

Частное профессиональное образовательное учреждение
Краснодарский колледж управления, техники и технологий

Приближенное вычисление определенного интеграла

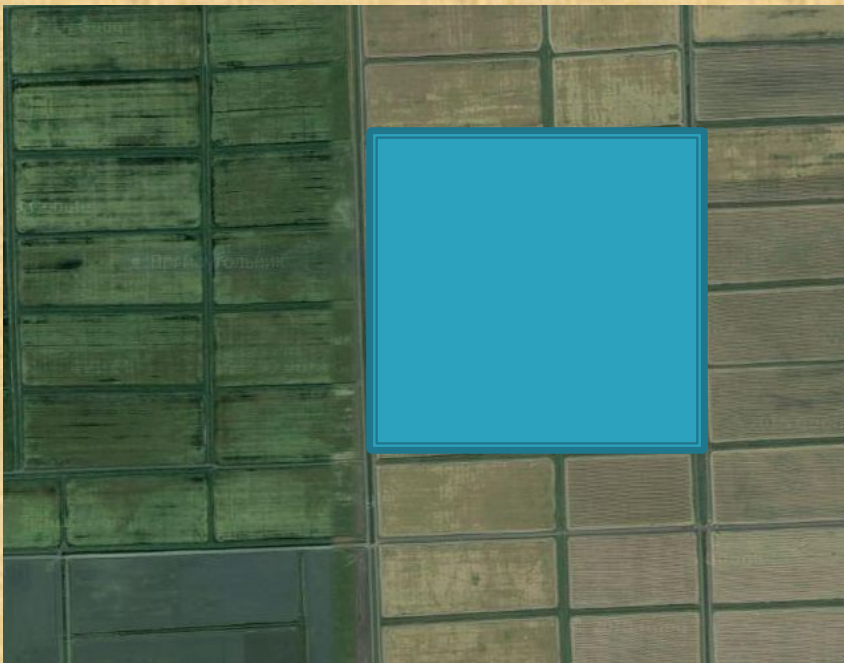
для групп специальности «Информационные системы
обеспечения градостроительной деятельности»

преподаватель ЧПОУ ККУТТ Федоренко О.Н.



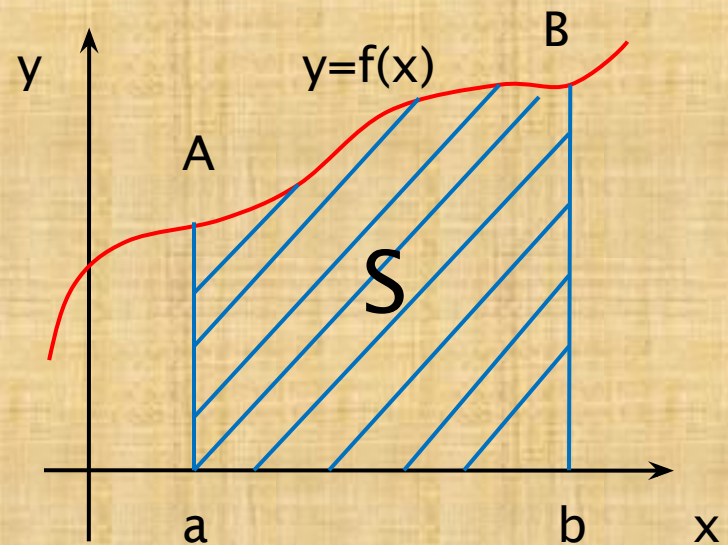
Вычислить площадь поля, изображенного на карте, может даже первоклассник:

- Если a и b стороны поля



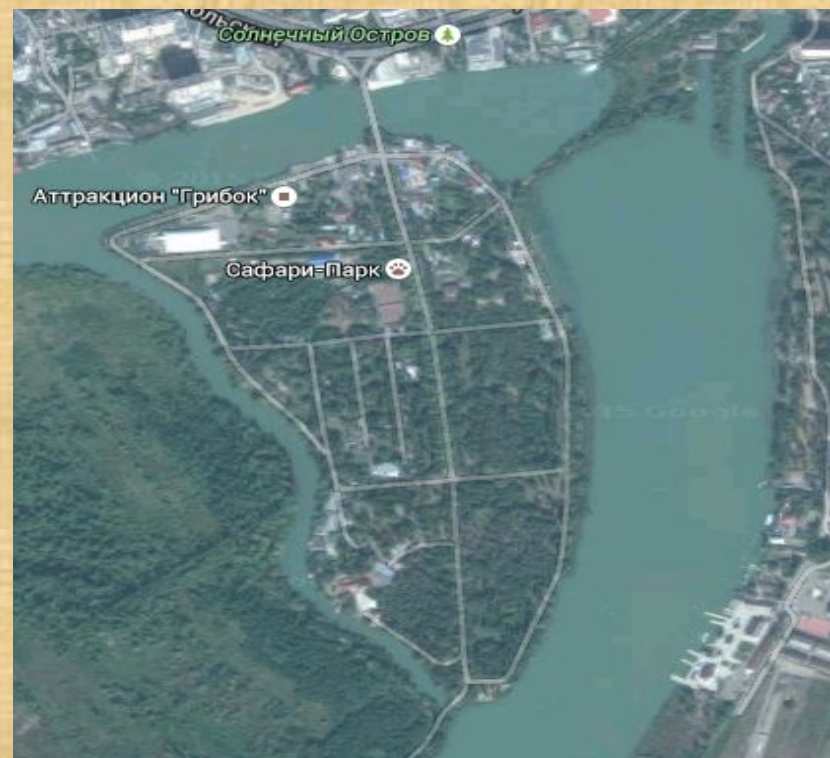
$$S = a \cdot b$$

Если поле имеет вид криволинейной трапеции, то площадь вычисляется с помощью определенного интеграла



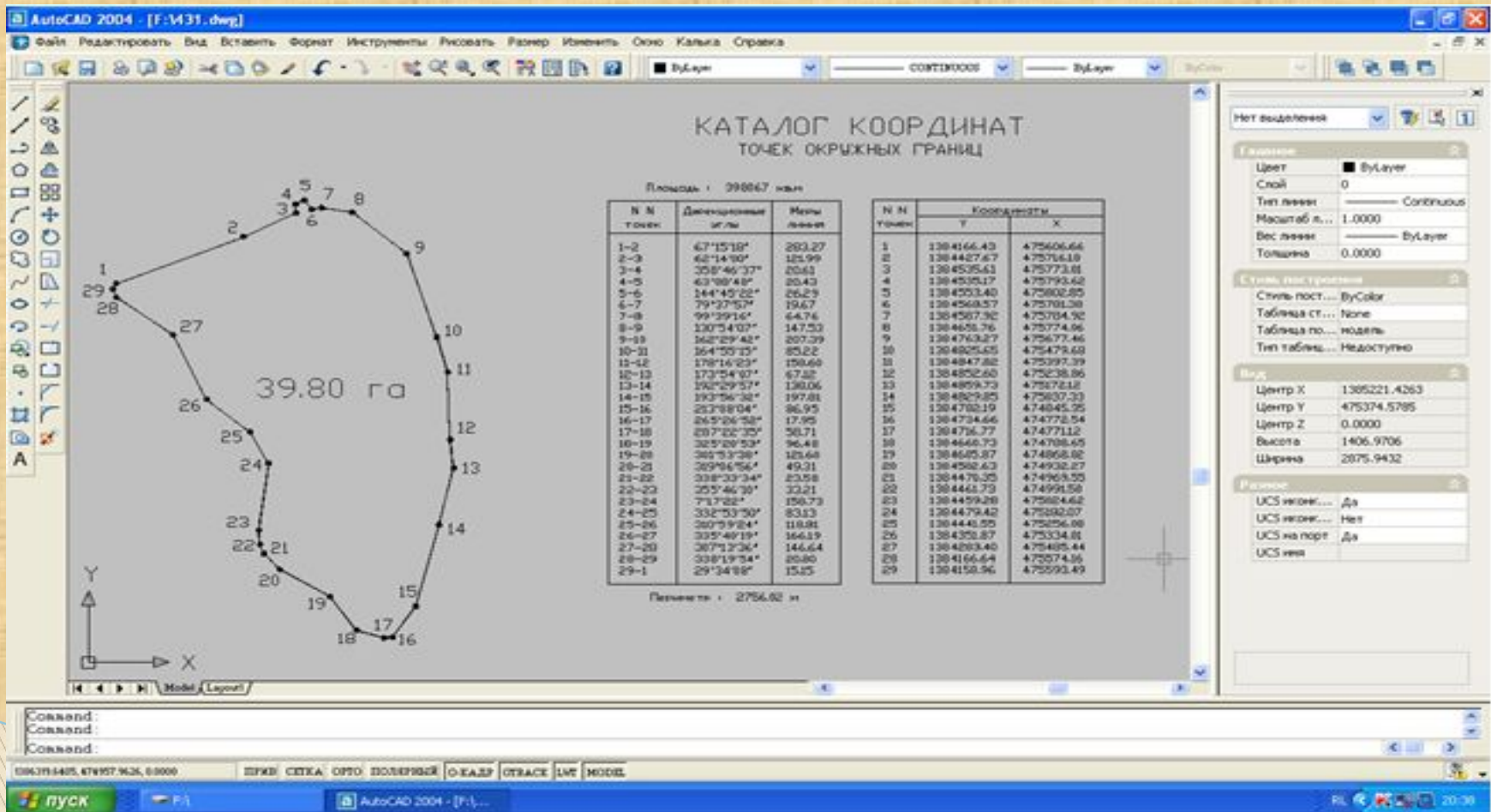
$$\int_a^b f(x) \cdot dx = S_{aABb}$$

Есть в Краснодаре замечательный парк «Солнечный остров», на который открывается изумительный вид с высоты птичьего полета. Если мы попадем туда без геодезических приборов, мы все же сможем вычислить площадь этого острова, зная лишь его линейные размеры.



Кадастровые инженеры пользуются программой AutoCAD для вычисления площади.

Скриншот страницы документа (при подготовке межевого плана) кадастрового инженера, проводившего топографическую съемку парка Солнечный остров



Современные геодезические приборы, помогающие вычислить площадь участка

- ▣ *Электронный тахеометр* позволяет не только вычислить площадь участка, но и является угломером, дальномером, компьютером



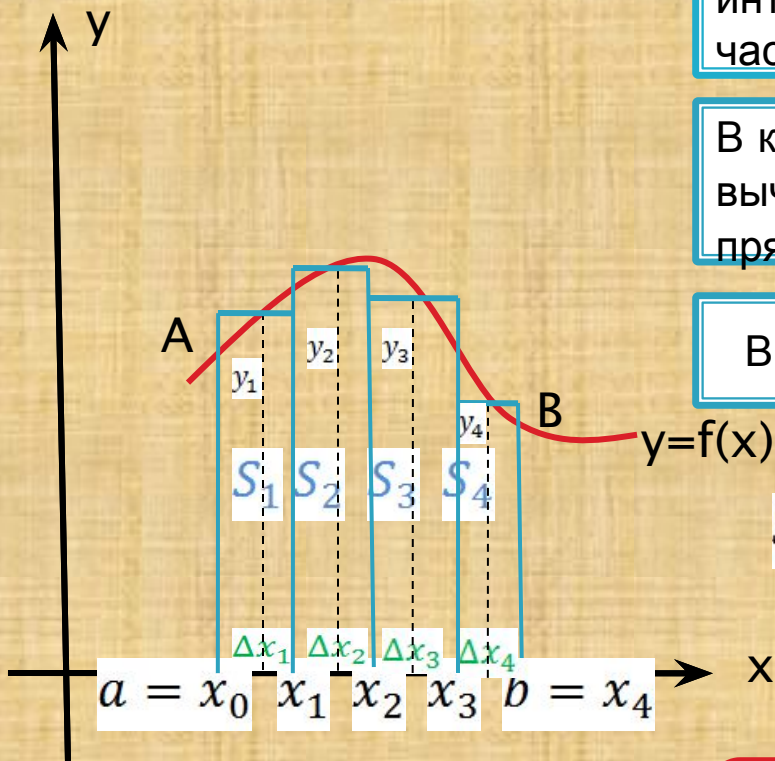
- ▣ *Геодезический инструмент спутникового оппозиционирования (приемник GPS/ ГЛОНАСС)*

Выведем формулу прямоугольников для приближенного вычисления определенного интеграла

Дана криволинейная трапеция, определенная на интервале $(a;b)$. Разобьем интервал $(a;b)$ на частичные отрезки Δx_i точками x_1, x_2, \dots, x_n

В каждом частичном отрезке выберем точку и вычислим значение функции y_i . Построим прямоугольники со сторонами Δx_i и y_i

Вычислим площади полученных прямоугольников.



$$S_{aABb} \approx S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \Delta x_1 \cdot y_1 + \Delta x_2 \cdot y_2 + \Delta x_3 \cdot y_3 + \Delta x_4 \cdot y_4$$

если $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \Delta x$

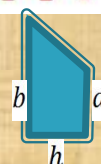
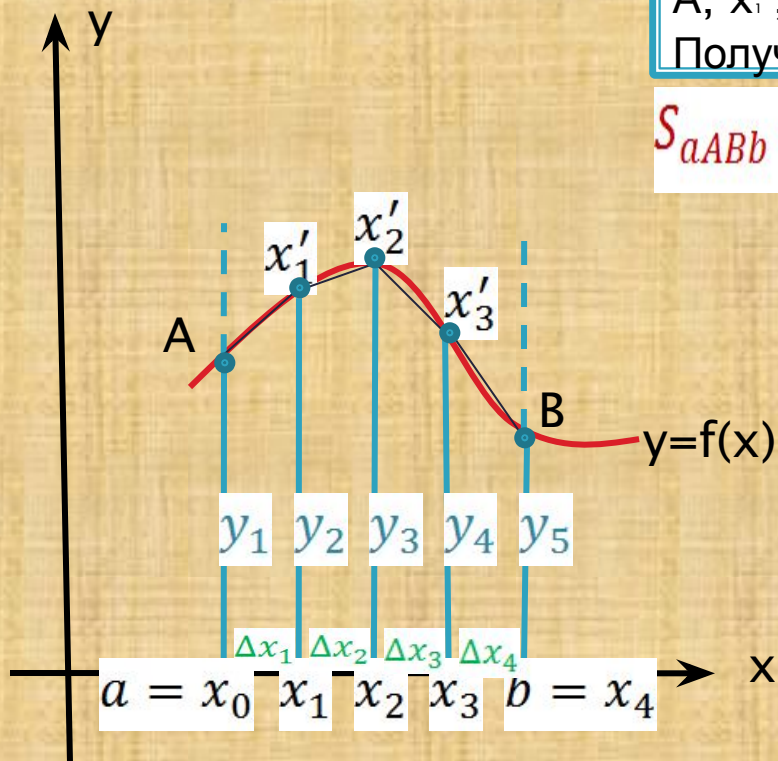
$$\int_a^b f(x) dx = S_{aABb} \approx (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \cdot \Delta x$$

Формула трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла

Вычислим Δx_i и y_i . Соединим отрезками точки A, x'_1 , x'_2 , x'_3 , B.

Получим трапеции. Вычислим их площади.

$$S_{aABb} \approx S_{aAx'_1x_1} + S_{x_1x'_1x'_2x_2} + S_{x_2x'_2x'_3x_3} + S_{x_3x'_3Bb}$$



$$S_{\text{трапеции}} = \frac{a + b}{2} \times h$$

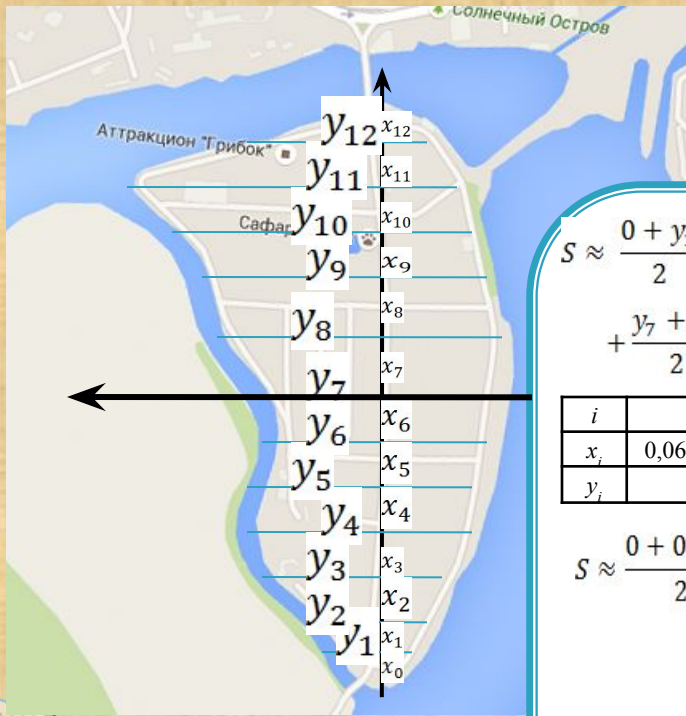
$$S_{aABb} \approx \frac{y_1 + y_2}{2} \times \Delta x_1 + \frac{y_2 + y_3}{2} \times \Delta x_2 + \frac{y_3 + y_4}{2} \times \Delta x_3 + \frac{y_4 + y_5}{2} \times \Delta x_4$$

если $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \Delta x$

$$\int_a^b f(x) dx = S_{aABb} \approx (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \cdot \Delta x$$

А теперь вернемся к «Солнечному острову» и вычислим его приблизительную площадь с помощью формулы трапеций

Линейные размеры острова представили студенты группы 13-ГК-01, проходившие геодезическую практику.



$$S \approx \frac{0 + y_1}{2} \cdot x_0 + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot x_1 + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot x_2 + \frac{y_3 + y_4}{2} \cdot x_3 + \frac{y_4 + y_5}{2} \cdot x_4 + \frac{y_5 + y_6}{2} \cdot x_5 + \frac{y_6 + y_7}{2} \cdot x_6 + \frac{y_7 + y_8}{2} \cdot x_7 + \frac{y_8 + y_9}{2} \cdot x_8 + \frac{y_9 + y_{10}}{2} \cdot x_9 + \frac{y_{10} + y_{11}}{2} \cdot x_{10} + \frac{y_{11} + y_{12}}{2} \cdot x_{11} + \frac{y_{12} + 0}{2} \cdot x_{12}$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	0,061	0,057	0,081	0,083	0,083	0,084	0,085	0,086	0,082	0,083	0,079	0,082	0,078
y_i		0,163	0,236	0,37	0,407	0,442	0,389	0,457	0,529	0,54	0,549	0,578	0,239

$$S \approx \frac{0 + 0.163}{2} \cdot 0.061 + \frac{0.163 + 0.236}{2} \cdot 0.057 + \frac{0.236 + 0.37}{2} \cdot 0.081 + \frac{0.37 + 0.407}{2} \cdot 0.083 + \frac{0.407 + 0.442}{2} \cdot 0.083 + \frac{0.442 + 0.389}{2} \cdot 0.084 + \frac{0.389 + 0.457}{2} \cdot 0.085 + \frac{0.457 + 0.529}{2} \cdot 0.086 + \frac{0.529 + 0.54}{2} \cdot 0.082 + \frac{0.54 + 0.549}{2} \cdot 0.083 + \frac{0.549 + 0.578}{2} \cdot 0.079 + \frac{0.578 + 0.239}{2} \cdot 0.082 + \frac{0.239 + 0}{2} \cdot 0.078 = 0.397977$$

В представленном примере о площади острова нам была неизвестна функция, ограничивающая остров. Но в некоторых примерах функция известна, но для вычисления площади мы не можем вычислить определенный интеграл, потому что интеграл «неберущийся». В этом случае так же приходят на помощь приближенное вычисление.

