

Приближенное значение величины

Абсолютная и относительная погрешности

Приближенным числом a
называется число,
незначительно отличающееся
от точного числа A
и заменяющее последнее
в вычислениях

Если $a < A$, то число a является приближенным значением числа A *по недостатку*;
если $a > A$ – приближенным значением *по избытку*

$$\Delta(a) = |A - a|$$

Пример 1. Пусть $A = 784,2737$,
 $a, = 784,274$. Найти абсолютную
погрешность приближенного
числа

Решение

$$\begin{aligned}\Delta a &= |A - a| = \\ &|784,2737 - 784,274| \\ &= 0,0003\end{aligned}$$

Ответ: 0,0003

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|}$$

Пример 5. Пусть при измерении книги и длины стола были получены результаты:

$$l_1 = 28,4 \pm 0,1 \text{ (см)} \text{ и}$$

$$l_2 = 110,3 \pm 0,1 \text{ (см)}.$$

Решение

$$\delta^*_{11} = 0,1 \text{ (см)} / 28,4 \text{ (см)} \approx 0,0035, \text{ или } 0,35\%;$$

$$\delta^*_{12} = 0,1 \text{ (см)} / 110,3 \text{ (см)} \approx 0,0009, \text{ или } 0,09\%.$$

Ответ: измерение стола точнее

$$\overline{\Delta}(a), (\overline{\delta}(a)),$$

$$\Delta(a) \leq \overline{\Delta}(a)$$

$$(\delta(a)) \leq (\overline{\delta}(a))$$

Пример 8.

X	Δ_x	Y	Δ_y
$50^{\circ}30'10''$	$3''$	$45^{\circ}15'36''$	$2''$

Решение

$$x = 181810'' \pm 3'', \quad \delta_x = 3/181810 \approx 0,000017 = 0,0017\%;$$

$$y = 162936'' \pm 2'', \quad \delta_y = 2/162936 \approx 0,000013 = 0,0013\%.$$

Ответ: измерение y произведено более точно

Погрешности арифметических действий

Если

$$c = a + b,$$
$$c^* = a^* + b^*$$

или

$$c = a - b,$$
$$c^* = a^* - b^*,$$

то

$$\Delta(c^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$$

$$\overline{\Delta}(c^*) = \overline{\Delta}(a^*) + \overline{\Delta}(b^*)$$

Если

$$u=ab,$$
$$u^*=a^*b^*$$

или

$$v=a/b,$$
$$v^*=a^*/b^*,$$

то

Вывод формулы:

$$\Delta(v^*) \leq \frac{|b^*| \Delta(a^*) + |a^*| \Delta(b^*)}{(1 - \delta(b^*)) |b^*|^2}$$

Относительные погрешности произведения и частного:

$$\delta(u^*) \leq \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*)$$

$$\delta(u^*) \leq \frac{\delta(a^*) + \delta(b^*)}{1 - \delta(b^*)}$$

Если $u=ab$, то

$$\overline{\delta(u^*)} \approx \overline{\delta(a^*)} + \overline{\delta(b^*)}$$

Если $v=a/b$, то

$$\overline{\delta(v^*)} \approx \overline{\delta(a^*)} + \overline{\delta(b^*)}$$

Пример 1

Вычислите сумму
и разность приближённых
чисел 0,123 и 0,526.
также равна 0,001.

Пример 2



Измерения

цилиндрической полый изнутри трубы показали, что ее внешний радиус равен 100 см, а внутренний радиус – 98 см.

Чему равна толщина стенок трубы?

Вычислите относительную погрешность произведенных расчетов.

Позиционная запись числа:

$$a^* = \pm a_n a_{n-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$$

или

$$a^* = \pm \sum_{i=-m}^n a_i * 10^i$$

Первая слева цифра данного числа, отличная от нуля, и все расположенные за ней цифры называются значащими.

Например, числа 25,047 и -0,00259 имеют соответственно 5 и 3 значащих цифры.

Цифра a_j называется верной,

если $\Delta(a^*) \leq 10^j$, т.е.

абсолютная погрешность числа a^*

не превосходит одной единицы

соответствующего разряда десятичного числа

Например, $a^*=0,03045$ (a^*)=0,000003

Последнюю верную цифру или все верные цифры
обычно подчеркивают

Правило.

За абсолютную погрешность приближенного числа с известными верными значащими цифрами принимается половина единицы того разряда, где находится последняя верная цифра.

Абсолютная и относительная погрешность вычисления функции одной переменной

Теорема. Предельная абсолютная погрешность вычисления функции равна произведению абсолютной величины ее производной на предельную абсолютную погрешность аргумента.

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x = f(x) + f'(x) \Delta x$$

$$\Delta y = |f'(x)| \cdot |\Delta x|$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{\Delta y}{|f(x)|} = \frac{|f'(x)|}{|f(x^*)|} |\Delta x| = \left| x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \delta x$$

где $\Delta x = \delta x \cdot |x|$

$$\delta y = \left| x \cdot \frac{d \ln f(x)}{dx} \right| \delta x$$

Абсолютная и относительная погрешность вычисления функции нескольких переменных

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\Delta y = |f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)|$$

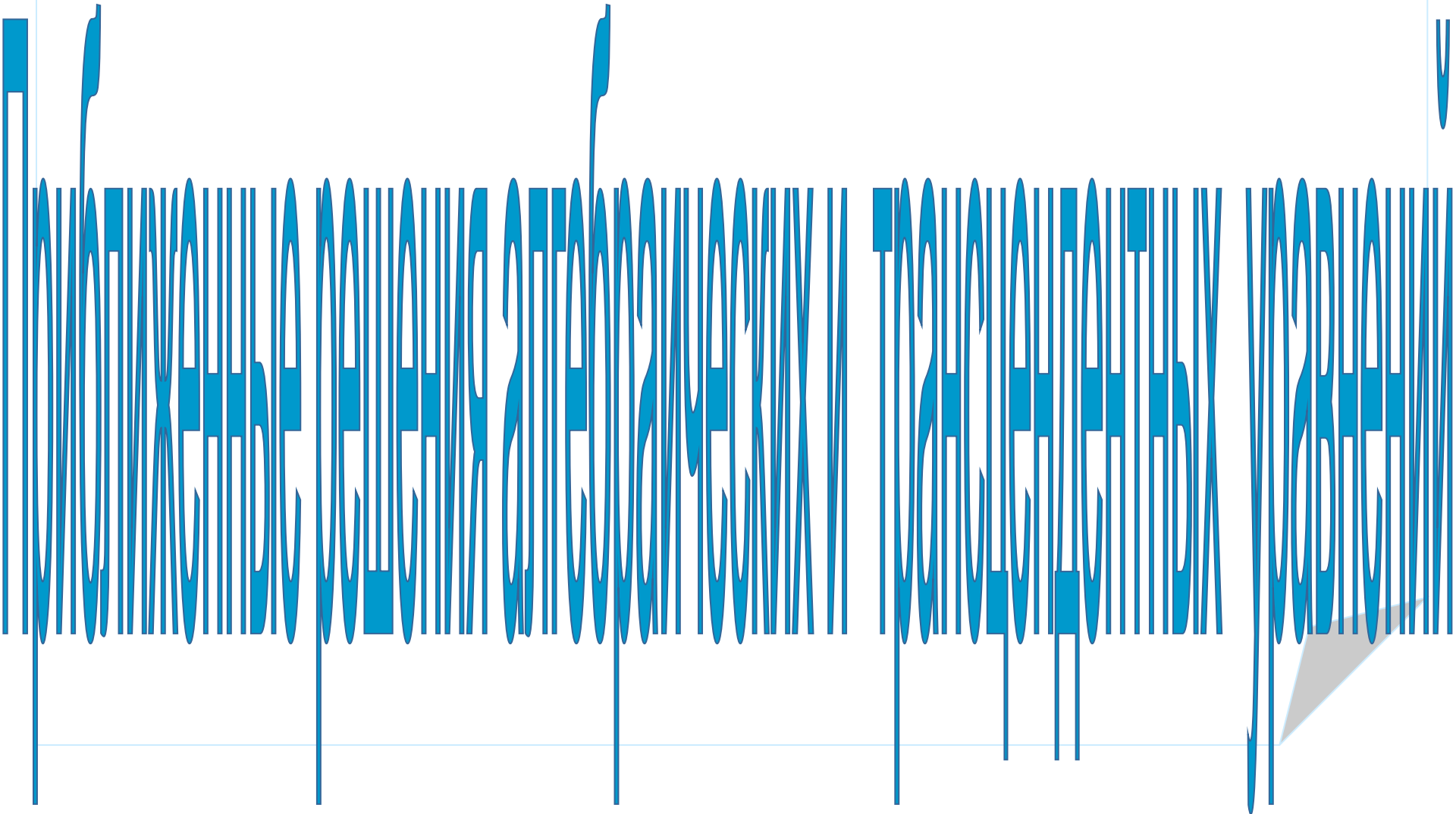
$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i}{|f(x_1, x_2, \dots, x_n)|} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \{\ln f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}}{\partial x_i} \right| x_i \delta x_i$$

Итак, для оценки погрешности мы получили следующие простые правила:

- При сложении и вычитании *абсолютные* погрешности складываются;
- При умножении и делении *относительные* погрешности складываются;
- При возведении в степень *относительные* погрешности умножаются на абсолютную величину показателя степени;



План лекции

1. Алгебраические и трансцендентные уравнения

2. Графический метод решения уравнений

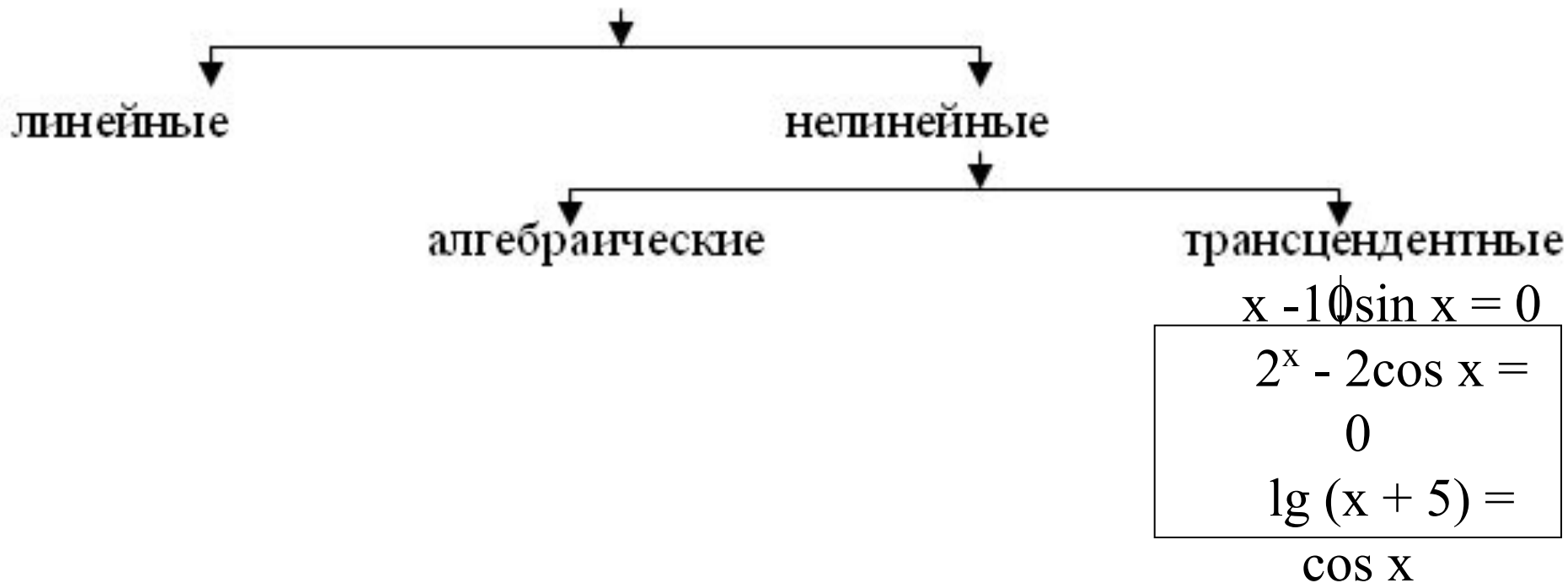
3. Отделение корней

$$\varphi(x) = g(x) \quad (1)$$

$$f(x) = 0 \quad (2)$$

$\xi \in [a, b]$ - корень уравнения, если $f(\xi) = 0$

Уравнения



 Решить уравнение – это значит:

- установить, имеет ли оно корни,
- сколько корней,
- и найти значение корней с заданной точностью

✎ Задача численного нахождения корней уравнения
состоит из двух этапов:

- отделение корней
- уточнение корней

Графический метод решения уравнений

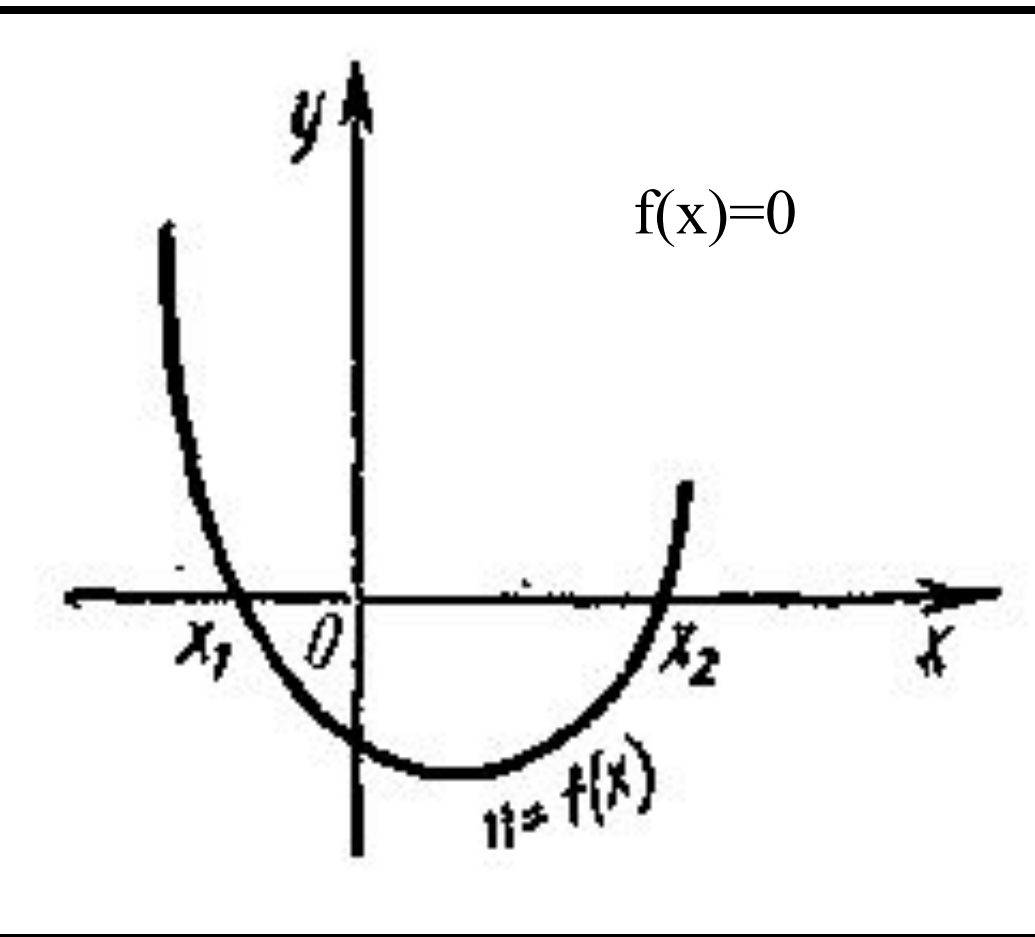


Рисунок 1

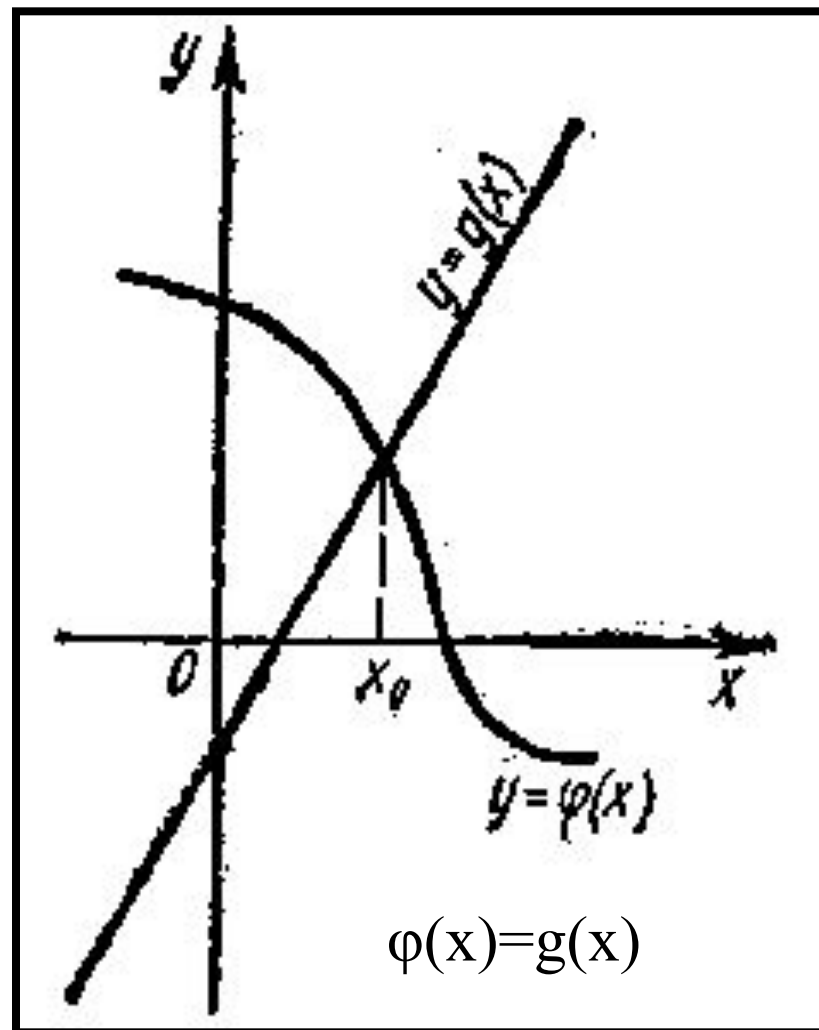


Рисунок 2

Пример 1.

Решить графически уравнение $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

Первый способ.

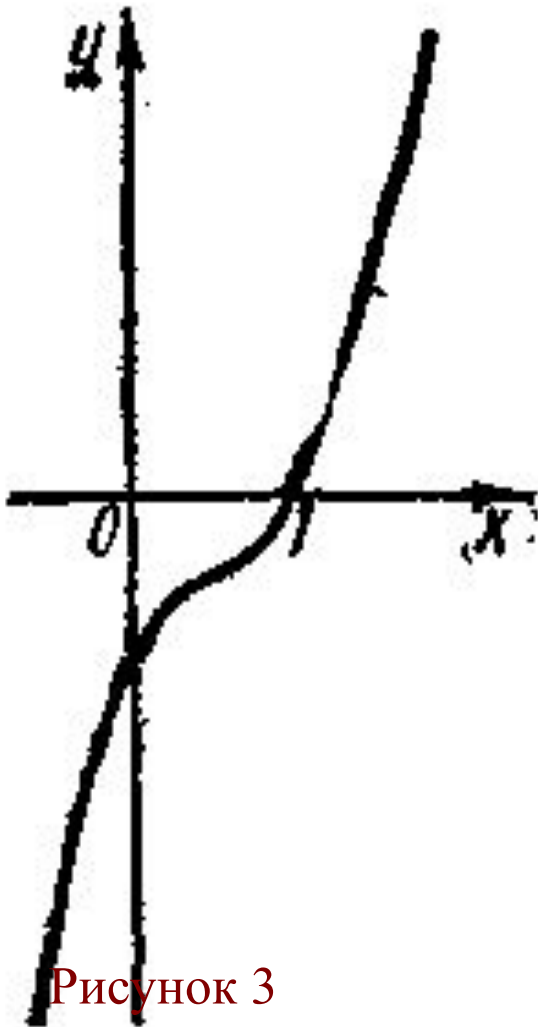


Рисунок 3

Второй способ.

$$x^3 = 2x^2 + 2x - 1$$

$$y = x^3$$

$$y = 2x^2 + 2x - 1$$

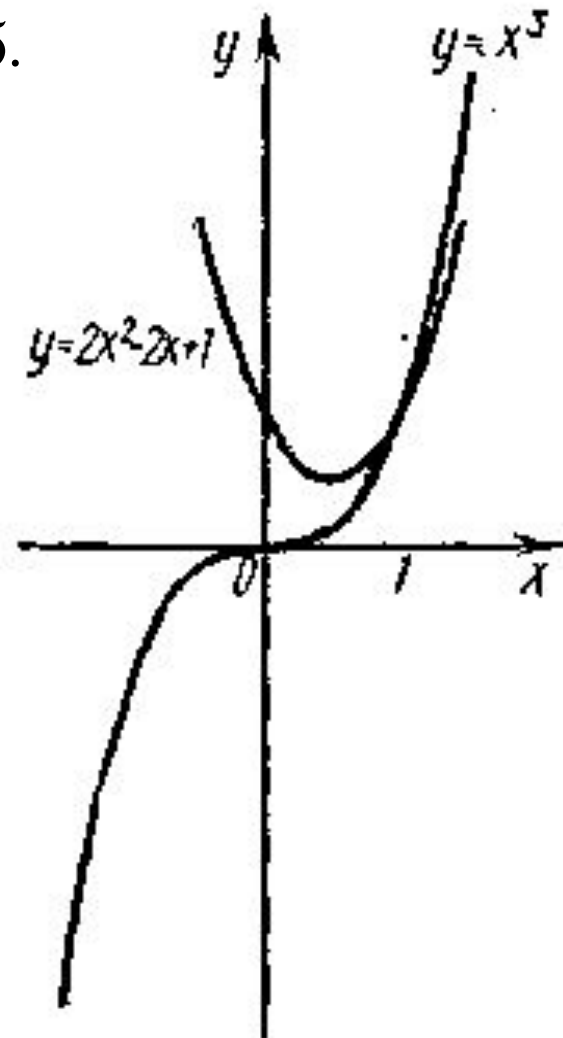


Рисунок 4

Пример 2. Решить уравнение $\lg x - 3x + 5 = 0$.

Второй способ.

$$\lg x = 3x - 5$$

$y = \lg x$
$y = 3x - 5$

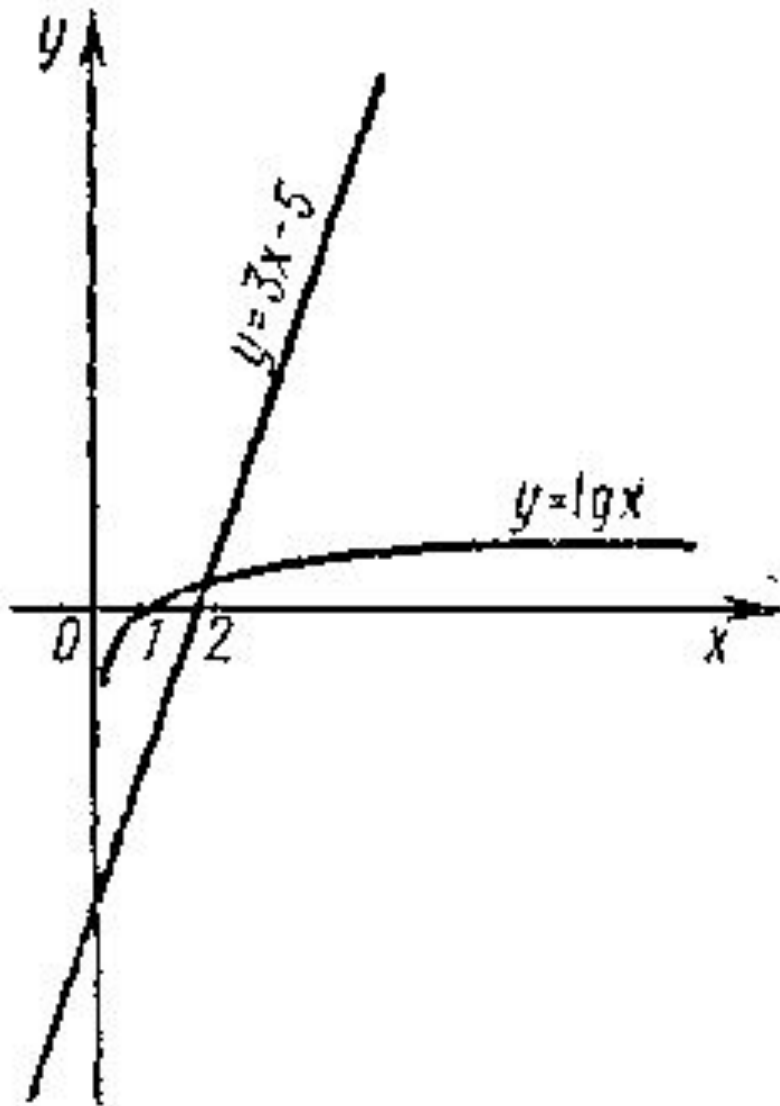


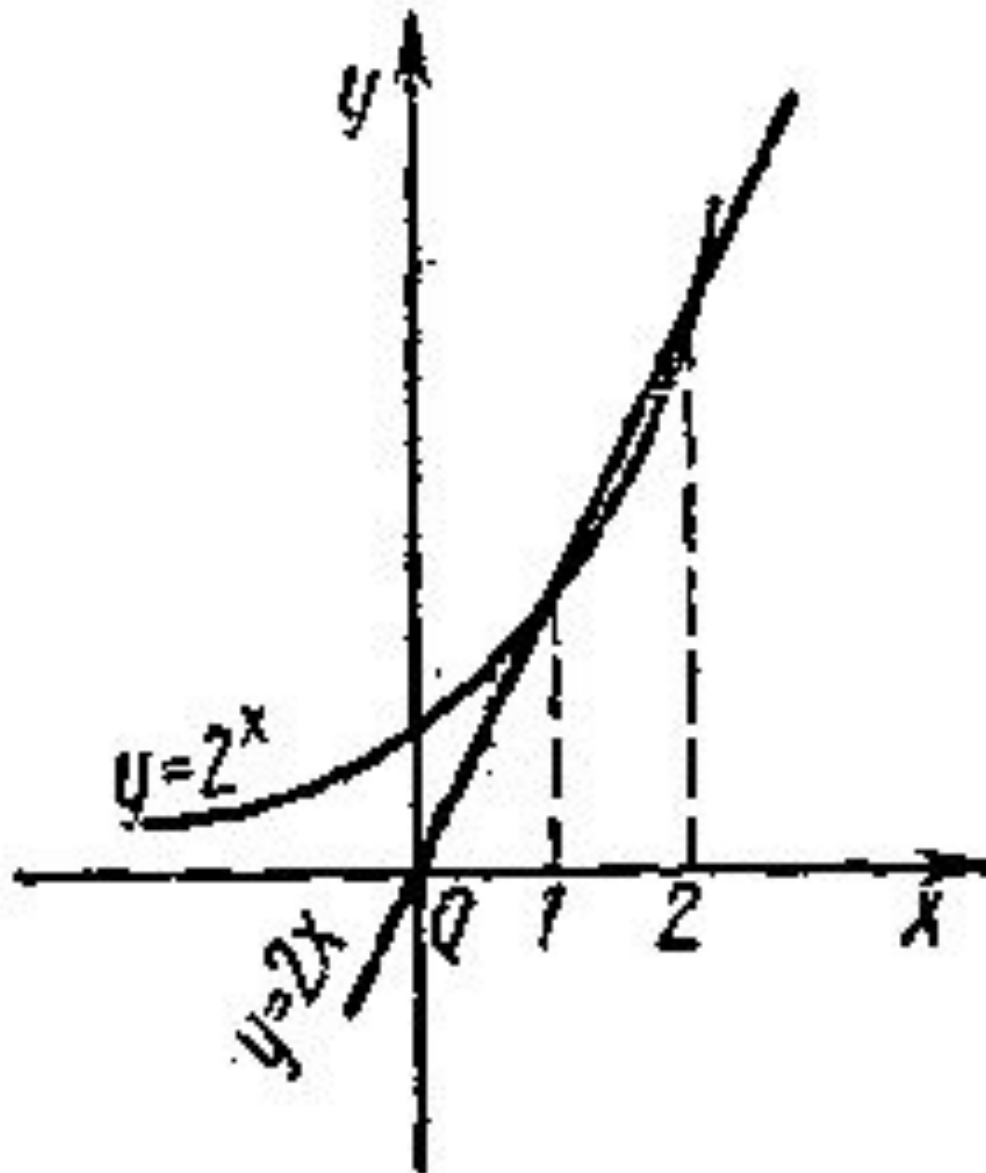
Рисунок 5

Ответ: $x = 0,00001$ и $x = 1,75$

Пример 3. Решить уравнение $2^x = 2x$.

$$y = 2^x$$
$$y = 2x$$

Рисунок 6



Ответ: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$

Отделение корней

☞ Корень ξ уравнения $f(x) = 0$ считается *отделенным* на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке уравнение $f(x) = 0$ не имеет других корней

Аналитический метод отделения корней

- 1) Если непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $F(x)$ принимает на его концах значения разных знаков, то уравнение $F(x)=0$ имеет на этом отрезке, по меньшей мере, один корень
- 2) Если функция $F(x)$ к тому же еще и строго монотонна, то корень на отрезке $[a, b]$ единственный

$$F(A) * F(B) < 0$$

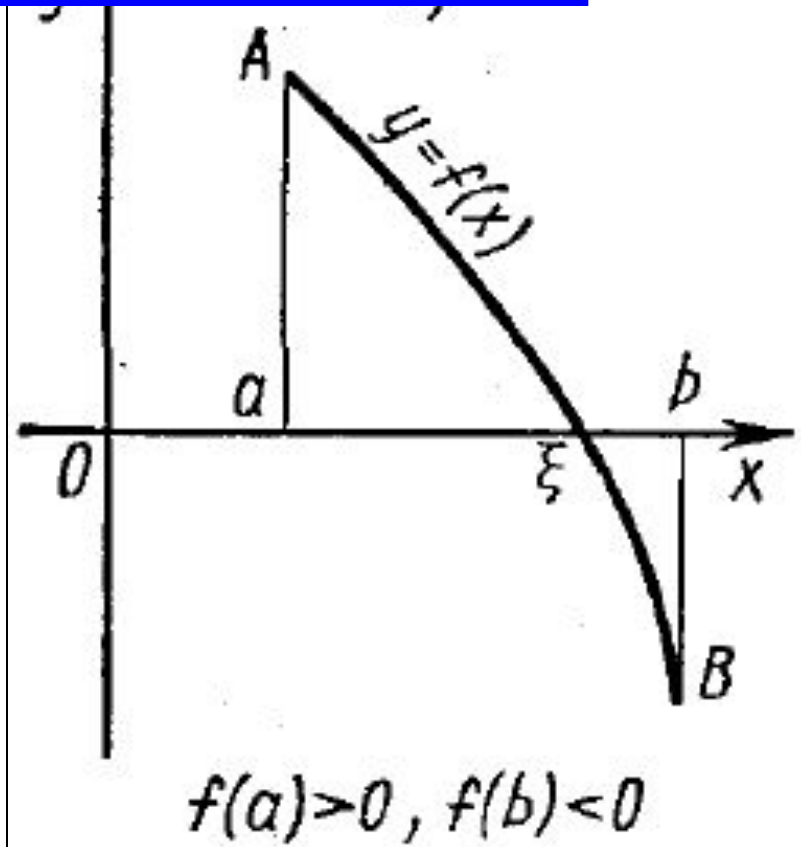
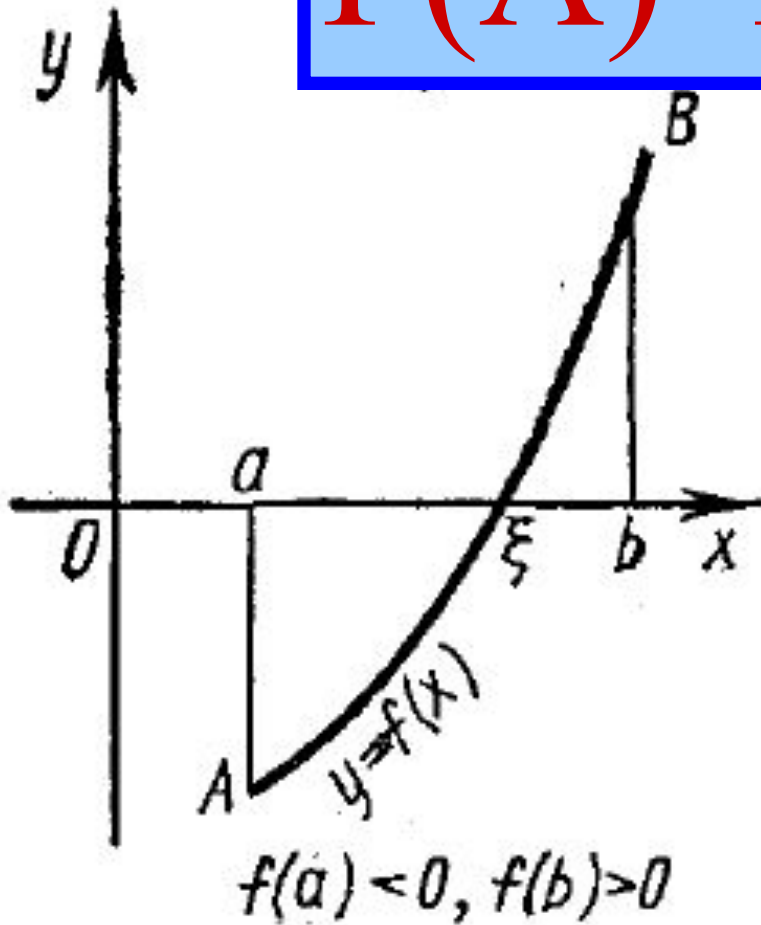


Рисунок 7