Приближенное значение величины

Абсолютная и относительная погрешности

Приближенным* *числом а
называется число,
незначительно отличающееся
от точного числа *А*
и заменяющее последнее
в вычислениях

Если $a < A$, то число a является приближенным значением числа A *по недостатку*;
если $a > A$ – приближенным значением *по избытку*

$$\Delta(a) = \left| A - a \right|$$

<u>Пример 1.</u> Пусть А = 784,2737, a, = 784,274. Найти абсолютную погрешность приближенного числа

Решение

$\Delta a = |A - a| =$

$|784{,}2737 — 784{,}274|$

$= 0{,}0003$

Ответ: 0,0003

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|}$$

Пример 5. Пусть при измерении книги и длины стола были получены результаты:

$l1 = 28{,}4 \pm 0{,}1$ (см) и

$l2 = 110{,}3 \pm 0{,}1$ (см).

Решение

$$\delta^*_{11} = 0{,}1(\text{см})/28{,}4(\text{см}) \approx 0{,}0035, \text{ или } 0{,}35\%;$$

$$\delta^*_{12} = 0{,}1(\text{см})/110{,}3(\text{см}) \approx 0{,}009, \text{ или } 0{,}09\%.$$

Ответ: измерение стола точнее

$$\overline{\Delta}(a), (\overline{\delta}(a)),$$

$$\boxed{\Delta(a) \leq \overline{\Delta}(a)}$$

$$\boxed{(\delta(a)) \leq (\overline{\delta}(a))}$$

Пример 8.

X	Δ_x	Y	Δ_y
$50^0 30' 10''$	$3''$	$45^0 15' 36''$	$2''$

Решение

$x = 181810'' \pm 3''$, $\delta_x = 3/181810 \approx 0{,}000017 = 0{,}0017\%$;

$y = 162936'' \pm 2''$, $\delta_y = 2/162936 \approx 0{,}000013 = 0{,}0013\%$.

Ответ: измерение y произведено более точно

Погрешности арифметических действий

Если $\boxed{\begin{array}{l} c=a+b, \\ c^{*}=a^{*}+b^{*} \end{array}}$ или $\boxed{\begin{array}{l} c=a-b, \\ c^{*}=a^{*}-b^{*}, \end{array}}$

то

$$\boxed{\Delta(c^{*}) \leq \Delta(a^{*}) + \Delta(b^{*})}$$

$$\boxed{\overline{\Delta}(c^{*}) = \overline{\Delta}(a^{*}) + \overline{\Delta}(b^{*})}$$

Если $\boxed{\begin{array}{l} u=ab, \\ u^*=a^*b^* \end{array}}$ или $\boxed{\begin{array}{l} v=a/b, \\ v^*=a^*/b^*, \end{array}}$

то

Вывод формулы:

$$\boxed{\Delta(v^*) \leq \frac{|b^*|\Delta(a^*) + |a^*|\Delta(b^*)}{(1-\delta(b^*))|b^*|^2}}$$

Относительные погрешности произведения и частного:

$$\delta\left(u^{*}\right) \leq \delta\left(a^{*}\right) + \delta\left(b^{*}\right) + \delta\left(a^{*}\right)\delta\left(b^{*}\right)$$

$$\delta\left(u^{*}\right) \leq \frac{\delta\left(a^{*}\right) + \delta\left(b^{*}\right)}{1 - \delta\left(b^{*}\right)}$$

Если u=ab, то

$$\boxed{\overline{\delta}(u^*) \approx \overline{\delta}(a^*) + \overline{\delta}(b^*)}$$

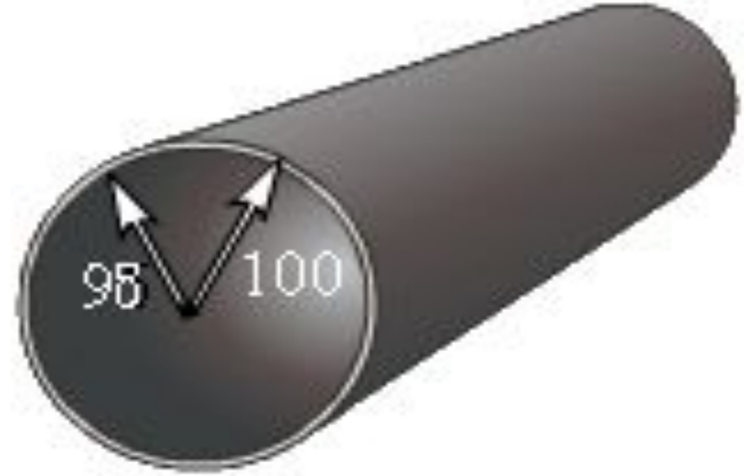
Если v=a/b, то

$$\boxed{\overline{\delta}(v^*) \approx \overline{\delta}(a^*) + \overline{\delta}(b^*)}$$

Пример 1

Вычислите сумму
и разность приближённых
чисел 0,123 и 0,526.
также равна 0,001.

Пример 2



Измерения цилиндрической полой изнутри трубы показали, что ее внешний радиус равен 100 см, а внутренний радиус – 98 см. Чему равна толщина стенок трубы?

Вычислите относительную погрешност произведенных расчетов.

Позиционная запись числа:

$$a^* = \pm a_n a_{n-1} \ldots a_0 , a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m}$$

или

$$\mathrm{a}^* = \pm \sum_{i=-m}^{n} a_j * 10^j$$

Первая слева цифра данного числа, отличная от нуля, и все расположенные за ней цифры называются значащими

Например, числа 25,047 и –0,00259 имеют соответственно 5 и 3 значащих цифры.

Цифра a_j называется **верной**,

если $\Delta(a^*) \le 10^j$, т.е.

абсолютная погрешность числа a*
не превосходит одной единицы
соответствующего разряда десятичного числа

Например, a*=0,03045 (a*)=0,000003
Последнюю верную цифру или все верные цифры
обычно подчеркивают

Правило.

За абсолютную погрешность приближенного числа с известными верными значащими цифрами принимается половина единицы того разряда, где находится последняя верная цифра.

Абсолютная и относительная погрешность вычисления функции одной переменной

Теорема. *Предельная абсолютная погрешность вычисления функции равна произведению абсолютной величины ее производной на предельную абсолютную погрешность аргумента.*

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+\frac{df(x)}{dx}\Delta x=f(x)+f'(x)\Delta x$$

$$\Delta y=\left|f'(x)\right|\cdot\left|\Delta x\right|$$

$$\delta y=\frac{\Delta y}{|y|}=\frac{\Delta y}{|f(x)|}=\frac{|f'(x)|}{|f(x^*)|}|\Delta x|=\left|x\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\delta x$$

где $$\Delta x=\delta x\cdot|x|$$

$$\delta y=\left|x\cdot\frac{d\ln f(x)}{dx}\right|\delta x$$

Абсолютная и относительная погрешность вычисления функции нескольких переменных

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\Delta y = \left| f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right|$$

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i}{\left| f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \{\ln f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}}{\partial x_i} x_i \right| \delta x_i$$

Итак, для оценки погрешности мы получили следующие простые правила:

- При сложении и вычитании *абсолютные* погрешности складываются;
- При умножении и делении *относительные* погрешности складываются;
- При возведении в степень относительные погрешности умножаются на абсолютную величину показателя степени;

Приближенные решения алгебраических и трансцендентных уравнений

План лекции

1. Алгебраические и трансцендентные уравнения

2. Графический метод решения уравнений

3. Отделение корней

$$\boxed{\varphi(x)=g(x)} \qquad (1)$$

$$\boxed{f(x)=0} \qquad (2)$$

$\xi \in [a,b]$ - корень уравнения, если $f(\xi)=0$

$x - 10\sin x = 0$

$2^x - 2\cos x = 0$

$\lg(x + 5) = \cos x$

✍ Решить уравнение – это значит:

- установить, имеет ли оно корни,
- сколько корней,
- и найти значение корней с заданной точностью

✍Задача численного нахождения корней уравнения состоит из двух этапов:

- отделение корней
- уточнение корней

Графический метод решения уравнений

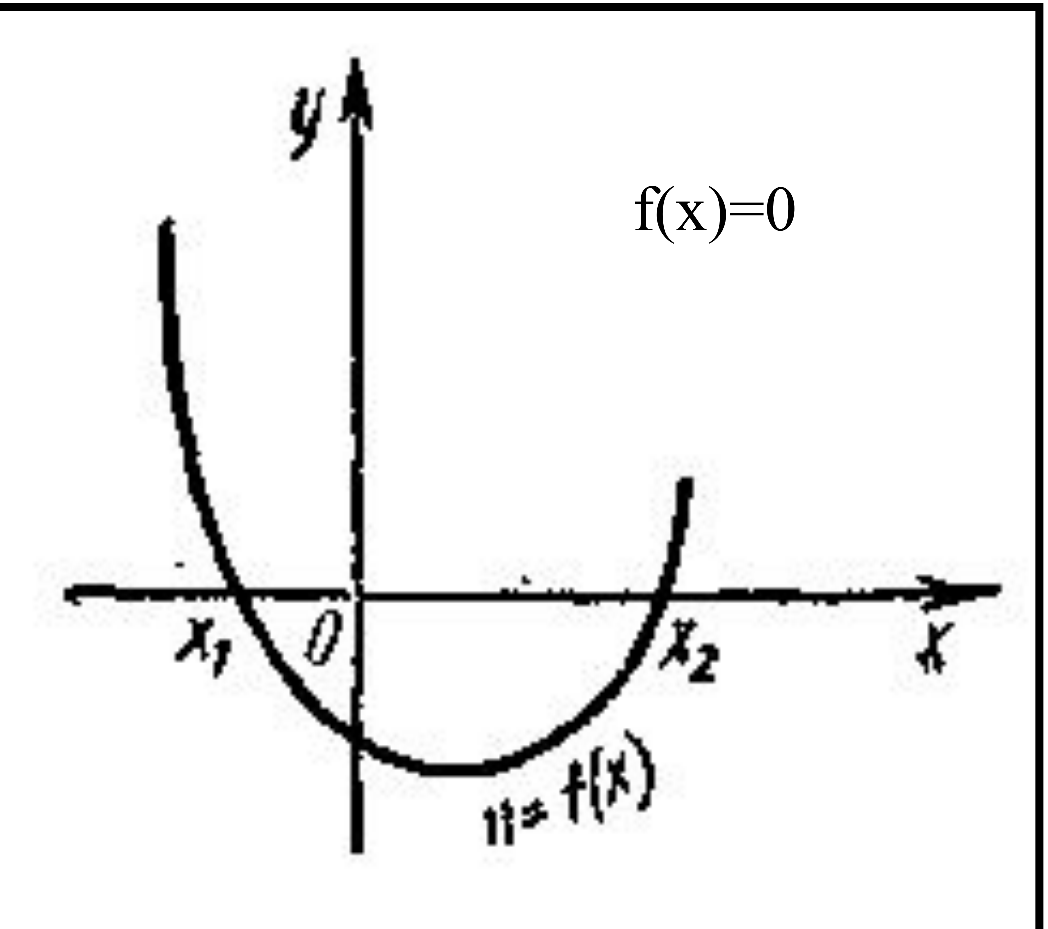


Рисунок 1

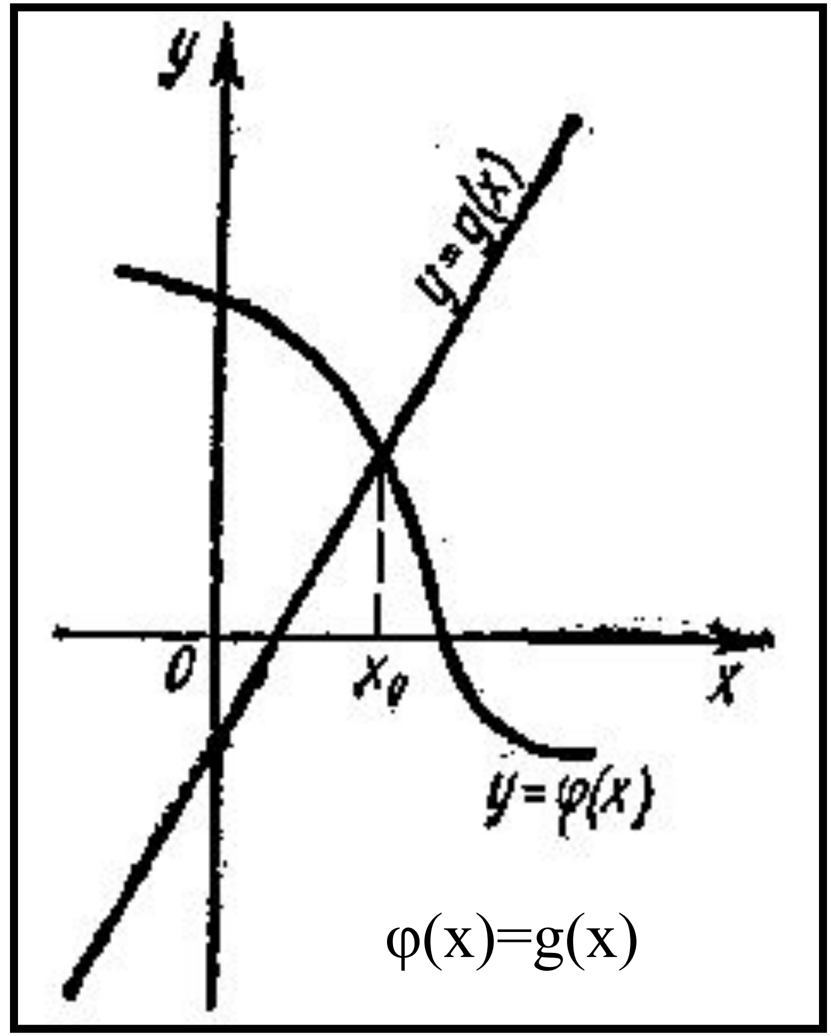


Рисунок 2

<u>Пример 1.</u>

Решить графически уравнение $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

Первый способ.

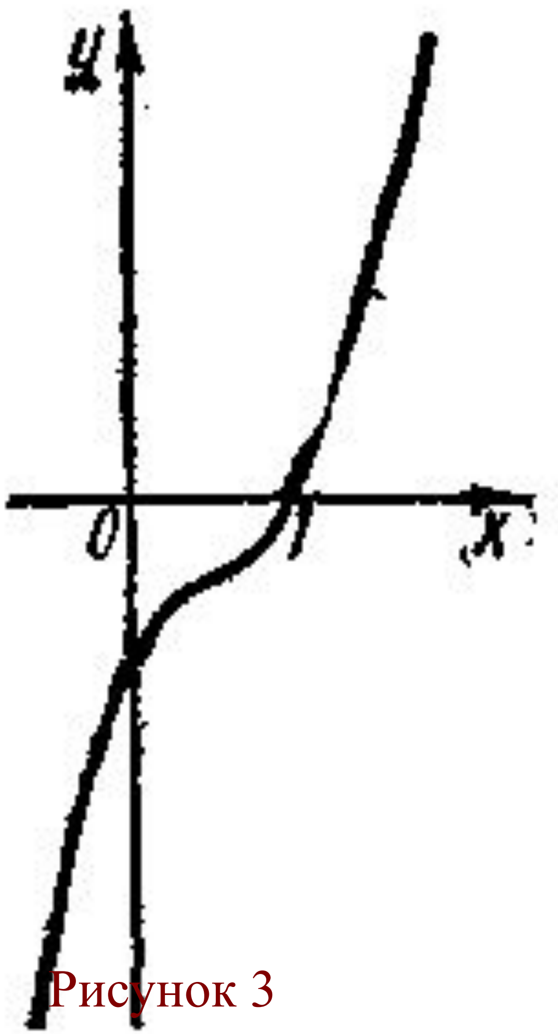


Рисунок 3

Второй способ.

$$x^3 = 2x^2 + 2x - 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = x^3 \\ y = 2x^2 + 2x - 1 \end{array}}$$

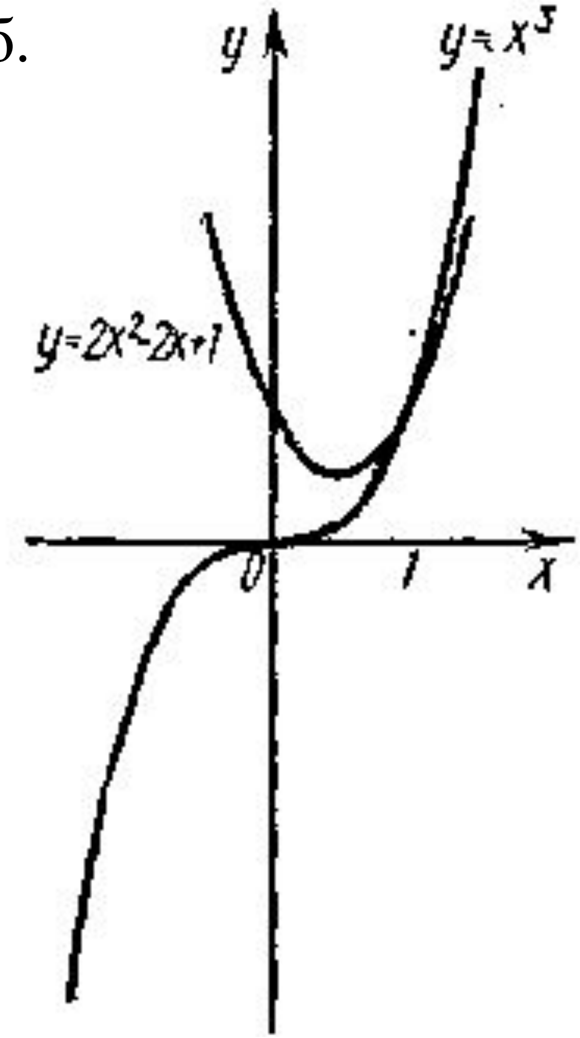


Рисунок 4

Пример 2. Решить уравнение lg x - 3x + 5 = 0 .

Второй способ.

$$\lg x = 3x - 5$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \lg x \\ y &= 3x - 5 \end{aligned}}$$

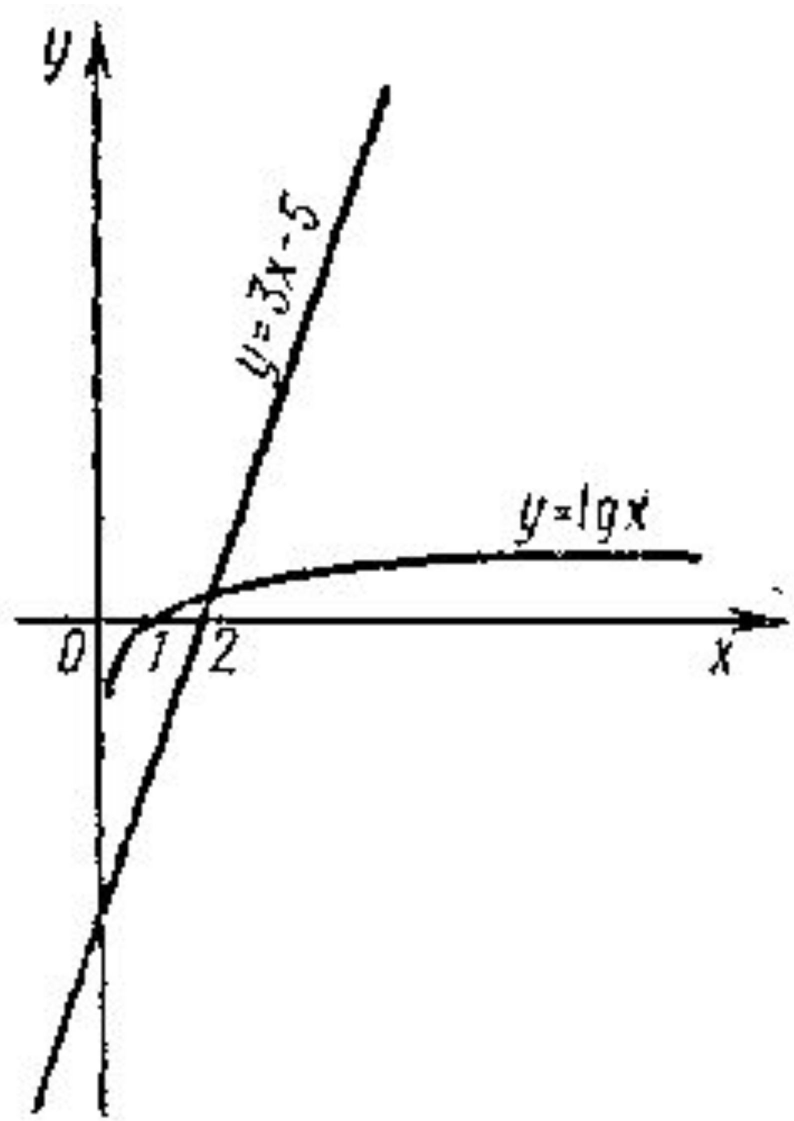


Рисунок 5

Ответ: $x \approx 0{,}00001$ и $x \approx 1{,}75$

<u>Пример 3.</u> Решить уравнение $2^x = 2x$.

$y = 2^x$
$y = 2x$

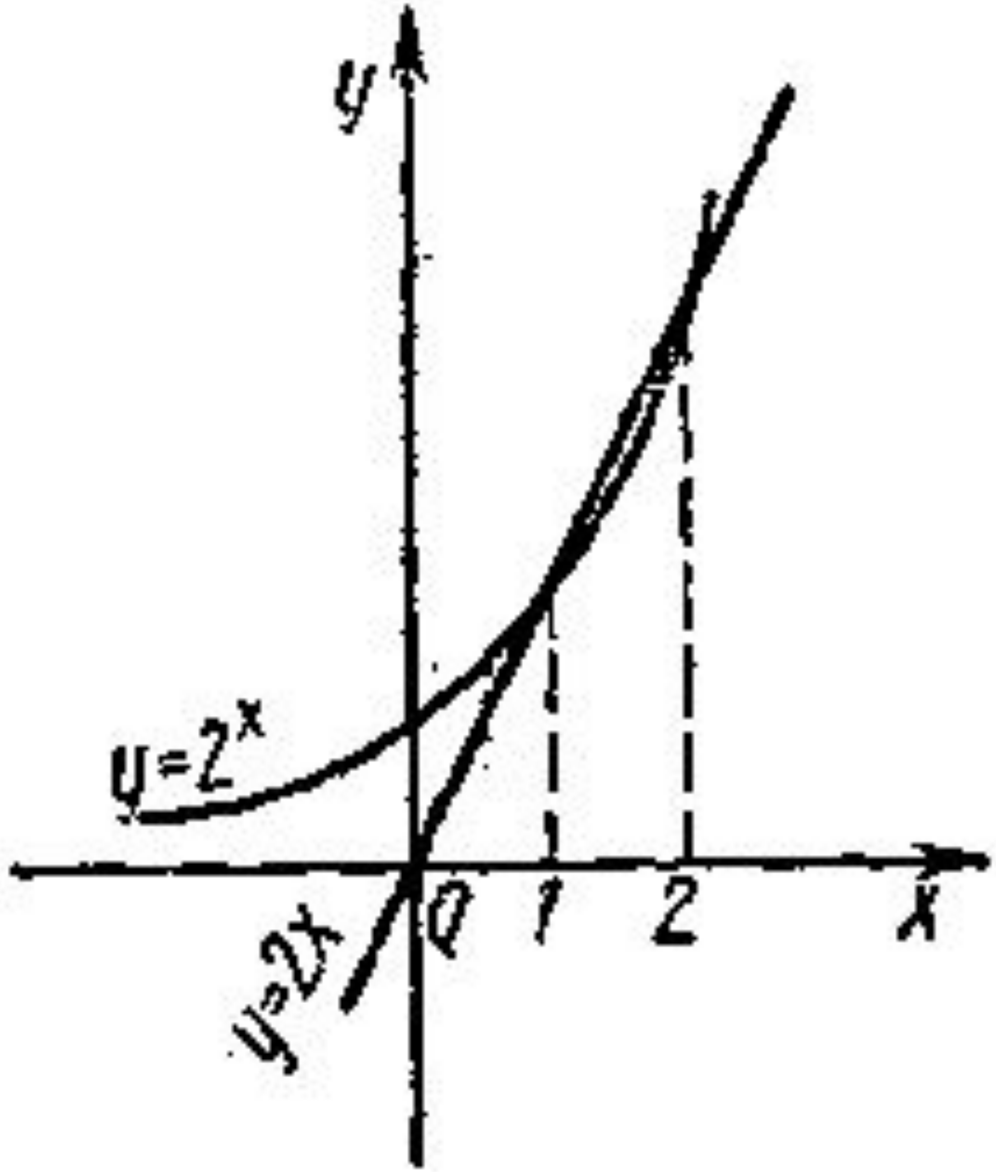


Рисунок 6

Ответ: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$

Отделение корней

✍Корень ξ уравнения $f(x) = 0$ считается *отделенным* на отрезке $[a,b]$, если на этом отрезке уравнение $f(x) = 0$ не имеет других корней

Аналитический метод отделения корней

1) Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция *F(x)* принимает на его концах значения разных знаков, то уравнение

F(x)=0

имеет на этом отрезке, по меньшей мере, один корень

2) Если функция F(x) к тому же еще и строго монотонна, то корень на отрезке $[a,b]$ единственный

$F(A)*F(B)<0$

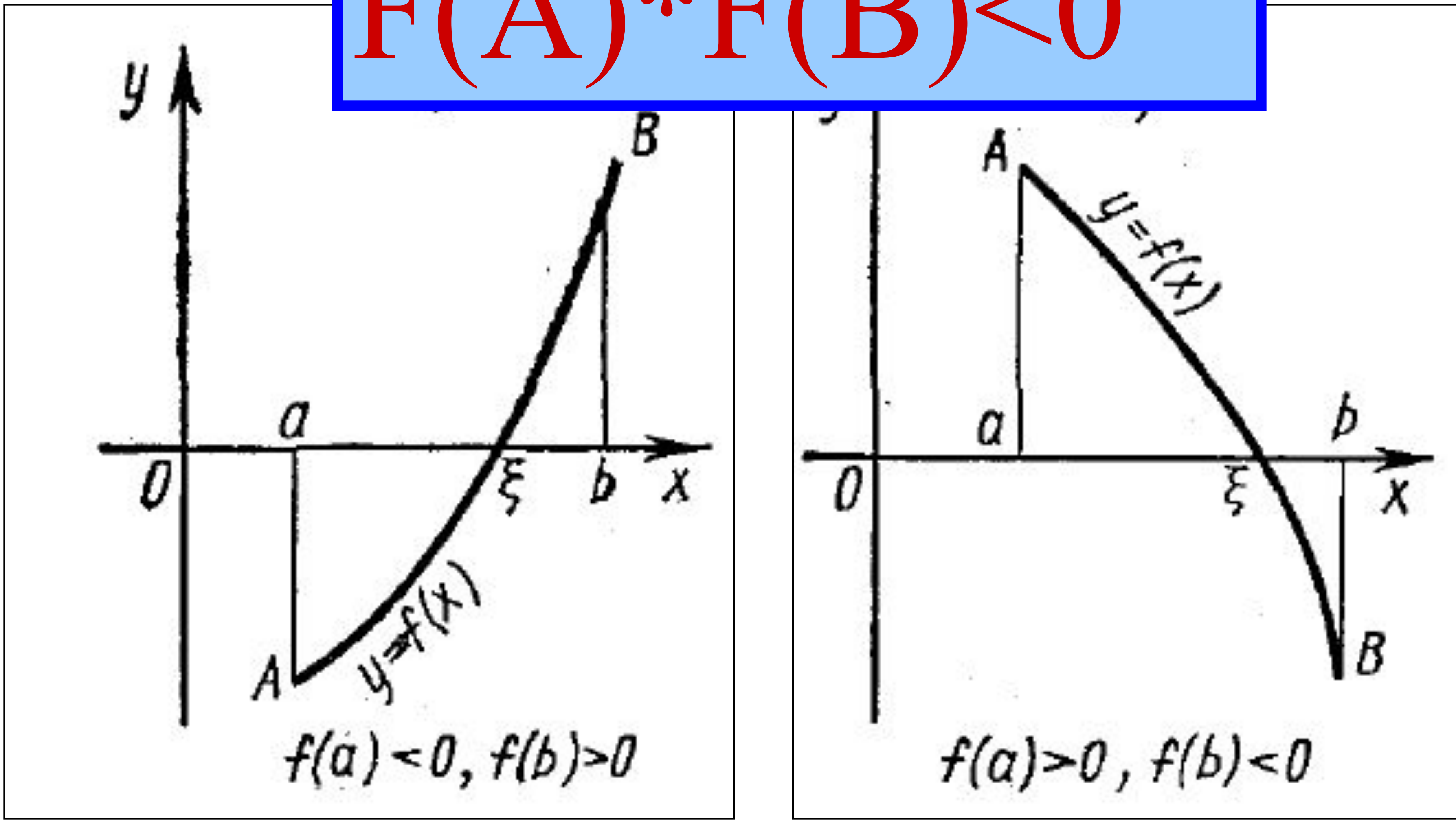


Рисунок 7