

Донецкий Национальный Технический Университет

Факультет Вычислительной Техники

Кафедра Прикладной Математики и Информатики

Специальность «Программное обеспечение
автоматизированных систем»

Метод Гаусса решения СЛАУ.
Модификации.
Варианты распараллеливания

Докладчик: Кожухов А.Е.

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Задание СЛАУ

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{array} \right.$$

ИЛИ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Задание СЛАУ

При матричном задании СЛАУ имеют место обозначения:

- A – матрица коэффициентов системы;
- b – вектор свободных членов уравнений системы;
- x – вектор неизвестных величин системы.

Задачи, сводимые к решению СЛАУ

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводимы задачи из многих областей физики:

- □ электромагнитной теории;
- электродинамики;
- теплопередачи;
- диффузии;
- квантовой механики.

Задачи, сводимые к решению СЛАУ

Особенности постановки задач:

- ✓ являются конечно–разностными или конечно–элементными моделями;
- ✓ задаются дифференциальными уравнениями с начальными или краевыми условиями.

Классы методов решения СЛАУ

Прямые методы:

- а) метод Холесского для плотных матриц;
- б) метод Холесского для ленточных матриц;
- в) метод вычисления явного обращения матриц;
- г) метод Холесского для разреженных матриц;
- д) метод быстрого преобразования Фурье;
- е) метод блочно–циклической редукции;
- ж) метод исключения Гаусса.

Классы методов решения СЛАУ

Итерационные методы:

- а) метод Якоби;
- б) метод Гаусса–Зейделя;
- в) метод сопряжённых градиентов;
- г) метод последовательной верхней релаксации;
- д) метод ускорения Чебышева с симметричной последовательной верхней релаксации;
- е) многосеточный метод.

МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ГАУССА

Шаг прямого хода

Деление коэффициентов текущего уравнения на коэффициент при исключаемой переменной:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1j} \cdot x_j + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \Rightarrow \\ x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1j} \cdot x_j + \dots + c_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \forall j = \overline{2, n} \\ y_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \end{cases}$$

Шаг прямого хода

Для всех уравнений со 2-ого по n-ое выполнить действия:

- умножение обеих частей 1-ого уравнения на взятый с обратным знаком коэффициент при первом члене текущего уравнения;
- сложение результатов предыдущей операции с коэффициентами и свободным членом текущего уравнения.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1j} \cdot x_j + \dots + c_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ 0x_1 + a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{2j}^{(1)} \cdot x_j + \dots + a_{2n}^{(1)} \cdot x_n = b_2^{(1)} \\ \dots \\ 0x_1 + a_{n2}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{nj}^{(1)} \cdot x_j + \dots + a_{nn}^{(1)} \cdot x_n = b_n^{(1)} \end{array} \right.$$

Шаг прямого хода

Из уравнений со 2-ого по n -ое можно составить эквивалентную исходной систему уравнений, но с количеством неизвестных $(n-1)$.

На k -ом шаге рассматривается система из $(n-k+1)$ уравнений с $(n-k+1)$ неизвестными. Выполнив очередной шаг метода Гаусса по отношению к этой системе уравнений, получим систему с $(n-k+1)$.

После выполнения n шагов метода Гаусса матрица коэффициентов системы уравнений будет верхней треугольной

Результат выполнения прямого хода метода Гаусса

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1j} \cdot x_j + \dots + c_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ x_2 + c_{23} \cdot x_3 + \dots + c_{2n} \cdot x_n = y_2 \\ \dots \\ x_{n-1} + c_{n-1,n} \cdot x_n = y_{n-1} \\ x_n = y_n \end{array} \right.$$

**Обратный ход метода Гаусса –
вычисление значений переменных,
начиная с x_n до x_1 .**

МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ГАУССА

Метод Гаусса в матричной форме

Пусть задана исходная система уравнений. Тогда на исключение неизвестной x_i из уравнений системы осуществляется следующим образом:

- умножением матрицы коэффициентов $A^{(i)}$ слева на диагональную матрицу D_i ;
- умножением $D_i * A^{(i)}$ слева на матрицу Q_i .

Метод Гаусса в матричной форме

$$D_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots & \dots & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots & \dots & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 1/a_{ii}^{(i)} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots \dots 0 \dots 0 \\ -a_{21}^{(i)} & 1 \dots \dots 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ -a_{i1}^{(i)} & 0 \dots 0 0 \dots 0 \\ -a_{i+1,1}^{(i)} & 0 \dots 0 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ -a_{n1}^{(i)} & 0 \dots 0 0 \dots 1 \end{bmatrix}$$

Метод Гаусса в матричной форме

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1/a_{ii}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots & -a_{i+1,i}^{(i)} / a_{ii}^{(i)} & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & -a_{ni}^{(i)} / a_{ii}^{(i)} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Метод Гаусса в матричной форме

Осуществление i -ого шага метода Гаусса в матричной форме имеет вид: $L_1^{(i)} * A^{(i)} x = L_1^{(i)} * b^{(i)}$.

Полная последовательность операций матричного умножения по исключению переменных имеет вид: $L_i * \dots * L_2 * L_1 * A * x = L_i * \dots * L_2 * L_1 * b$.

Произведение $U = L_n * \dots * L_2 * L_1 * A$ является верхней треугольной матрицей с единичной главной диагональю. Произведение $L = L_1^{-1} * L_2^{-1} * \dots * L_n^{-1}$ является нижней треугольной матрицей.