

Применение элементов математического анализа при решении задач

(по материалам ЕГЭ – 2010-2011)

Цели урока

- Учиться проводить анализ условия задачи, что помогает поиску способа решения;
- Учиться переводить язык задачи на язык производной или первообразной;
- Учиться выстраивать цепочку логических рассуждений при переходе от языка функции к языку геометрии или механики

**Задачи на применение элементов
математического анализа**

**Задачи на
применение
производной**

**Задачи на
геометриче-
-ский и
физически
й смысл
производн
ой**

**Задачи на
исследование
монотонности,
экстремумов,
нахождение
наибольшего
и
наименьшего
значения, на
оптимизацию**

**Задачи на
применение
первообразно**

**Задачи на
вычислен
ие
площадей
фигур**

**Задачи на
применени
е
физическо
го смысла
первообра
зной**

Задачи на
применение
производной

1. Задачи, в условии
которых задана функция
(аналитически или
графически)

2. Задачи, в
условии которых
задан график
производной

Базовые умения.

1. Что можно найти, зная формулу задания функции?
2. Что можно найти, зная формулу задания производной?
3. Что можно найти, если известно значение производной в точке?

Функция	$f'(x)$	x_0	$f'(x_0)$	$f'(x_0)=k=\operatorname{tg}\alpha$	$s'(t_0)=v(t_0)$

ЗАДАНИЕ 1

1а) Выполните анализ условия задачи и наметьте план её решения: *Найдите угловой коэффициент касательной к графику первообразной функции $F(x)$ функции $f(x) = \dots$ в точке абсциссой $x_0 = 2$.*

Функция	$f'(x)$	x_0	$f'(x_0)$	$f'(x_0)=k=\text{tg}\alpha$
$f(x)=5x^2+7x+2$	1	2	2	3

1б) Составьте задачу с другими числовыми данными, которая решается по плану: $f'(x)$, $f'(x_0)$, $k=f'(x_0)$.

1. Что известно по условию задачи?
- 1в) Сформулируйте задачу, обратную 1а) и составьте план её решения.
3. Что еще известно?
4. Что нужно найти?
5. *Найдите абсциссу точки касания, если тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = 5x^2 + 7x + 2$ равен 27.*
Как находят тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику заданной функции в заданной точке?

Функция	$f'(x)$	x_0	$f'(x_0)$	$f'(x_0)=k=\text{tg}\alpha$	
$f(x)=5x^2+7x+2$	1	3	$f'(x_0) = 27$	2	27

ЗАДАНИЕ 2

Прочитайте задачу: *В точке А графика функции $y = 5x^3 + 4x + 1$ проведена касательная к нему, параллельная прямой $y = 4x + 3$. Найдите сумму координат точки А.*

Обоснуйте следующий план решения задачи: $k = 4; f'(x); f'(x_0) = 4; x_0$ из уравнения; ответ на вопрос задачи.

ЗАДАНИЕ 3

Ответьте на вопросы анализа условия задачи на физический смысл производной: *точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^3/3 - 2t^2 + 3t - 15$ (s - расстояние в см, t – время в секундах, прошедшее с момента движения). Определите скорость и ускорение точки через 3 с после начала движения.*

1. Что известно по условию задачи?(функция)
2. Как задана функция?(формулой)
3. Что еще известно?(x_0)
4. Что нужно найти?($k, \operatorname{tg}\alpha$)
5. Как находят тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику заданной функции в заданной точке?

Закон движения	$S(t)$	t_0	$v(t_0) = S'(t_0)$	$a(t_0) = v'(t_0)$

1. **Что известно из условия задачи?**
2. **Как задана функция?**
3. **Что ещё известно?**
4. **Что нужно найти?**



Задачи, в условии которых функция задана графически

Базовые умения.

1. Что можно найти по графику функции и касательной к этому графику в точке x_0 ?
2. Что такое угловой коэффициент касательной к графику функции?

Способы вычисления угла наклона касательной к графику функции по графику касательной

Угловой коэффициент касательной к графику функции k

$\operatorname{tg}\alpha$ – тангенс угла наклона касательной с положительным направлением оси Ox

Коэффициент k в уравнении касательной вида $y = kx + b$

$\operatorname{tg}\alpha$ – тангенс угла наклона касательной с положительным направлением оси Ox



1. Прямоугольный треугольник

А). Если угол наклона касательной к графику функции тупой, то находят тангенс угла, смежного с рассматриваемым углом. Используют формулу

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Б) Если угол острый, то тангенс угла находят как отношение противолежащего катета к прилежащему

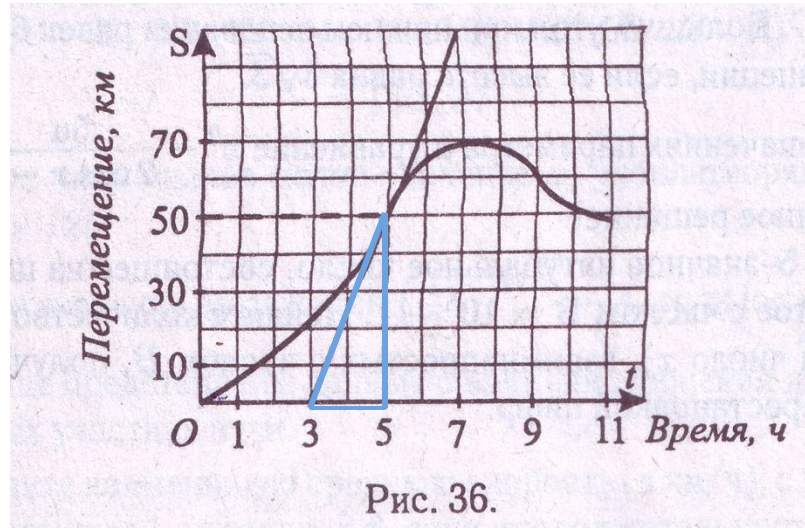
Коэффициент k в уравнении касательной вида $y = kx + b$



- 1. Координаты двух любых «удобных» точек.**
- 2. Подставляя координаты выбранных точек в уравнение вида $y = kx + b$, составляют систему и из неё находят k .**

Задание 4

Составьте план решения задачи 1-м способом: *На рис. 36 представлен график движения тела, и касательная к графику в момент времени $t = 5$. определите по графику скорость движения тела (в км/ч) в этот момент времени*



1. **Вывод:** $\vartheta(t) = k$
2. По виду угла наклона касательной определим знак k .
3. Выделим «удобный» прямоугольный треугольник. Из него найдем тангенс острого угла (Помним! $\text{tg}(180^\circ - \alpha) = -\text{tg}\alpha$).
4. Найдем тангенс острого угла как отношение противолежащего катета к прилежащему.
5. Ответим на вопрос задачи.

Решите задачу 2-м способом и сравните свои решения.

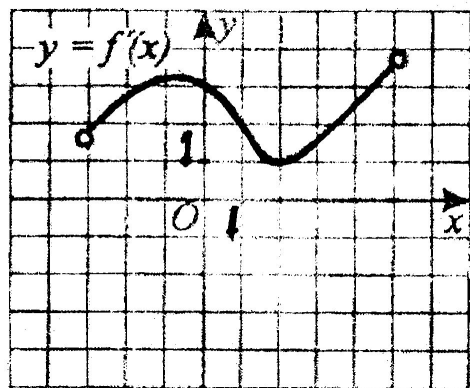
2. Задачи, в
условии которых
задан график
производной

Базовые умения.

1. Что можно найти, зная график производной?
2. Что можно найти, зная значение производной в точке; как это сделать?

Функция $f(x)$	$f'(x)$	x_0	$f'(x_0)$	$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$	α	$s'(t_0) = \vartheta(t_0)$
$(-3; 5)$	График	2	1	$\operatorname{tg} \alpha = 1$?	

Задание 5



Функция $f(x)$ определена на промежутке $(-3; 5)$. На рис. изображен график ее производной. Найдите угол наклона касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, к положительному направлению оси Ox в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Ответ укажите в градусах.

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-3;5)$. На рис. изображен график ее производной. Найдите угол наклона касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, к положительному направлению оси Ox в точке с абсциссой $x_0=2$. Ответ укажите в градусах

Сравните условие рассмотренной задачи с условием следующей задачи:

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5;5)$. На рис. изображен график ее производной. К графику функции $y = f(x)$ провели касательные во всех точках, абсциссы которых – положительные целые числа. Укажите количество точек графика функции, в которых проведенные касательные имеют отрицательный угловой коэффициент.

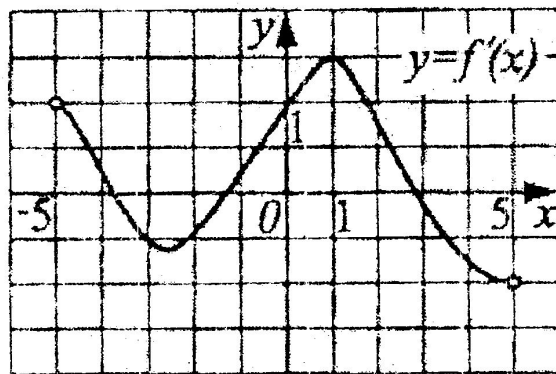


Рис. 178.

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5;5)$. На рис. изображен график ее производной. К графику функции $y = f(x)$ провели касательные во всех точках, абсциссы которых – положительные целые числа. Укажите количество точек графика функции, в которых проведенные касательные имеют отрицательный угловой коэффициент.

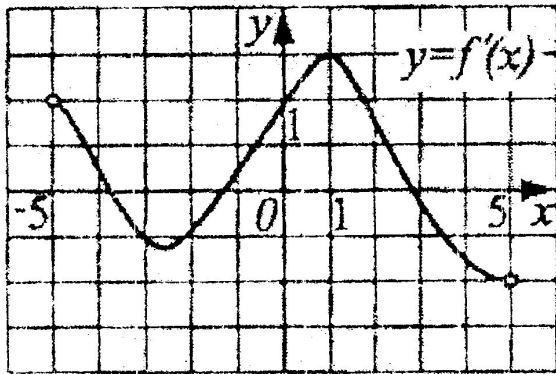


Рис. 178.

<p>Дано</p>	<p>$D(f) = (-5;5)$ $f'(x)$ – график Условие: X_0 – все положительные целые числа, $k > 0$</p>
<p>Найти</p>	<p>Количество касательных, удовлетворяющих условию?</p>

План решения.

1. Из $D(f) = (-5;5)$ выбрать положительные целые абсциссы.
2. По графику определить знак производной в этих точках.
3. Ответить на вопрос задачи.

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3;5)$. На рис. изображен график ее производной. Укажите количество точек графика функции, в которых касательные наклонены под углом 150° к положительному направлению оси абсцисс.

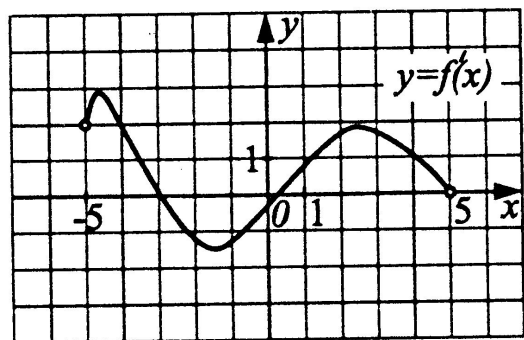


Рис. 177.

Дано	$\alpha \in (0; \pi/2)$, если $\cos \alpha = 5/13$
Найти	Количество касательных

$\alpha = 150^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$, $k < 0$, $f'(x_0) < 0$. Чтобы ответить на вопрос задачи ...

Используем метод оценки: $\operatorname{tg} 45^\circ < \operatorname{tg} 50^\circ < \operatorname{tg} 60^\circ$, $1 < \operatorname{tg} 50^\circ < \sqrt{3}$

Найти значение тангенса угла по значению косинуса угла

Использованная литература

- ▶ Материалы курсов повышения квалификации при Брянском государственном университете имени академика И.Г.Петровского