Донецкий Национальный Технический Университет

Факультет Вычислительной Техники

Кафедра Прикладной Математики и Информатики

Специальность «Программное обеспечение автоматизированных систем»

Метод Гаусса решения СЛАУ. Модификации. Варианты распараллеливания

Докладчик: Кожухов А.Е.

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Задание СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + & \ldots & + a_{1n} \cdot x_n = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + & \ldots & + a_{2n} \cdot x_n = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + & \ldots & + a_{nn} \cdot x_n = & b_n \end{cases}$$

или

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Задание СЛАУ

При матричном задании СЛАУ имеют место обозначения:

- A – матрица коэффициентов системы;
- b – вектор свободных членов уравнений системы;
- x – вектор неизвестных величин системы.

Задачи, сводимые к решению СЛАУ

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводимы задачи из многих областей физики:

- электромагнитной теории;
- электродинамики;
- теплопередачи;
- диффузии;
- квантовой механики.

Задачи, сводимые к решению СЛАУ

Особенности постановки задач:

- ✔ являются конечно–разностными или конечно–элементными моделями;
- ✔ задаются дифференциальными уравнениями с начальными или краевыми условиями.

Классы методов решения СЛАУ

Прямые методы:

а) метод Холесского для плотных матриц;
б) метод Холесского для ленточных матриц;
в) метод вычисления явного обращение матриц;
г) метод Холесского для разреженных матриц;
д) метод быстрого преобразования Фурье;
е) метод блочно–циклической редукции;
ж) метод исключения Гаусса.

Классы методов решения СЛАУ

Итерационные методы:

а) метод Якоби;

б) метод Гаусса–Зейделя;

в) метод сопряжённых градиентов;

г) метод последовательной верхней релаксации;

д) метод ускорения Чебышева с симметричной последовательной верхней релаксации;

е) многосеточный метод.

МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ГАУССА

Шаг прямого хода

Деление коэффициентов текущего уравнения на коэффициент при исключаемой переменной:

$$a_{11}x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1j}\cdot x_j + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}\cdot x_2 + \ldots + c_{1j}\cdot x_j + \ldots + c_{1n}\cdot x_n = y_1 \\ c_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}, \forall j = \overline{2,n} \\ y_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \end{cases}$$

Шаг прямого хода

Для всех уравнений со 2–ого по n–ое выполнить действия:

- умножение обеих частей 1–ого уравнения на взятый с
  обратным знаком коэффициент при первом члене текущего уравнения;
- сложение результатов предыдущей операции с коэффициентами и свободным членом текущего уравнения.

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}\cdot x_2 + \ldots + c_{1j}\cdot x_j + \ldots + c_{1n}\cdot x_n = y_1 \\ 0x_1 + a_{22}^{(1)}\cdot x_2 + \ldots + a_{2j}^{(1)}\cdot x_j + \ldots + a_{2n}^{(1)}\cdot x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots \\ 0x_1 + a_{n2}^{(1)}\cdot x_2 + \ldots + a_{nj}^{(1)}\cdot x_j + \ldots + a_{nn}^{(1)}\cdot x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Шаг прямого хода

Из уравнений со 2–ого по n–ое можно составить эквивалентную исходной систему уравнений, но с количеством неизвестных (n–1).

На k–ом шаге рассматривается система из (n–k+1) уравнений с (n–k+1) неизвестными. Выполнив очередной шаг метода Гаусса по отношению к этой системе уравнений, получим систему с (n–k+1).

После выполнения n шагов метода Гаусса матрица коэффициентов системы уравнений будет верхней треугольной

Результат выполнения прямого хода метода Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \ldots + c_{1j} \cdot x_j + \ldots + c_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ x_2 + c_{23} \cdot x_3 + \ldots + c_{2n} \cdot x_n = y_2 \\ \ldots \\ x_{n-1} + c_{n-1,n} \cdot x_n = y_{n-1} \\ x_n = y_n \end{cases}$$

Обратный ход метода Гаусса – вычисление значений переменных, начиная с x_n до x_1.

МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ГАУССА

Метод Гаусса в матричной форме

Пусть задана исходная система уравнений. Тогда на исключение неизвестной x_i из уравнений системы осуществляется следующим образом:

- умножением матрицы коэффициентов $A^{(i)}$ слева на диагональную матрицу D_i;
- умножением $D_i * A^{(i)}$ слева на матрицу Q_i.

Метод Гаусса в матричной форме

$$D_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots & \ldots & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots & \ldots & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 \ldots 1 & \!\!\!/ a_{ii}^{(i)} & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \ldots 1 \end{bmatrix} \qquad Q_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots 0 \ldots 0 \\ -a_{21}^{(i)} & 1 \ldots\ldots 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{i1}^{(i)} & 0 \ldots 0 \; 0 \ldots 0 \\ -a_{i+1,1}^{(i)} & 0 \ldots 0 \; 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{n1}^{(i)} & 0 \ldots 0 \; 0 \ldots 1 \end{bmatrix}$$

Метод Гаусса в матричной форме

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1/a_{ii}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -a_{i+1,i}^{(i)}/a_{ii}^{(i)} & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -a_{ni}^{(i)}/a_{ii}^{(i)} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Метод Гаусса в матричной форме

Осуществление i–ого шага метода Гаусса в матричной форме имеет вид: $L_1 * A^{(i)} x = L_1 * b^{(i)}$.

Полная последовательность операций матричного умножения по исключению переменных имеет вид: $L_i*\ldots*L_2*L_1 * A * x = L_i*\ldots*L_2*L_1 * b$.

Произведение $U = L_n*\ldots*L_2*L_1 * A$ является верхней треугольной матрицей с единичной главной диагональю. Произведение $L = L^{-1}{}_1*L^{-1}{}_2*\ldots*L^{-1}{}_n$ является нижней треугольной матрицей.