

# Графы и их применение при решении задач

# Содержание

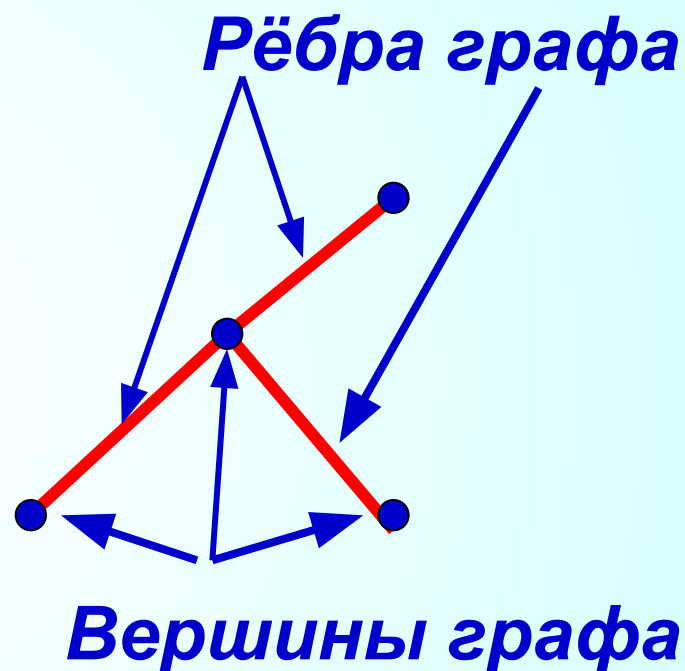
- Что такое граф
- Свойства графа
- История возникновения графов
- Задача о Кенигсбергских мостах
- Применение графов
- Выводы

# Что такое граф

В математике определение графа дается так:

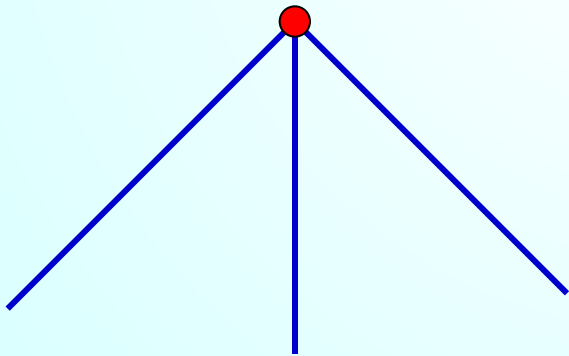
**Графом** называется непустое множество точек и множество отрезков, оба конца которых принадлежат заданному множеству точек.

Точки называются **вершинами** графа, а соединяющие линии — **рёбрами**.

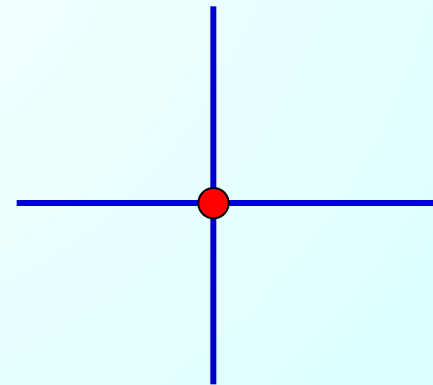


# Что такое граф

Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называется **степенью вершины**. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется **нечётной**, а чётную степень – **чётной**.



*Нечётная степень*



*Чётная степень*

# Свойства графов

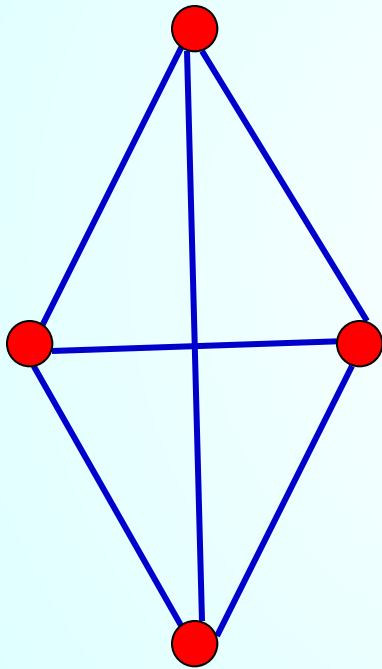
- В графе сумма степеней всех его вершин – число чётное, равное удвоенному числу рёбер графа.
- Число нечётных вершин любого графа чётно.
- Во всяком графе с  $n$  вершинами, где  $n \geq 2$ , всегда найдутся две вершины с одинаковыми степенями.

# Свойства графов

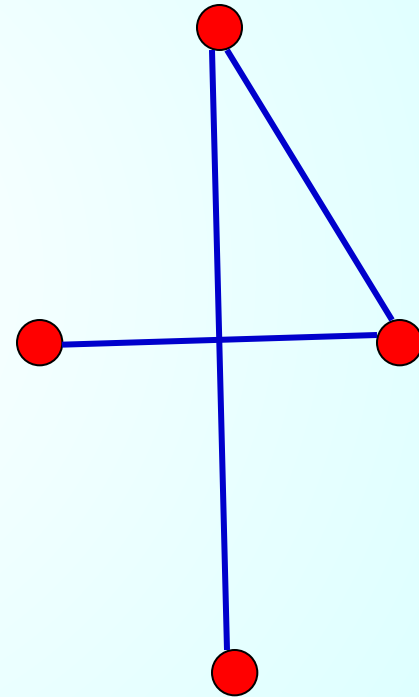
- Если в графе с  $n$  вершинами ( $n > 2$ ) в точности две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдётся либо в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени  $n-1$ .
- Если полный граф имеет  $n$  вершин, то количество рёбер будет равно  $n(n-1)/2$ .

# Свойства графа

Полный граф

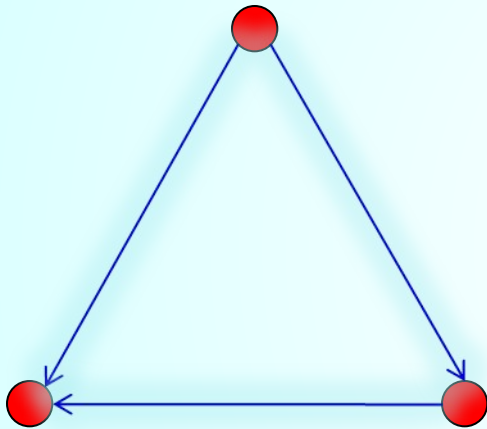


Неполный граф

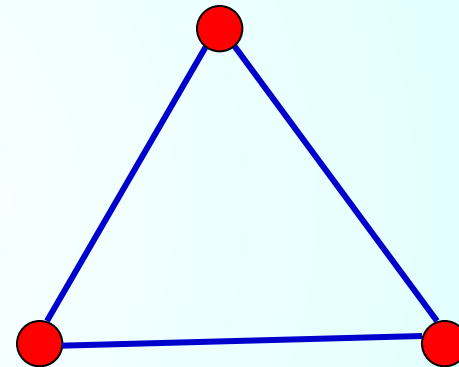


# Свойства графа

- Ориентированный граф

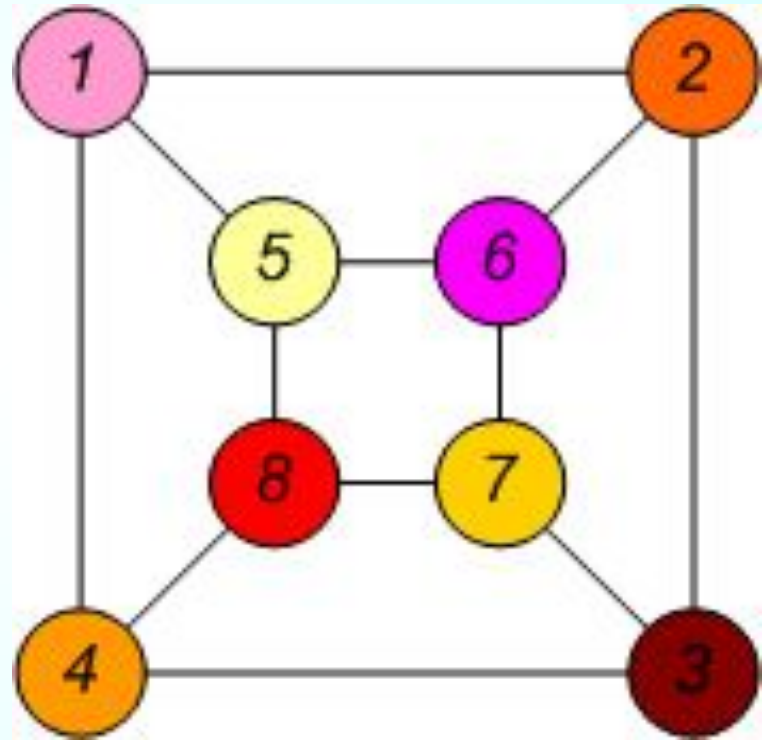
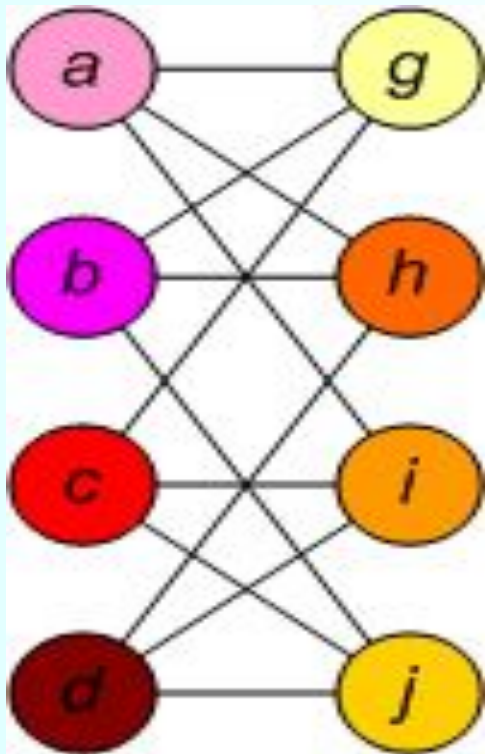


- Неориентированный граф





# Изоморфные графы



# История возникновения графов

Термин "**граф**" впервые появился в книге венгерского математика Д. Кенига в 1936 г., хотя начальные важнейшие теоремы о графах восходят к Л. Эйлеру.



# История возникновения графов

Основы теории графов как математической науки заложил в 1736 г. **Леонард Эйлер**, рассматривая задачу о кенигсбергских мостах. Сегодня эта задача стала классической.



# Задача о Кенигсбергских мостах

Бывший *Кенигсберг* (ныне *Калининград*) расположен на реке Прегель. В пределах города река омывает два острова. С берегов на острова были перекинuty мосты. Старые мосты не сохранились, но осталась карта города, где они изображены.



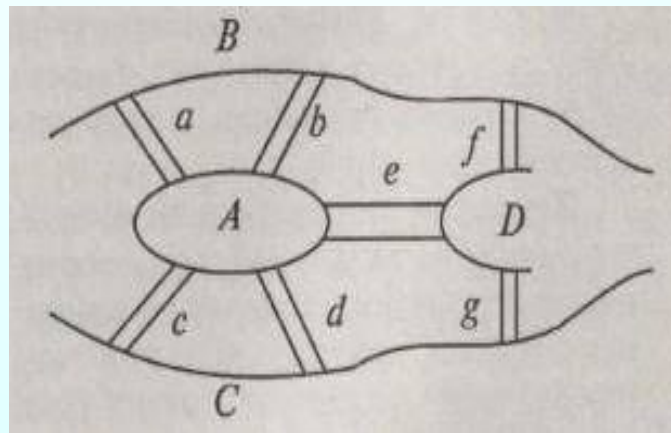
[Дальше](#)

# Задача о Кенигсбергских мостах

Среди жителей Кенигсберга была распространена следующая задача: можно ли пройти по всем мостам и вернуться в начальный пункт, побывав на каждом мосту только один раз?

# Задача о Кенигсбергских мостах

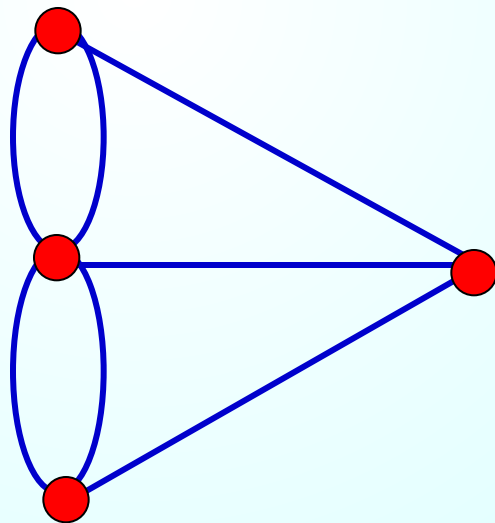
Пройти по Кенигсбергским мостам, соблюдая заданные условия, нельзя. Прохождение по всем мостам при условии, что нужно на каждом побывать один раз и вернуться в точку начала путешествия, на языке теории графов выглядит как задача изображения «одним росчерком» графа.



[дальше](#)

# Задача о Кенигсбергских мостах

Но, поскольку граф на этом рисунке имеет четыре нечетные вершины, то такой граф начертить «одним росчерком» невозможно.



# Эйлеров граф

Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, называется *эйлеровым*.

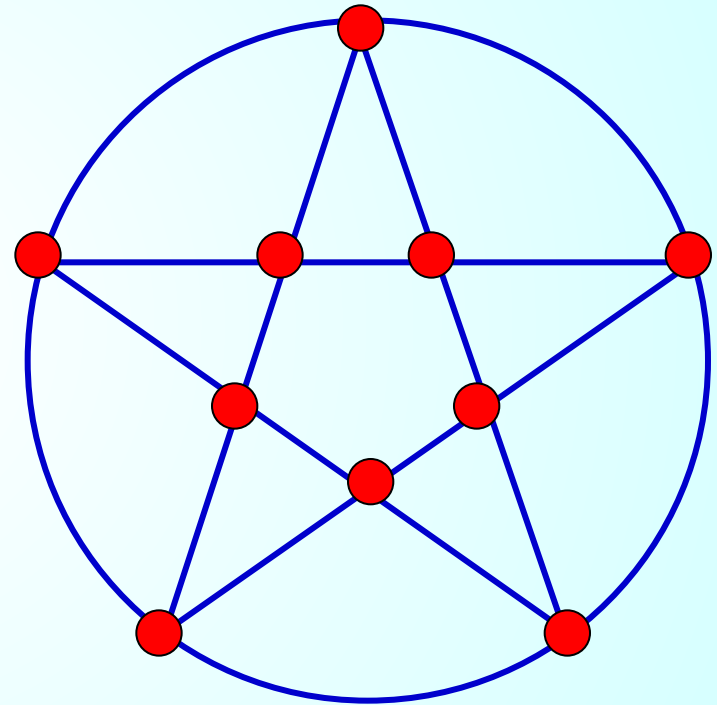
Решая задачу о кенигсбергских мостах, Эйлер сформулировал свойства графа:

- Число нечётных вершин (вершин, к которым ведёт нечётное число рёбер) графа должно быть чётно. Не может существовать граф, который имел бы нечётное число нечётных вершин.
- Если все вершины графа чётные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом можно начинать с любой вершины графа и завершить его в той же вершине.
- Граф с более чем двумя нечётными вершинами невозможно начертить одним росчерком.



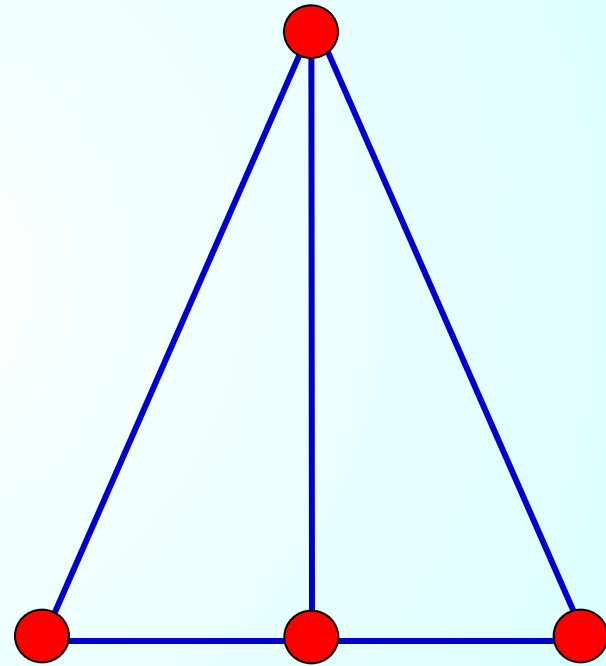
# Эйлеров граф

Если все вершины графа четные, то можно не отрывая карандаш от бумаги («одним росчерком»), проводя по каждому ребру только один раз, начертить этот граф. Движение можно начать с любой вершины и закончить его в той же вершине.



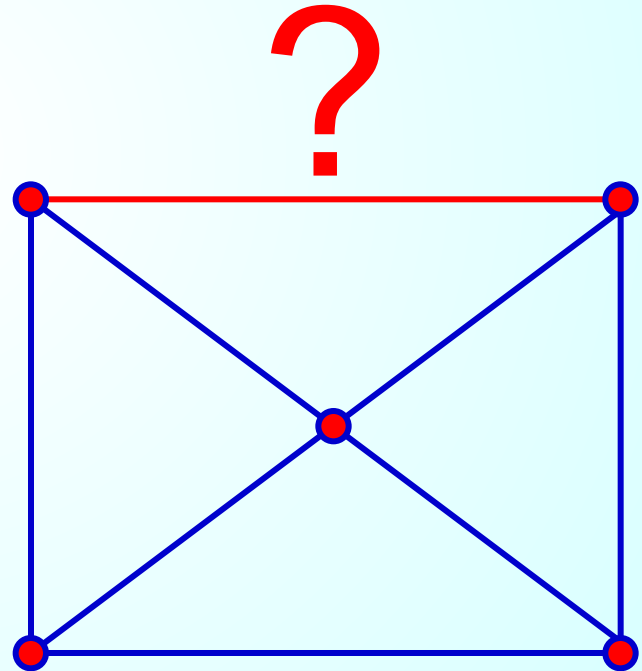
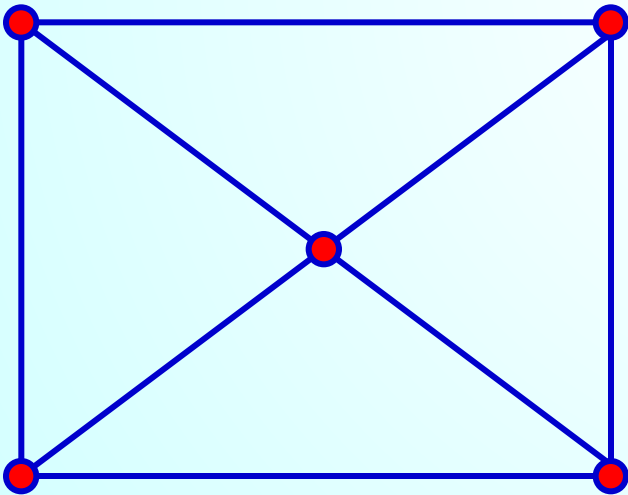
# Эйлеров граф

Граф, имеющий всего две нечетные вершины, можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить во второй из них.



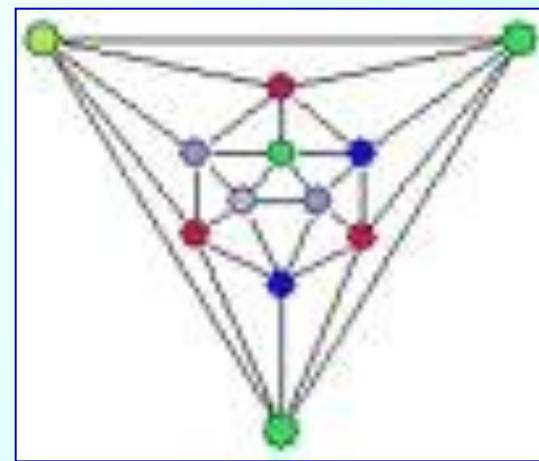
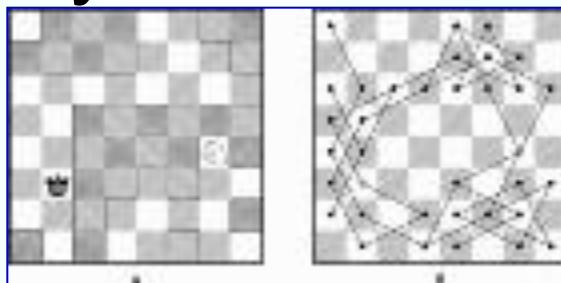
# Эйлеров граф

Граф, имеющий более двух нечетных вершин, невозможно начертить «одним росчерком».



# Применение графов

С помощью графов упрощается решение математических задач, головоломок, задач на смекалку.



# Применение графов

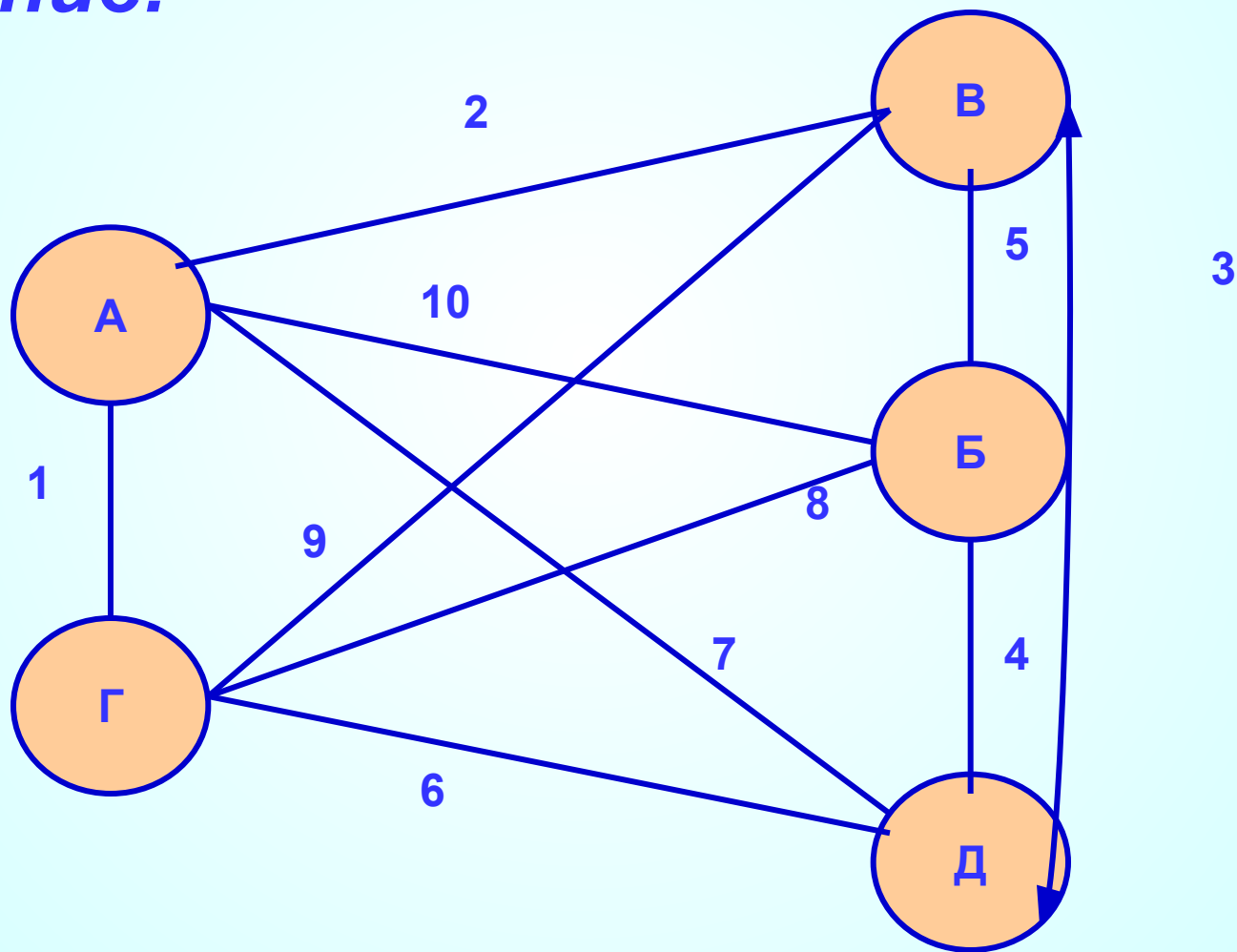
## *Задача:*

Аркадий, Борис. Владимир, Григорий и Дмитрий при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому по одному разу). Сколько всего рукопожатий было сделано?



# Применение графов

*Решение:*



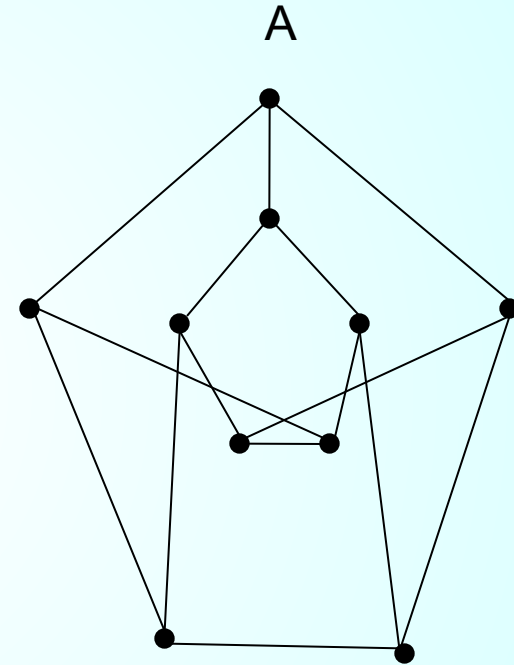
[далее](#)

# Применение графов

В государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединён авиалиниями не более чем с тремя другими, и из любого города в любой другой можно проехать, сделав не более одной пересадки. Какое максимальное число городов может быть в этом государстве?

# Применение графов

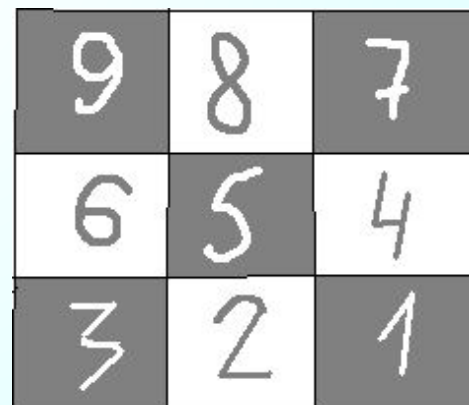
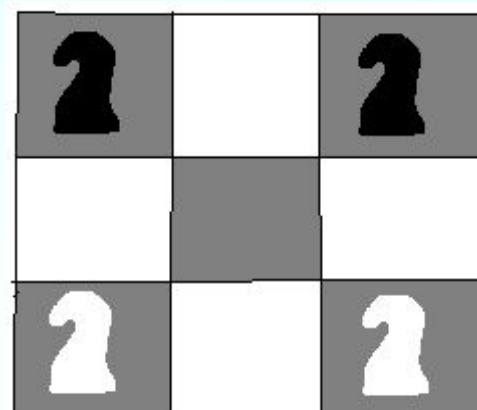
Пусть существует некоторый город  $A$ . Из него можно добраться не более, чем до трёх городов, а из каждого из них ещё не более чем до двух (не считая  $A$ ). Тогда всего городов не более  $1+3+6=10$ . Значит всего городов не более 10. Пример на рисунке показывает существование авиалиний.





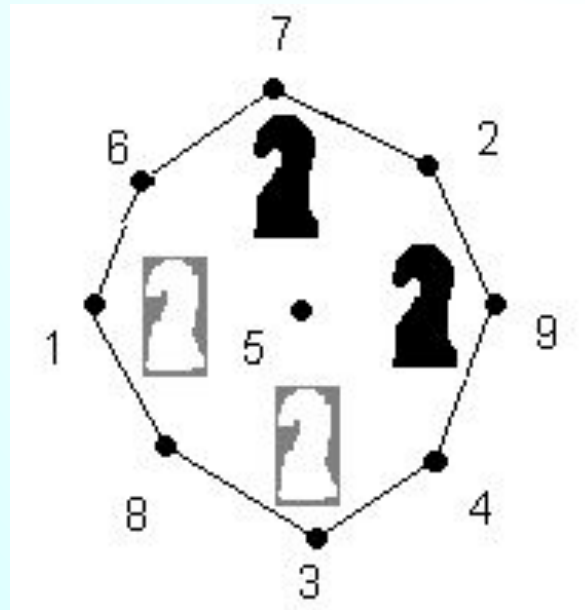
# Применение графов

Имеется шахматная доска 3x3, в верхних двух углах стоят два чёрных коня, в нижних – два белых (рисунок ниже). За 16 ходов поставьте белых коней на место чёрных, а чёрных на место белых и докажите, что за меньшее число ходов это сделать невозможно.



# Применение графов

Развернув граф возможных ходов коней в круг, получим, что в начале кони стояли так, как на рисунке ниже:



# Вывод

Графы – это замечательные математические объекты, с помощью, которых можно решать математические, экономические и логические задачи. Также можно решать различные головоломки и упрощать условия задач по физике, химии, электронике, автоматике. Графы используются при составлении карт и генеалогических древ.

В математике даже есть специальный раздел, который так и называется: «**Теория графов**».