Применение элементов математического анализа при решении задач

(по материалам ЕГЭ – 2010-2011)

Цели урока

- Учиться <u>проводить анализ условия задачи</u>, что помогает поиску способа решения;

- Учиться <u>переводить</u> язык задачи на язык производной или первообразной;

- Учиться <u>выстраивать цепочку логических рассуждений</u> при переходе от языка функции к языку геометрии или механики

Задачи на применение элементов математического анализа

- Задачи на применение производной
  - Задачи на геометриче-ский и физический смысл производной
  - Задачи на исследование монотонности, экстремумов, нахождение наибольшего и наименьшего значения, на оптимизацию
- Задачи на применение первообразной
  - Задачи на вычисление площадей фигур
  - Задачи на применение физического смысла первообразной

Задачи на применение производной

1. Задачи, в условии которых задана функция (аналитически или графически)

2. Задачи, в условии которых задан график производной

Базовые умения.

1. **Что можно найти, зная формулу задания функции?**
2. **Что можно найти, зная формулу задания производной?**
3. **Что можно найти, если известно значение производной в точке?**

Функция	$f'(x)$	x_0	$f'(x_0)$	$f'(x_0)=k=tg\alpha$	$s'(t_0)=v(t_0)$

ЗАДАНИЕ 1

1а) Выполните анализ условия задачи и наметьте план её решения: *Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 5x^2+7x+2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.*

…Найдите угловой коэффициент касательной к графику первообразной функции F(x) функции f(x) = … в точке абсциссой …

Функция	f'(x)	x_0	$f'(x_0)$	$f'(x_0)=k=tg\alpha$
$f(x)=5x^2+7x+2$	1	2	2	3

1б) Составьте задачу с другими числовыми данными, которая решается по плану: $f'(x)$, $f'(x_0)$, $k= f'(x_0)$.

1. Что известно по условию задачи?
2. Как задана функция?
3. Что еще известно?
4. Что нужно найти?
5. Как находят тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику заданной функции в заданной точке?

1в) Сформулируйте задачу, обратную 1а) и составьте план её решения:

Найдите абсциссу точки касания, если тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = 5x^2+7x+2$ равен 27

Функция	f'(x)	x_0	$f'(x_0)$	$f'(x_0)=k=tg\alpha$	
$f(x)=5x^2+7x+2$	1	3	$f'(x_0) = 27$ 2	27	

ЗАДАНИЕ 2

Прочитайте задачу: ***В точке А графика функции $y = 5x^3+4x+1$ проведена касательная к нему, параллельная прямой $y = 4x + 3$. Найдите сумму координат точки А.***

Обоснуйте следующий план решения задачи: ***к =4; f'(x); f'(x_0) = 4; x_0 из уравнения; ответ на вопрос задачи.***

ЗАДАНИЕ 3

Ответьте на вопросы анализа условия задачи на физический смысл производной: ***точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^3/3 - 2t^2+3t - 15$ (s- расстояние в см, t – время в секундах, прошедшее с момента движения). Определите скорость и ускорение точки через 3 с после начала движения.***

1. **Что известно по условию задачи?(функция)**
2. **Как задана функция?(формулой)**
3. **Что еще известно?(x_0)**
4. **Что нужно найти?(к, tgα)**
5. **Как находят тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику заданной функции в заданной точке?**

Закон движения	S(t)	t_0	$V(t_0) = S'(t_0)$	$a(t_0) = v'(t_0)$

1. ***Что известно из условия задачи?***
2. ***Как задана функция?***
3. ***Что ещё известно?***
4. ***Что нужно найти?***

Задачи, в условии которых функция задана графически

Базовые умения.

1. Что можно найти по графику функции и касательной к этому графику в точке x_0?
2. Что такое угловой коэффициент касательной к графику функции?

Способы вычисления угла наклона касательной к графику функции по графику касательной

Угловой коэффициент касательной к графику функции k

tgα – тангенс угла наклона касательной с положительным направлением оси Ox

Коэффициент k в уравнении касательной вида y = kx +b tgα – тангенс угла наклона касательной с положительным направлением оси Ох

Коэффициент k в уравнении касательной вида y = kx +b

1.Прямоугольный треугольник
А). Если угол наклона касательной к графику функции тупой, то находят тангенс угла , смежного с рассматриваемым углом. Используют фо

$tg(180^0 – \alpha) = - tg\alpha$

Б) Если угол острый, то тангенс угла находят как отношение противолежащего катета к прилежащему

1. Координаты двух любых «удобных» точек.
2. Подставляя координаты выбранных точек в уравнение вида y = kx +b, составляют систему и из неё находят k.

Задание 4

Составьте план решения задачи 1-м способом: ***На рис. 36 представлен график движения тела, и касательная к графику в момент времени t = 5. определите по графику скорость движения тела (в км/ч) в этот момент времени***

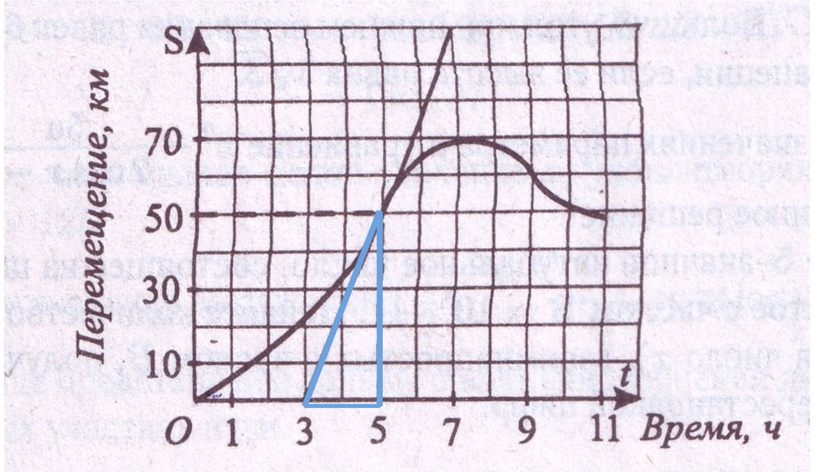


Рис. 36.

1. **Вывод:** $\vartheta(t) = k$
2. По виду угла наклона касательной определим знак k.
3. Выделим «удобный» прямоугольный треугольник. Из него найдем тангенс острого угла (Помним! $tg(180^0 - \alpha) = -tg\alpha$).
4. Найдем тангенс острого угла как отношение противолежащего катета к прилежащему.
5. Ответим на вопрос задачи.

Решите задачу 2-м способом и сравните свои решения.

2. Задачи, в условии которых задан график производной

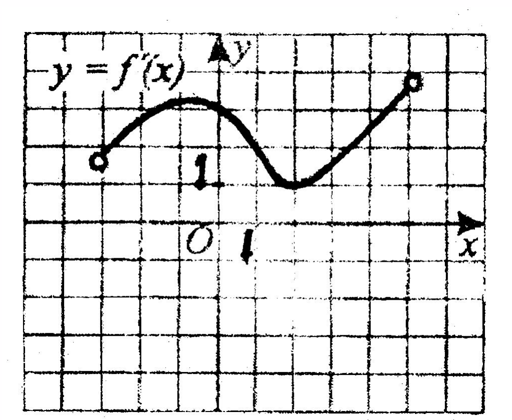
Базовые умения.

1. Что можно найти, зная график производной?
2. Что можно найти, зная значение производной в точке; как это сделать?

Функцияf(x) (-3;5)	f'(x) График	x_0 2	$f'(x_0)$ 1	$f'(x_0)=k=tg\alpha$ tgα =1	α ?	$s'(t_0)=\vartheta(t_0)$

Задание 5

Функция f(x)определена на промежутке (-3;5). На рис.изображен график ее производной. Найдите угол наклона касательной, проведенной к графику функции y = f(x), к положительному направлению оси Ох в точке с абсциссой x_0=2. Ответ укажите в градусах.



$tg\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^0$

Функция y=f(x)определена на промежутке (-3;5). На рис.изображен график ее производной. Найдите угол наклона касательной, проведенной к графику функции y = f(x), к положительному направлению оси Ox в точке с абсциссой x_0=2. Ответ укажите в градусах

Сравните условие рассмотренной задачи с условием следующей задачи:

Функция y = f(x) определена на промежутке (-5;5). На рис.изображен график ее производной. К графику функции y =f(x) провели касательные во всех точках, абсциссы которых –положительные целые числа. Укажите количество точек графика функции, в которых проведенные касательные имеют отрицательный угловой коэффициент.

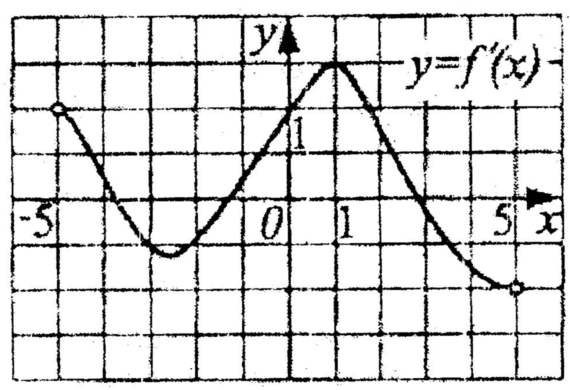


Рис. 178.

Функция у = f(x) определена на промежутке (-5;5). На рис.изображен график ее производной. К графику функции у =f(x) провели касательные во всех точках, абсциссы которых –положительные целые числа. Укажите количество точек графика функции, в которых проведенные касательные имеют отрицательный угловой коэффициент.

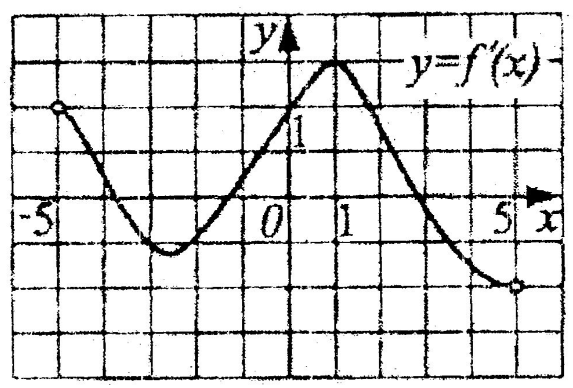


Рис. 178.

Дано	**D(f) =(-5;5)** **f′(x) – график** **Условие:X_0 – все положительные целые числа, k > 0**
Найти	**Количество касательных, удовлетворяющих условию?**

План решения.

1. Из D(f) =(-5;5) выбрать положительные целые абсциссы.

2. По графику определить знак производной в этих точках.

3. Ответить на вопрос задачи.

Функция y = f(x) определена на промежутке (-3;5). На рис.изображен график ее производной. Укажите количество точек графика функции, в которых касательные наклонены под углом 150^0 к положительному направлению оси абсцисс.

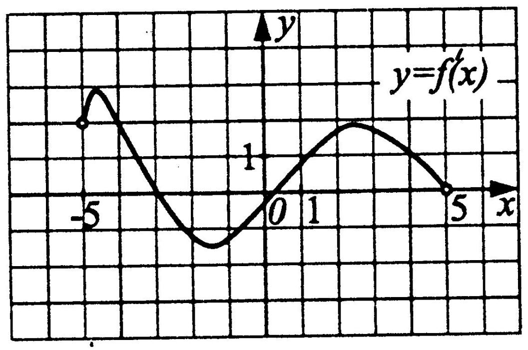


Рис. 177.

Дано	**α ∈ (0;π/2),если cosα =5/13**
Найти	**Количество касательных**

$\alpha = 150^0$, tg α < 0, k<0, f'(x_0)<0. Чтобы ответить на вопрос задачи …

Используем метод оценки: **tg 45^0< tg50^0 < tg 60^0, 1<tg50^0<√3**

Найти значение тангенса угла **по значению косинуса угла**

Использованная литература

- Материалы курсов повышения квалификации при Брянском государственном университете имени академика И.Г.Петровского