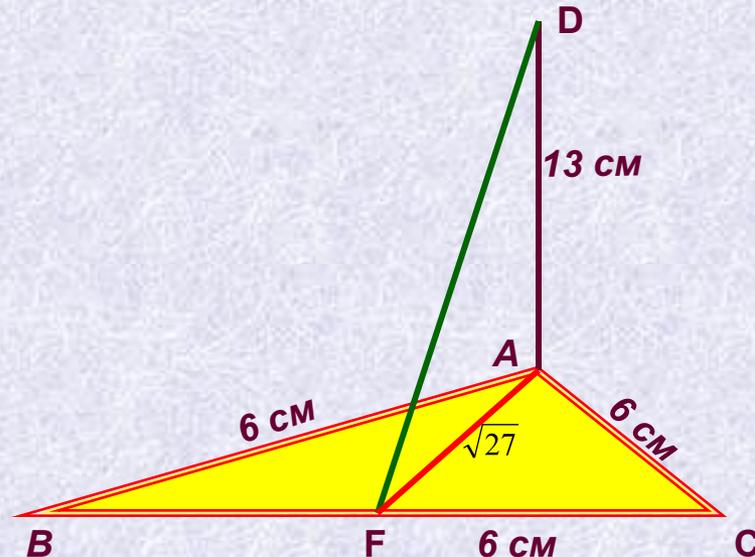
Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.



**Задача № 48.** Из вершины равностороннего треугольника  $ABC$  восстановлен перпендикуляр  $AD$  к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки  $D$  до стороны  $BC$ , если  $AD = 13$  см,  $BC = 6$  см.

**Дано:**  $\triangle ABC$  – равносторонний,  $AB=BC=AC= 6$  см,  $AD \perp (ABC)$ ,  $AD=13$  см.

**Найдите:**  $\rho(D; BC)$ .



**Решение:** Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки до прямой. Поэтому, из точки  $D$  опустим перпендикуляр  $DF$  на прямую  $BC$ .

По теореме о трёх перпендикулярах  $AF \perp BC$ ,

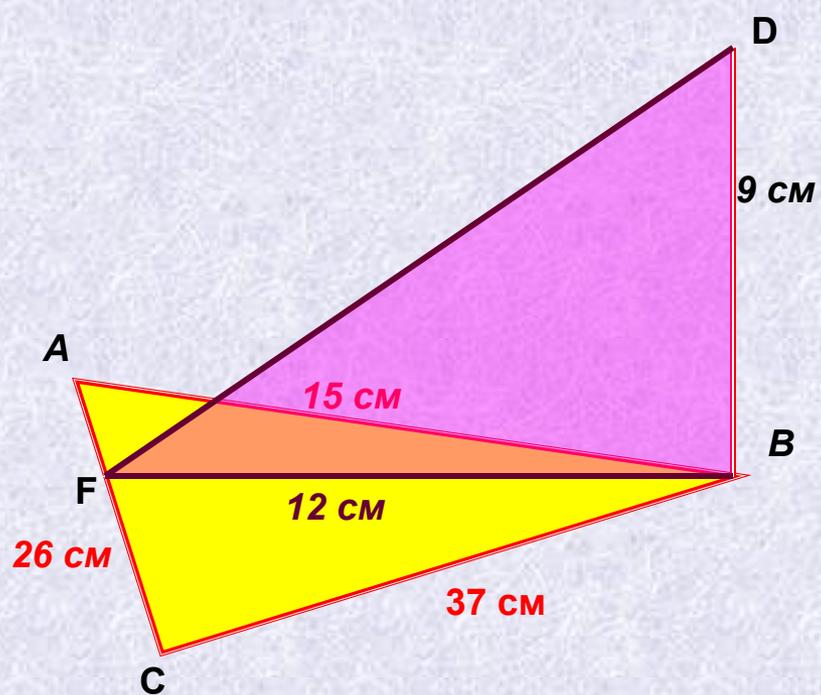
т.к. треугольник  $ABC$ - равносторонний, то  $AF$  – медиана, т.е.  $BF=FC= 3$  см.

$\triangle AFC$  – прямоугольный. По теореме Пифагора  $AF^2 = AC^2 - CF^2 = 36 - 9 = 27$ ,  $AF = \sqrt{27}$  см.

$\triangle ADF$  – прямоугольный,  $DF^2 = AD^2 + AF^2 = 169 + 27 = 196$ , следовательно  $DF = 14$  см.

**Ответ:** 14 см.

**Задача .** Стороны треугольника 15 см, 26 см и 37 см. Через вершину среднего по величине угла проведён перпендикуляр в его плоскости, равный 9 см. Найдите расстояние от концов этого перпендикуляра до противоположной стороны.



**Решение:** Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки до прямой. Поэтому, из точки B опустим перпендикуляр BF на прямую BC.

По теореме о трёх перпендикулярах  $DF \perp AC$ . BF найдём из треугольника ABC.

Найдём площадь треугольника ABC по формуле Герона.  $p = (a+b+c)/2 = (15+26+37)/2 = 39$ ,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{39 \cdot 24 \cdot 13 \cdot 2} = \sqrt{13 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 2} = 13 \cdot 3 \cdot 4 = 156 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BF, \quad BF = 2 \cdot S / AC = 2 \cdot 156 / 26 = 12 \text{ см.}$$

Треугольник DFB – прямоугольный. По теореме Пифагора  $DF^2 = DB^2 + BF^2$ ,

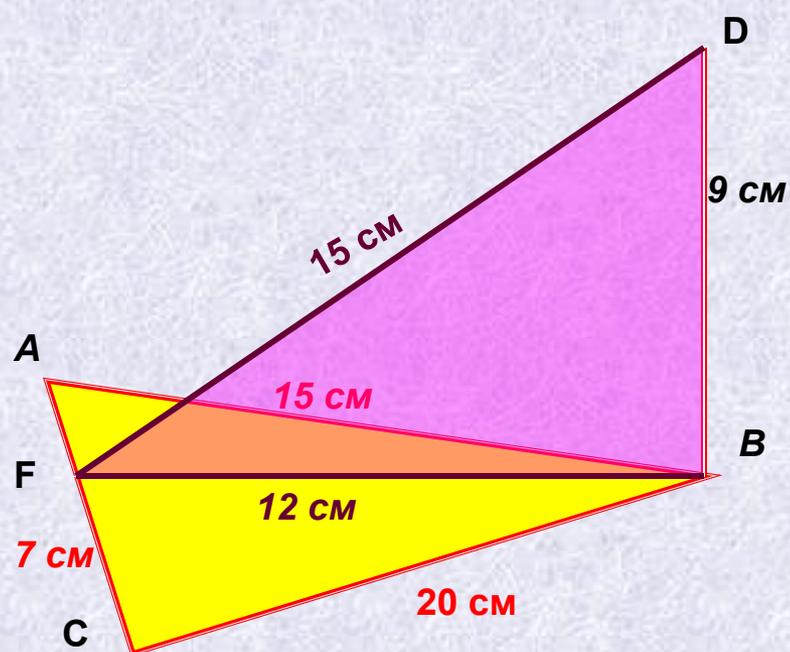
$$DF^2 = 81 + 144 = 225, \quad DF = 15 \text{ см.}$$

**Ответ:** 12 см и 15 см.

## Задание на дом: П. 19,

**Задача .** Из вершины треугольника  $ABC$  восстановлен перпендикуляр  $BD$  к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки  $D$  до стороны  $AC$ , если  $BD = 9$  см,  $AB = 15$  см,  $BC = 20$  см,  $AC = 7$  см.

**Задача .** Из вершины треугольника ABC восстановлен перпендикуляр BD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны AC, если  $BD = 9$  см,  $AB = 15$  см,  $BC = 20$  см,  $AC = 7$  см.



**Решение:** Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки до прямой. Поэтому, из точки D опустим перпендикуляр DF на прямую AC.

По теореме о трёх перпендикулярах  $BF \perp AC$ . BF найдём из треугольника ABC. Вычислим площадь треугольника ABC по формуле Герона.

$$p = (a+b+c)/2 = (15+20+7)/2 = 21,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 14} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2} = 7 \cdot 6 = 42 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BF, \quad BF = 2 \cdot S / AC = 2 \cdot 42 / 7 = 12 \text{ см.}$$

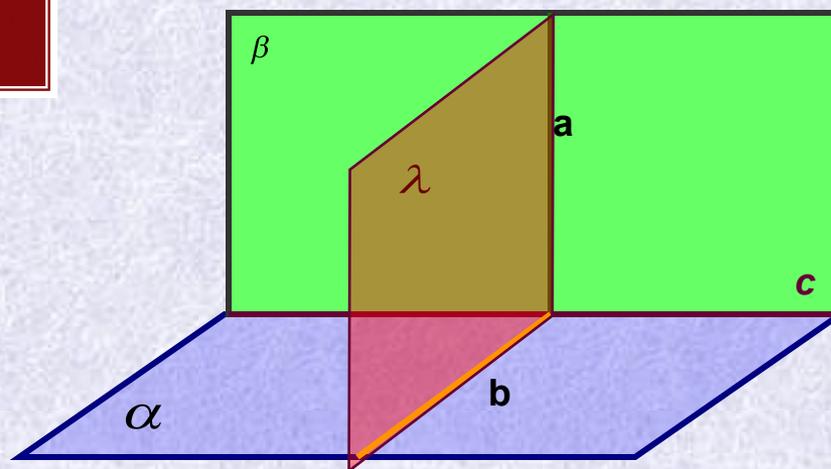
Треугольник DFB – прямоугольный. По теореме Пифагора  $DF^2 = DB^2 + BF^2$ ,

$$DF^2 = 81 + 144 = 225, \quad DF = 15 \text{ см.}$$

**Ответ:** 15 см.

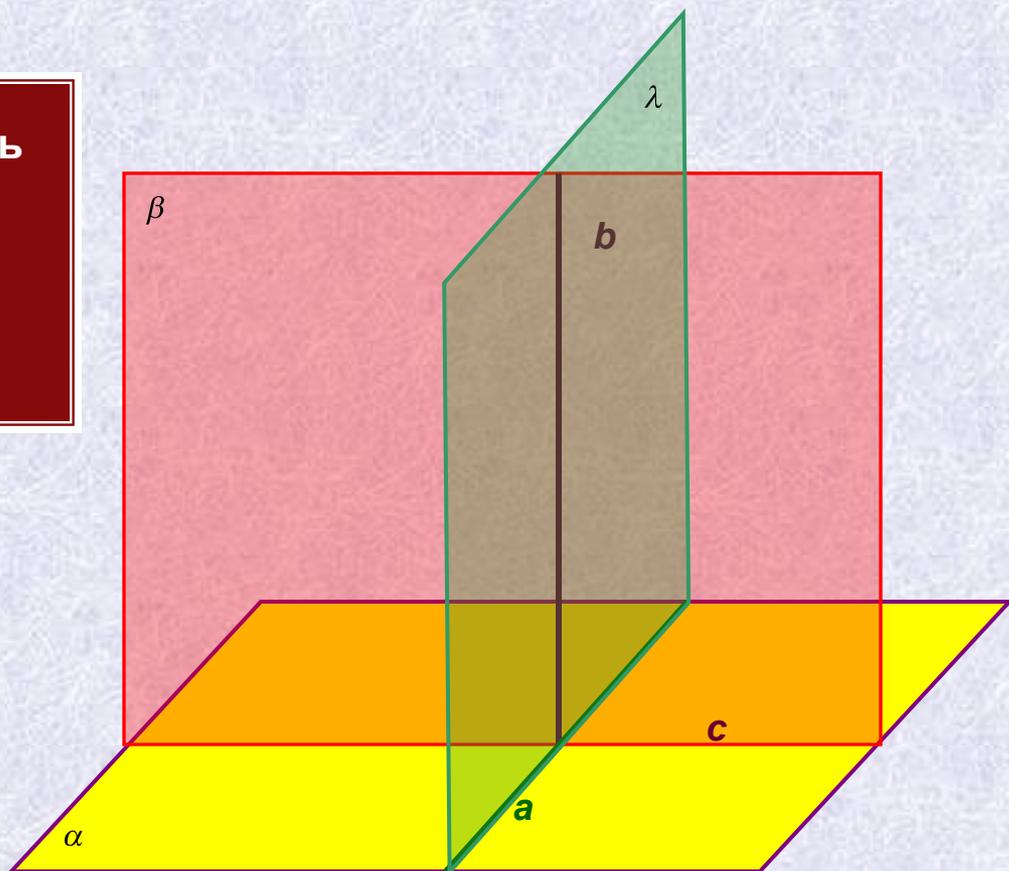
# Перпендикулярность плоскостей.

Определение. Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей пересекает их по перпендикулярным прямым.

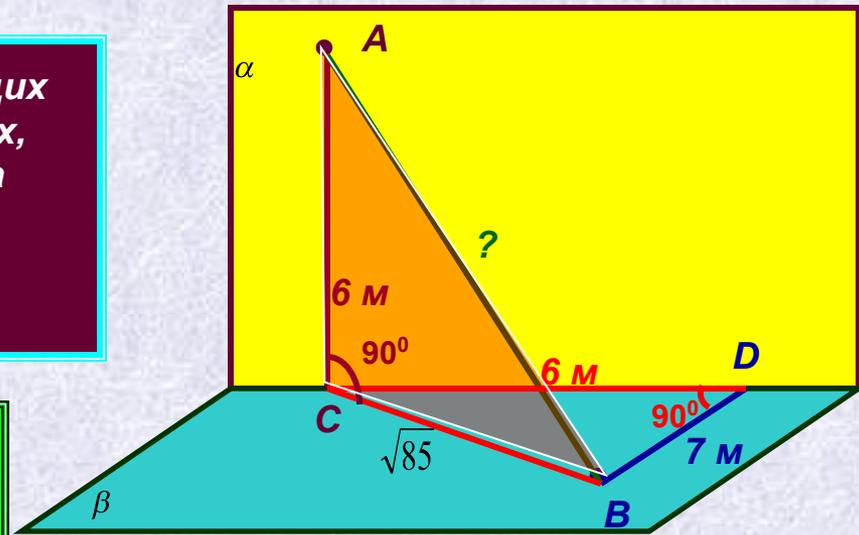


## Признак перпендикулярности плоскостей.

**Теорема 3.6** Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



**Задача № 59 1)** Из точек  $A$  и  $B$ , лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры  $AC$  и  $BD$  на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка  $AB$ , если:  $AC = 6$  м,  $BD = 7$  м,  $CD = 6$  м.



**Дано:**  $\alpha \perp \beta$ ,  $A \in \alpha$ ,  $B \in \beta$ ,  $AC \perp CD$ ,  
 $BD \perp CD$

$AC = 6$  м,  $BD = 7$  м,  $CD = 6$  м.

**Найти:**  $AB$ .

**Решение:**  $\triangle BCD$  – прямоугольный,

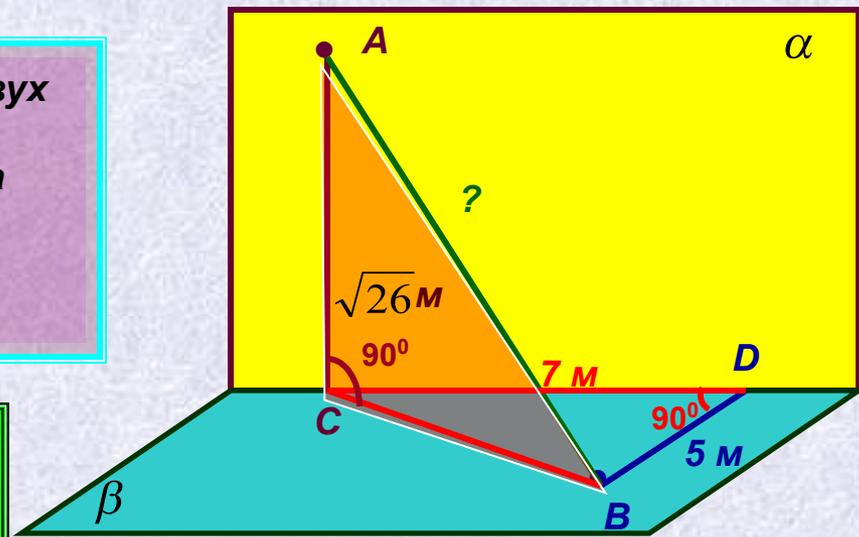
по теореме Пифагора  $BC^2 = CD^2 + BD^2$ ,  $BC^2 = 36 + 49 = 85$ ,  $BC = \sqrt{85}$  м.

$\triangle ABC$  – прямоугольный, по теореме Пифагора  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ,

$AB^2 = 36 + 85 = 121$ ,  $AB = 11$  м.

**Ответ :** 11 м.

**Задача** Из точек  $A$  и  $B$ , лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры  $AC$  и  $BD$  на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка  $AB$ , если:  $AC = \sqrt{26}$  м,  $BD = 5$  м,  $CD = 7$  м.



**Дано:**  $\alpha \perp \beta$ ,  $A \in \alpha$ ,  $B \in \beta$ ,  $AC \perp CD$ ,  
 $BD \perp CD$

$AC = \sqrt{26}$  м,  $BD = 5$  м,  $CD = 7$  м.

**Найти:**  $AB$ .

**Задача.** Из меньшего угла треугольника со сторонами 9 см, 10 см и 17 см восстановлен перпендикуляр к его плоскости, равный 15 см. Найдите расстояния от концов этого перпендикуляра до прямой, содержащей противоположную сторону.

**Решение:**

1) Т.к.  $\triangle ABC$  - тупоугольный, то перпендикуляр, проведённый из точки В, мы должны провести на продолжение стороны АС.

2) Найдём площадь  $\triangle ABC$  по формуле Герона:

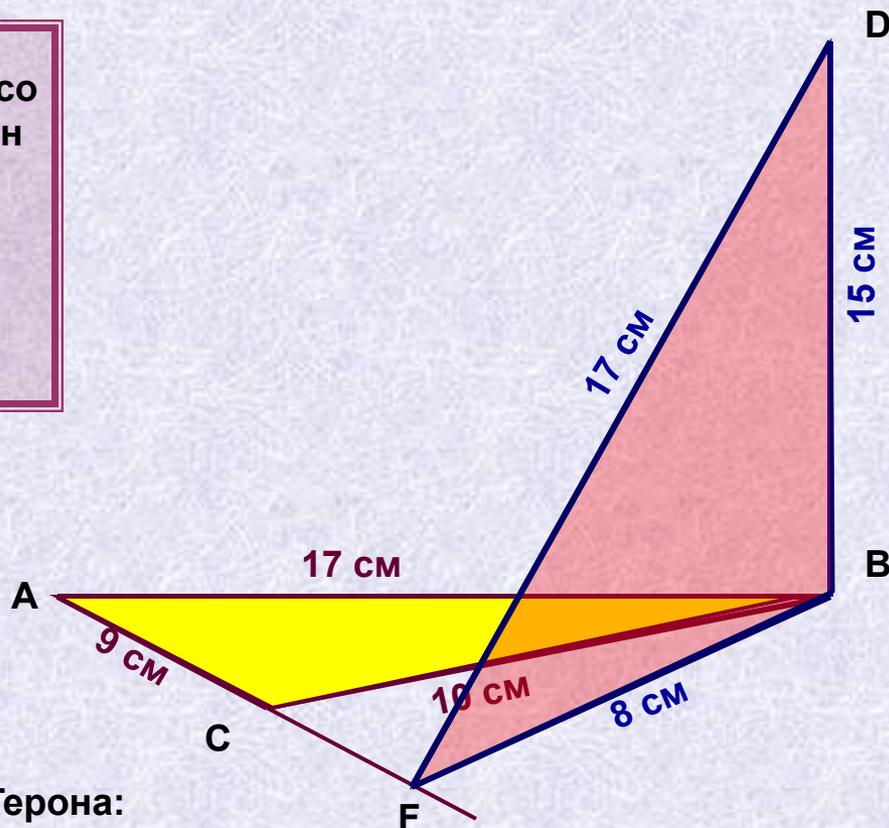
$$p = (a + b + c) : 2 = (9 + 10 + 17) : 2 = 18 \text{ (см)}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18 \cdot (18-9) \cdot (18-10) \cdot (18-17)}$$

$$= \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1} = 9 \cdot 4 = 36 \text{ см}^2.$$

3)  $S_{\triangle} = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot S}{a}$ ,  $BF = (2 \cdot S) : AC = (2 \cdot 36) : 9 = 8 \text{ (см)}$ .

4)  $DF \perp AC$  по теореме о трёх перпендикулярах.  $\triangle DBF$  – прямоугольный, поэтому  $DF^2 = BD^2 + BF^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$ ,  $DF = 17 \text{ см}$ .

Ответ: 8 см и 17 см.

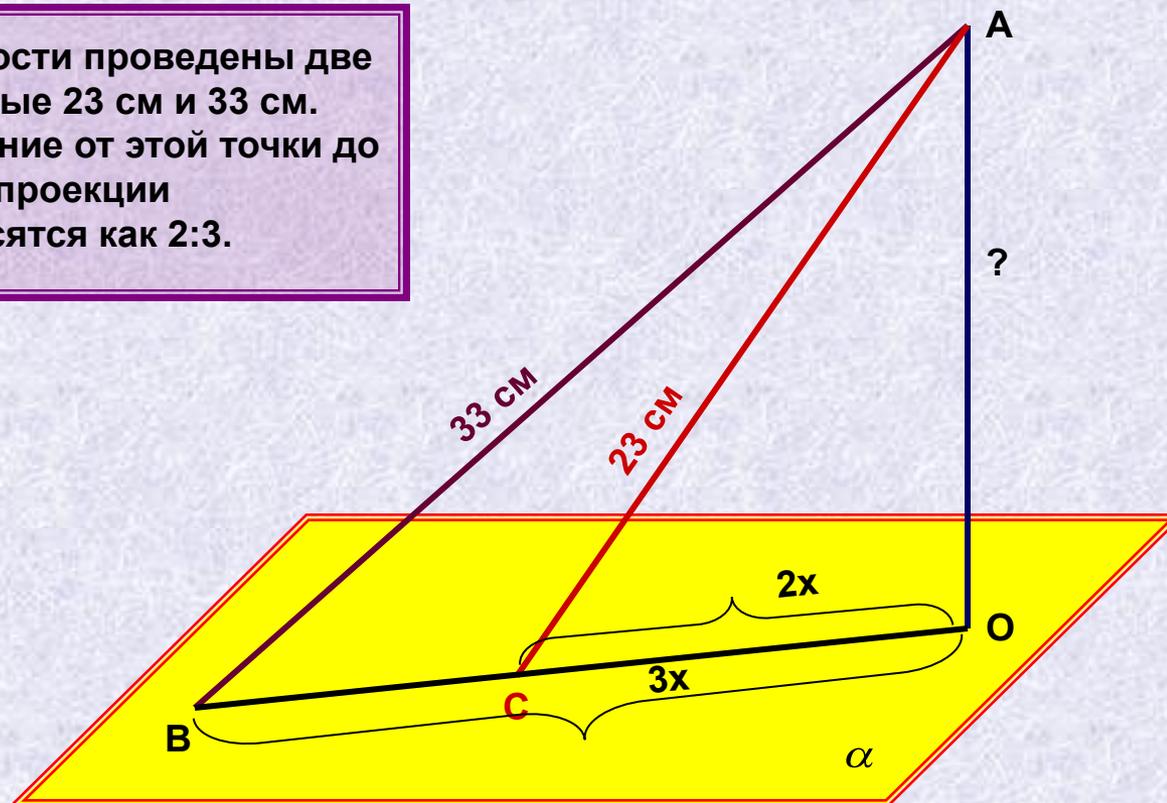


**Задание на дом: П 20,**

**задачи № № 25, 59 з),**

## К задаче № 25

Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 23 см и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 2:3.



**СПАСИБО  
ЗА СОВМЕСТНУЮ  
РАБОТУ.**

До свидания.