

Приближенные формулы в схеме Бернулли

Локальная формула Муавра-Лапласа

- Если $npq \geq 10$, то

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $p \neq 0; p \neq 1; p \rightarrow 0,5; x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$

Свойства функции $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Четная $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
2. При $x \geq 5, \varphi(x) \rightarrow 0$

Формула Пуассона

- Если $npq < 10$ и $p < 0,1$, то

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$

Интегральная формула Муавра-Лапласа

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства функции Лапласа $\Phi(x)$

1. Нечетная $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2. Возрастающая.

3. При $x \geq 5, \Phi(x) \rightarrow \frac{1}{2}$

Таблицы значений

- Функции $\varphi(x)$
http://natalymath.narod.ru/plotnost_norm_rasp.html
- Распределения Пуассона
<http://natalymath.narod.ru/puasson.html>
- Функции $\Phi(x)$
<http://natalymath.narod.ru/laplas.html>

Задача 1

- Известно, 80% специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек высшее образование имеет:
- а) 70 человек,
- б) от 65 до 90 человек.

Решение

$$\text{a) } npq = 100 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 16 \geq 10$$

Применяем локальную формулу Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{-10}{4} = -2,5$$

$$P_{100}(70) \approx \frac{1}{\sqrt{16}} \cdot 0,0175 \approx 0,0044$$

Решение

- б) Применяем интегральную формулу Муавра - Лапласа

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{65 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{-15}{4} = -3,75,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$P_{100}(65 \leq k \leq 90) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-3,75) \approx 0,49379 + 0,49991 \approx 0,9937$$

Задача 2

- Вероятность того, что при сортировке изделий одно из них будет разбито, равна 0,005. Найти вероятность того, что из 200 изделий окажутся разбитыми:
- а) три изделия,
- б) не более двух,
- в) не менее двух

Решение

$$npq = 200 \cdot 0,005 \cdot 0,995 = 0,995 < 10$$

$$p < 0,1$$

Применяем формулу Пуассона, где $\lambda = np = 200 \cdot 0,005 = 1$

а) при $k=3$:

$$P_{200}(3) \approx \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0,06$$

б) при $k \leq 2$ $P_{200}(0 \leq k \leq 2) \approx P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) \approx$

$$\approx \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} + \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} + \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}(1 + 1 + 0,5) \approx 0,93$$

в) при $k \geq 2$ $P_{200}(2 \leq k \leq 200) = 1 - P_{200}(0 \leq k \leq 1) = 1 - P_{200}(0) - P_{200}(1) \approx$

$$\approx 1 - \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} - \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}(1 + 1) \approx 0,26$$