Применение формул сокращённого умножения

Примеры основных формул сокращённого умножения:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

А также:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a+b)\left(a^{2m} - a^{2m-1}b + \ldots + (-1)^k a^{2m-k}b^k + \ldots - ab^{2m-1} + b^{2m}\right)$$

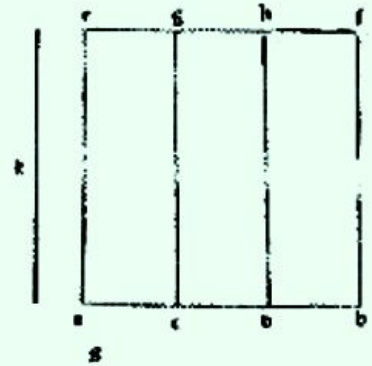
Исторические сведения

Формулы сокращённого умножения были известны еще 4000 лет назад. Ученые Древней Греции представляли величины не числами или буквами, а отрезками прямых. Вместо «произведение a и b» говорилось «прямоугольник, содержащийся между а и в», вместо a^2 - «квадрат на отрезке а».

Евклид «Начала»

Propositio .2.

Si fuerit linea i ptes divisa illud qd ex ductu toti' linee in seipsã fit: equũ erit hiis q ex ductu eiusdẽ i oẽs suas ptes. ¶ Sit linea .a.b. divisa in .a.c. et .c.d. et .d.b. dico q illud qd fit ex ductu totius .a.b. in se qd sit .a.e.b.f. equũ est hiis que fiunt ex ipsa tota in unamquãq3 dictarum partium qd palam patebit. ductis .c.g. et .d.h. equidistanter .a.e. et .b.f. ¶ Aliter sumatur .k. eq̃lis .a.b. eritq3 p pmissam qd fit ex tota .k. in totam .a.b. equũ ei qd fit ex ductu .k. in omnes ptes .a.b. et qz ex .k. i .a.b. tantũ fit quantũ ex .a.b. in se. et ex .k. in omnes ptes .a.b. quantũ ex .a.b. in omnes ptes eiusdẽ. ppter id qz .k. et .a.b. sunt equales patet verũ esse propositum.

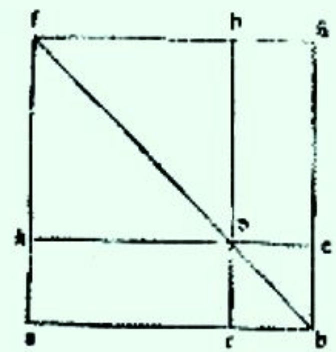


Propositio .3.

Si fuerit linea in duas ptes divisa illud qd fiet ex ductu totius in alterutrã partẽ equũ erit hiis q ex ductu eiusdẽ partis in seipsam et alterius in alteram.

Propositio .4.

Si fuerit linea in duas ptes divisa illud qd ex ductu toti' i seipsã fit: equũ ẽ hiis q ex ductu utriusq3 ptis i seipsã et alteri' i alterã bis. Ex hoc manifestũ ẽ q i oi q̃drato due superficies quas diameter secat p mediũ sunt ambe quadrate. ¶ Sit linea .a.b. divisa in .a.c. et .b.c. dico q quadratum totius .a.b. equum est duobus quadratis duarum linearum .a.c. et .b.c. et duplo eius qd fit ex ductu unius eaz in alteram: describam quadratum alterius partialium scilicet .c.d.b.e. quadratũ linee .c.b. cui adiungam gnomonẽ secũdũ ductũ directũ linee alterius scz .a.c. qd faciam hoc mõ. in quadrato descripto protraham diametrũ .b.d. et a puncto .a. educam perpendicularem sup lineam .a.b. que sit .a.k. opã .a.k. et diametrũ .b.d. producam usq3 quo concurrãt in puncto .f. et a puncto .f. producam .f.h. equidistantẽ linee .a.b. quã .f.h. et .b.e. producam usq3 quo concurrãt i pũcto .g. et producã .c.d. usq3 ad .h. et .e.d. usq3 ad .k. Et quia duo latera .d.c. et .c.b. trianguli .d.c.b. sunt equalia: erũt per .5. primi duo anguli .c.d.b. et .c.b.d. equales: et qz angulus .c. est rectus erit p .32. primi uterq3 eoz medietas recti. Eadẽ rõne uterq3 duorũ angulorũ .e.d.b. et .e.b.d. erit medietas recti. quare p secũdã ptem .29. primi erit unusquisq3 quattuor angulorum qui sunt .b.f.d. et .b.d.f. et .k.f.d. et .k.d.f. medietas recti ergo p .6. primi .f.g. et .g.b. sunt equales. similiter quoq3 .f.a. et .a.b. pari rõne .f.h. et .h.d. itẽq3 .f.k. et .k.d. quare utraq3 duarũ supficierũ .a.b.g.f. et .k.d.h.f. est quadrata et qz totale quadratum .a.b.f.g. qd est quadratũ linee .a.b. constat ex duobus quadratis que cõsistunt circa diametrũ que sunt quadrata duarum linearum .a.c. et .c.b. et ex duobus supplementis quoz unũquodq3 pducit ex .a.c. in .b.c. patet propositum nostrũ. ¶ Aliter sit linea .a.b. ut prius divisa in .a.c. et .c.b.

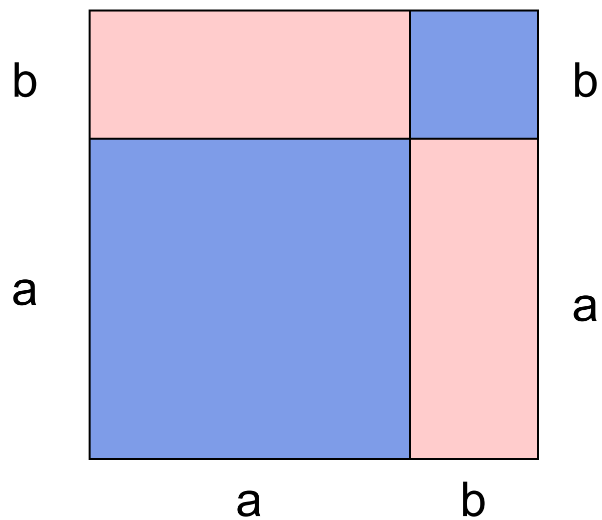


Евклид «Начала»

«Если отрезок как-либо разбит на два отрезка, то площадь квадрата, построенного на всем отрезке, равна сумме площадей квадратов, построенных на каждом из двух отрезков, и удвоенный площади прямоугольника, сторонами которого служат эти два отрезка».

Суть этой фразы в формуле:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Применение формул сокращённого умножения:

- в алгебре
- в геометрии

Разложение многочленов на множители

- $(a^2 + 1)^2 – 4a^2 = ((a^2 + 1) – 2a)((a^2 + 1) + +2a) = (a^2 + 1 – 2a)(a^2 + 1 + 2a) = (a^2 – 2a + +1)(a^2 + 2a + 1) = (a - 1)^2(a + 1)^2$
- $a^2 – b^2 – a – b = (a – b)(a + b)–(a + b) =(a + + b)(a – b – 1)$

В разложении данных многочленов использовались формулы:

1) разность квадратов
2) квадрат разности
3) квадрат суммы

Представление выражения в виде многочлена

Представить в виде многочлена $\left(x^2-\sqrt{5}\right)^2$.

$$\left(x^2-\sqrt{5}\right)^2=\left(x^2\right)^2-2\cdot x^2\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2=x^4-2\sqrt{5}x^2+5$$

Ответ: $x^4-2\sqrt{5}x^2+5$

Представить в виде многочлена $-\left(\sqrt{3}-x\right)\cdot\left(x^2-3\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)$.

$$-\left(\sqrt{3}-x\right)\cdot\left(x^2-3\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)=\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)\cdot\left(x^2-3\right)=\left(x^2-3\right)\cdot\left(x^2-3\right)=\left(x^2-3\right)^2=x^4-6x^2+9$$

Ответ: x^4-6x^2+9

Решение уравнения

1 способ

$(x - 2)^3 + (x + 2)^3 = 2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 2(x^3 - 27)$

$2x^3 + 24x = 2x^3 - 54$

$24x = - 54$

$\underline{x = - 2{,}25}$

В решении данного уравнения первым способом использовались формулы:

1) куб разности

2) куб суммы

Решение уравнения

2 способ

$(x – 2)^3 + (x + 2)^3 = 2(x – 3)(x^2 + 3x + 9)$

$(x-2+x+2)((x-2)^2 - (x-2)(x+2) + (x+2)^2 = 2(x^3-27)$

$2x(x^2 – 4x + 4 – x^2 + 4 + x^2 + 4x +4) = 2x^3 – 54$

$2x(x^2 + 12) = 2x^3 – 54$

$2x^3 + 24x – 2x^3 = - 54$

$24x = - 54$

$x = - 2,25$

В решении данного уравнения вторым способом использовались формулы:

1) сумма кубов; 2) квадрат разности; 3) квадрат суммы;

4) разность квадратов.

Доказательство неравенства

Доказать неравенство:

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}\,, если\ \mathrm{a, b, c, d} > 0$$

$$ac + ad + bc + bd \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$$

$$ad + bc - 2\sqrt{abcd} \geq 0$$

$$\left(\sqrt{ad}\right)^2 - 2\sqrt{ad}\cdot\sqrt{bc} + \left(\sqrt{bc}\right)^2 \geq 0$$

$$\left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2 \geq 0$$, что верно.

Делимость

Докажем, что число $n^3 – n$, где n – натуральное число, делится на 6:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$$

Заданное число есть произведение трёх последовательных чисел, из которых одно обязательно делится на 3 и хотя бы одно делится на 2. Если произведение делится и на 3, и на 2, то оно делится и на 6.

Тождественные преобразования

Докажем тождество: $\left(\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}\right)\div\frac{2x^2+x+1}{x+1}=\frac{1}{x-3}$.

$$\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-x+1)}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)},$$

$$\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)}=\frac{x(x+1)+x^2+1}{(x+1)(x-3)}=\frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-3)},$$

$$\left(\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}\right)\div\frac{2x^2+x+1}{x+1}=\frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-3)}\div\frac{2x^2+x+1}{x+1}=$$

$$=\frac{(2x^2+x+1)(x+1)}{(x+1)(x-3)(2x^2+x+1)}=\frac{1}{x-3}.$$

Итак, с помощью тождественных преобразований с применением формул сокращённого умножения мы левую часть равенства привели к виду правой его части. Тождество доказано.

Задача Пифагора

«Всякое нечётное число, кроме единицы, есть разность двух квадратов».

<u>Решение:</u>

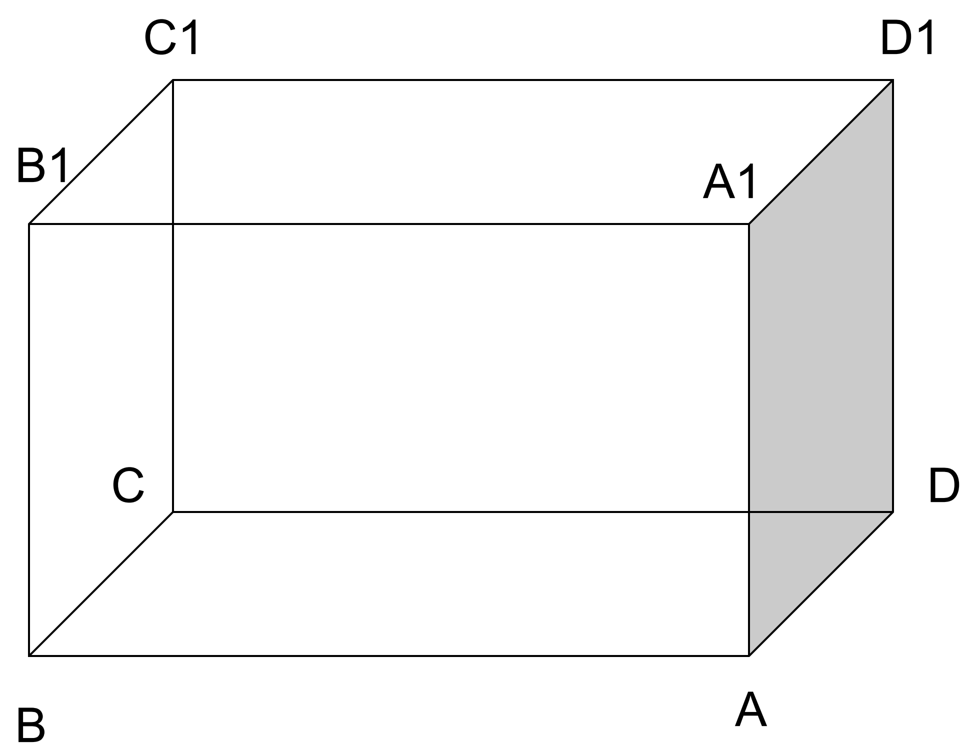
n – натуральное число

$(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1 - n)(n + 1 + n) = 2n + 1$

$2n + 1$ – нечётное число

Геометрическая задача

В прямоугольном параллелепипеде длина на 5 см больше ширины и на 5 см меньше высоты. Площадь поверхности равна 244 см². Найдите измерения параллелепипеда (длину, ширину, высоту).



Геометрическая задача

Пусть x см – AB(длина), тогда (x+5) см – AA1(высота), (x-5) см – AD(ширина).

$S = 2S_{ABCD} + 2S_{AA1D1D} + 2S_{AA1B1B}$, а по условию – 244 см²

$S_{ABCD} = x(x-5)$; $S_{AA1D1D} = (x-5)(x+5)$;

$S_{AA1B1B} = x(x+5)$

<u>Составим и решим уравнение:</u>

$2x(x-5) + 2(x-5)(x+5) + 2x(x+5) = 244$

$x(x-5) + (x-5)(x+5) + x(x+5) = 122$

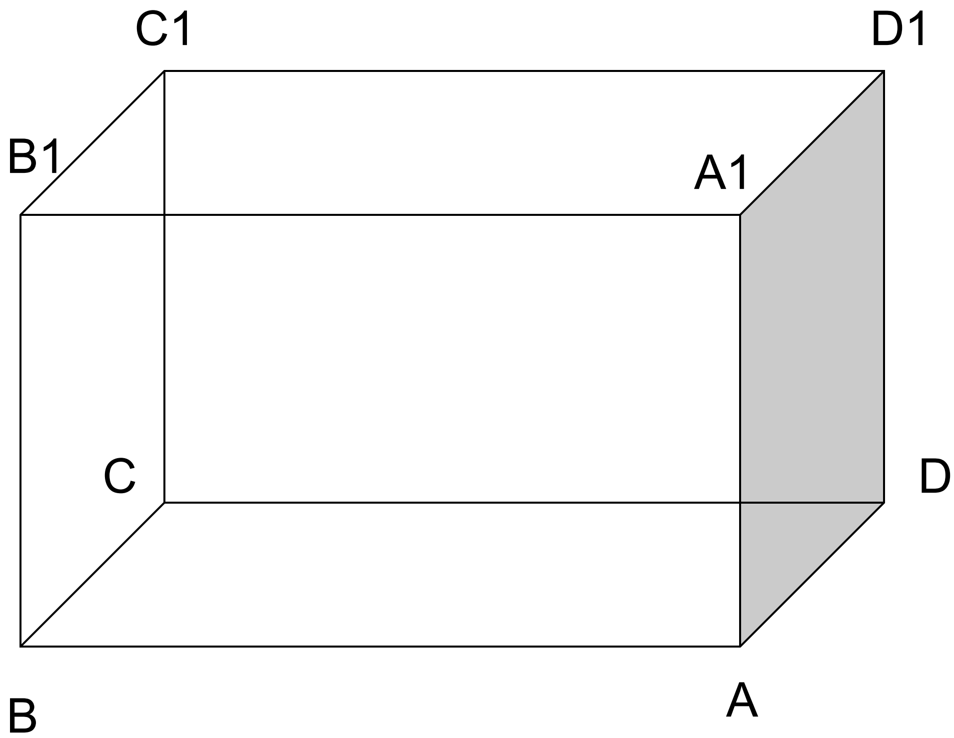
$x^2 – 5x + x^2 – 5^2 + x^2 + 5x = 122$

$3x^2 = 122+25$

$3x^2 = 147$

$x^2 = 49$, $x > 0$ (по смыслу задачи)

<u>**x = 7**</u>

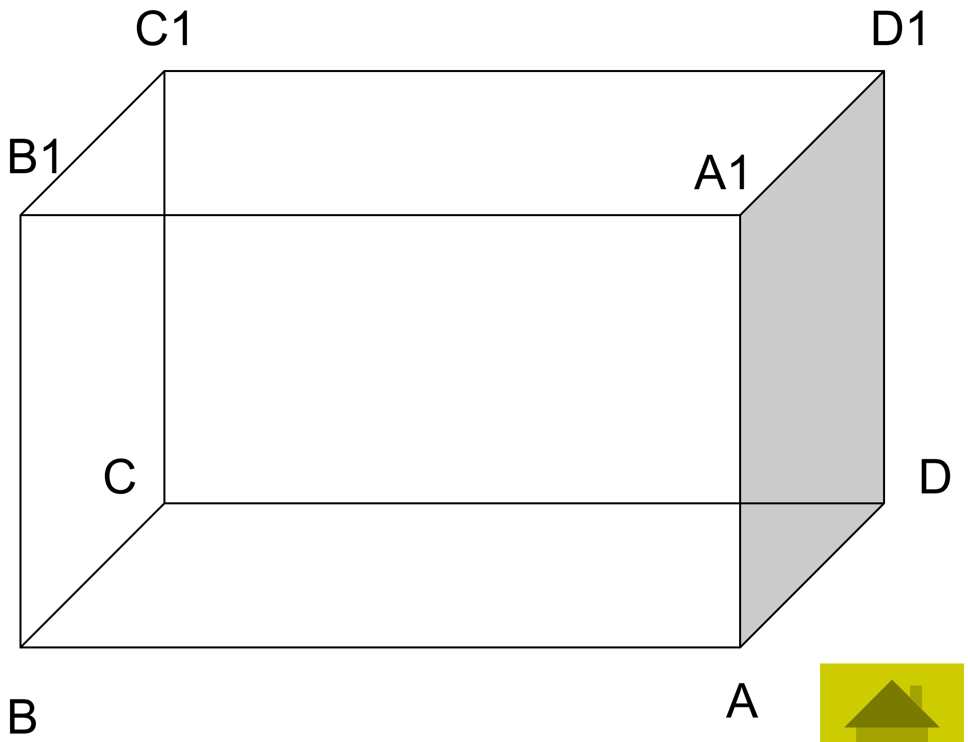


Геометрическая задача

AB = 7 см – длина

AA1 = 7 см + 5 см = 12 см – высота

AD = 7 см – 5 см = 2 см – ширина



<u>Ответ:</u> 7 см; 12 см; 2 см.

Спасибо за внимание.

Презентацию подготовили:

Плеханова Полина, Уткина Екатерина

8 «А» класс, ГОУ гимназия №144