

Донецкий Национальный Технический Университет

Факультет Вычислительной Техники

Кафедра Прикладной Математики и Информатики

Специальность «Программное обеспечение  
автоматизированных систем»

Метод Гаусса решения СЛАУ.  
Модификации.  
Варианты распараллеливания

Докладчик: Кожухов А.Е.

# ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

# Задание СЛАУ

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{array} \right.$$

ИЛИ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

# Задание СЛАУ

При матричном задании СЛАУ имеют место обозначения:

- $A$  – матрица коэффициентов системы;
- $b$  – вектор свободных членов уравнений системы;
- $x$  – вектор неизвестных величин системы.

# Задачи, сводимые к решению СЛАУ

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводимы задачи из многих областей физики:

- □ электромагнитной теории;
- электродинамики;
- теплопередачи;
- диффузии;
- квантовой механики.

# Задачи, сводимые к решению СЛАУ

Особенности постановки задач:

- ✓ являются конечно–разностными или конечно–элементными моделями;
- ✓ задаются дифференциальными уравнениями с начальными или краевыми условиями.

# Классы методов решения СЛАУ

## Прямые методы:

- а) метод Холесского для плотных матриц;
- б) метод Холесского для ленточных матриц;
- в) метод вычисления явного обращения матриц;
- г) метод Холесского для разреженных матриц;
- д) метод быстрого преобразования Фурье;
- е) метод блочно–циклической редукции;
- ж) метод исключения Гаусса.

# Классы методов решения СЛАУ

## Итерационные методы:

- а) метод Якоби;
- б) метод Гаусса–Зейделя;
- в) метод сопряжённых градиентов;
- г) метод последовательной верхней релаксации;
- д) метод ускорения Чебышева с симметричной последовательной верхней релаксации;
- е) многосеточный метод.

# МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ГАУССА

# Шаг прямого хода

Деление коэффициентов текущего уравнения на коэффициент при исключаемой переменной:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1j} \cdot x_j + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \Rightarrow \\ x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1j} \cdot x_j + \dots + c_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \forall j = \overline{2, n} \\ y_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \end{cases}$$

# Шаг прямого хода

Для всех уравнений со 2-ого по n-ое выполнить действия:

- умножение обеих частей 1-ого уравнения на взятый с обратным знаком коэффициент при первом члене текущего уравнения;
- сложение результатов предыдущей операции с коэффициентами и свободным членом текущего уравнения.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1j} \cdot x_j + \dots + c_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ 0x_1 + a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{2j}^{(1)} \cdot x_j + \dots + a_{2n}^{(1)} \cdot x_n = b_2^{(1)} \\ \dots \\ 0x_1 + a_{n2}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{nj}^{(1)} \cdot x_j + \dots + a_{nn}^{(1)} \cdot x_n = b_n^{(1)} \end{array} \right.$$

# Шаг прямого хода

Из уравнений со 2-ого по  $n$ -ое можно составить эквивалентную исходной систему уравнений, но с количеством неизвестных  $(n-1)$ .

На  $k$ -ом шаге рассматривается система из  $(n-k+1)$  уравнений с  $(n-k+1)$  неизвестными. Выполнив очередной шаг метода Гаусса по отношению к этой системе уравнений, получим систему с  $(n-k+1)$ .

После выполнения  $n$  шагов метода Гаусса матрица коэффициентов системы уравнений будет верхней треугольной



**Обратный ход метода Гаусса –  
вычисление значений переменных,  
начиная с  $x_n$  до  $x_1$ .**

# МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ГАУССА

# Метод Гаусса в матричной форме

Пусть задана исходная система уравнений. Тогда на исключение неизвестной  $x_i$  из уравнений системы осуществляется следующим образом:

- умножением матрицы коэффициентов  $A^{(i)}$  слева на диагональную матрицу  $D_i$ ;
- умножением  $D_i * A^{(i)}$  слева на матрицу  $Q_i$ .

# Метод Гаусса в матричной форме

$$D_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots & \dots & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots & \dots & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 1/a_{ii}^{(i)} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots \dots 0 \dots 0 \\ -a_{21}^{(i)} & 1 \dots \dots 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ -a_{i1}^{(i)} & 0 \dots 0 0 \dots 0 \\ -a_{i+1,1}^{(i)} & 0 \dots 0 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ -a_{n1}^{(i)} & 0 \dots 0 0 \dots 1 \end{bmatrix}$$

# Метод Гаусса в матричной форме

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1/a_{ii}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots & -a_{i+1,i}^{(i)} / a_{ii}^{(i)} & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & -a_{ni}^{(i)} / a_{ii}^{(i)} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Метод Гаусса в матричной форме

Осуществление  $i$ -ого шага метода Гаусса в матричной форме имеет вид:  $L_1^{(i)} * A^{(i)} x = L_1^{(i)} * b^{(i)}$ .

Полная последовательность операций матричного умножения по исключению переменных имеет вид:  $L_i * \dots * L_2 * L_1 * A * x = L_i * \dots * L_2 * L_1 * b$ .

Произведение  $U = L_n * \dots * L_2 * L_1 * A$  является верхней треугольной матрицей с единичной главной диагональю. Произведение  $L = L_1^{-1} * L_2^{-1} * \dots * L_n^{-1}$  является нижней треугольной матрицей.