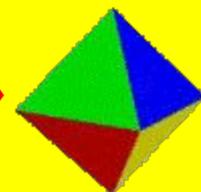
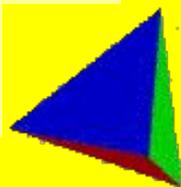


Проект по математике «Мир правильных многогранников»



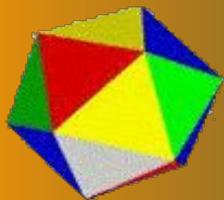
Выполнили: ученики 10 а класса

Грачева Татьяна, Кудрявцев Павел, Семеренко Александр,
Егорова Юлия, Самохвалова Юлия, Красненков Дмитрий

Руководители проекта:

Учитель математики Князева Е.Н., учитель информатики Жеревчук Н.А.

Апрель 2011 год



Цель проекта:

познакомить учащихся с рядом интересных особенностей правильных многогранников, показать “мир в целом”, преодолев разобщенность научного знания по теме «Многогранники».

Задачи проекта:

- систематизировать знания об основных видах многогранников, показать их применение в других видах деятельности;
- развивать аналитические умения учащихся, способности самостоятельного поиска информации;
- развивать самостоятельность и творчество, расширять кругозор, способствовать проявлению личностных качеств и способностей, обогащению межличностных отношений.

Направления деятельности групп

Группа «Историки»

Развитие теории многогранников с исторической точки зрения

1. Первые сведения о многоугольниках.
2. Платоновы тела и их свойства.
3. Евклид.
4. Архимед и его "тела".
5. "Стереометрия". Иоганн Кеплер.
6. Взаимосвязь «золотого сечения» и происхождения многогранников.

Группа «Практики»

Практическое применение многогранников в окружающей среде

1. Многогранники в архитектуре и искусстве
2. Геометрия кисти Леонардо.
3. Многогранники Дюрера.
4. Многогранники на картинах Сальвадора Дали.
5. Мир М.К Эшера.
6. Новый правильный многогранник Матюшка Тейи Крашек.
7. Многогранники в мире химии, биологии.
8. Использование многогранников в жизни.

Группа «Теоретики-математики»

Проблемные вопросы с научной точки зрения

1. Эйлер. Теорема о Числе граней, вершин и ребер многогранника.
2. Происхождение имен правильных многогранников.
3. Золотая пропорция в додекаэдре и икосаэдре
4. Золотая пропорция во внешней площади и объеме додекаэдра и икосаэдра
5. Прикладное применение многоугольников. Конструирование Архимедового усеченного икосаэдра из Платонового икосаэдра

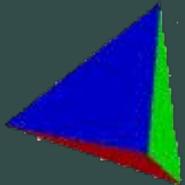
Введение

“Правильных многогранников так мало, но это весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук”.

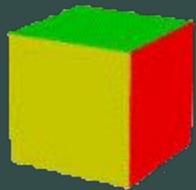
(Л. Кэрролл).

«Теория многогранников, в частности выпуклых многогранников, — одна из самых увлекательных глав геометрии»

(русский математик Л.А. Люстернак).



Правильным многогранником называется многогранник, у которого все грани правильные равные многоугольники, и все двугранные углы равны.

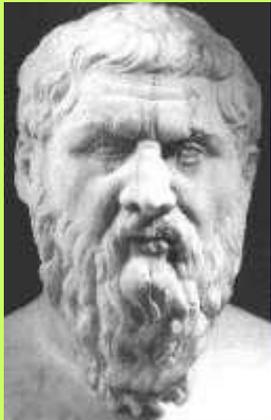


С древнейших времен наши представления о красоте связаны с симметрией. Наверное, этим объясняется интерес человека к многогранникам - удивительным символам симметрии, привлекавшим внимание выдающихся мыслителей.

История возникновения правильных многогранников

Правильные многогранники известны с древнейших времён.

Мы рассмотрим как правильные многогранники связаны с именами Платона, Евклида, Архимеда и Иоганна Кеплера.



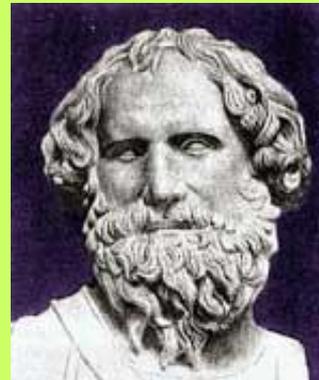
Платон

(427 до н. э.—347 до н. э.)
древнегреческий философ



Евклид

древнегреческий математик



Архимед

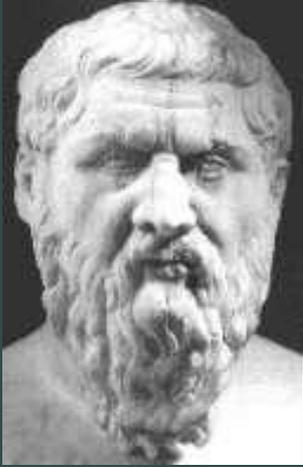
(287 г. до н.э. — 212 г. до н.э.)



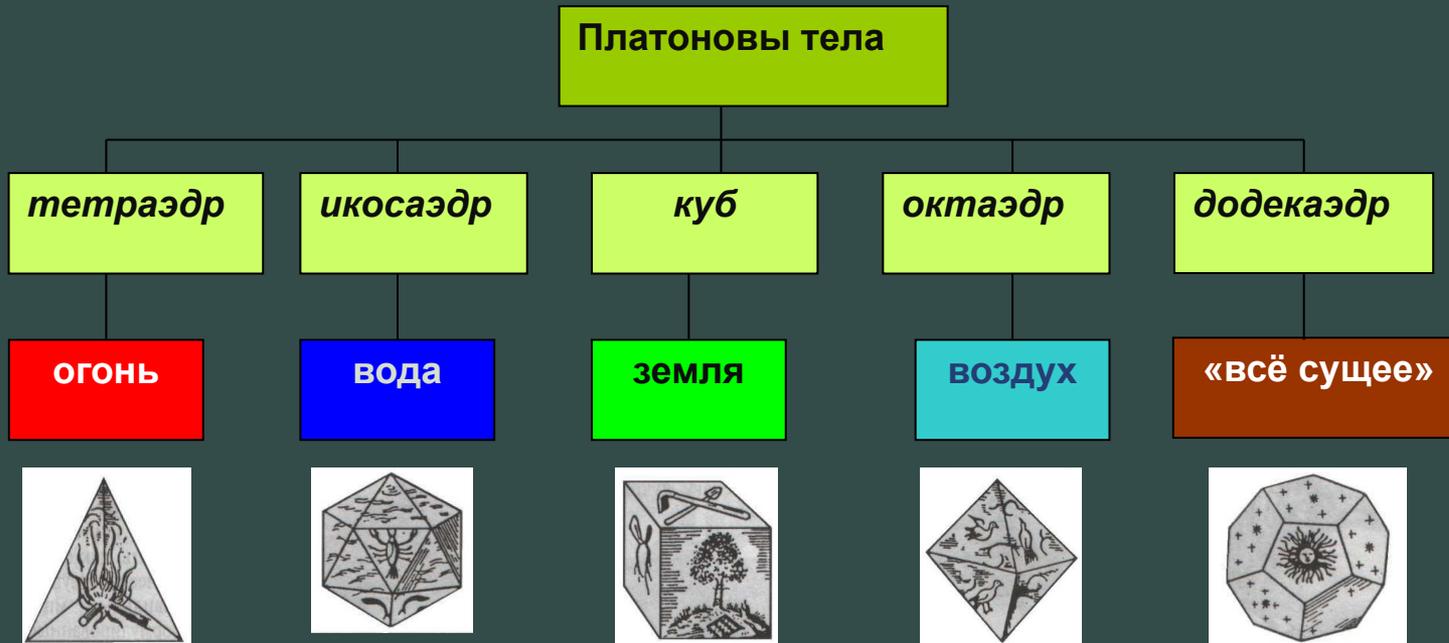
Иоганн Кеплер

немецкий астроном
(1571-1630)

Платон



Правильные многогранники характерны для философии Платона, в честь которого и получили название «платоновы тела». О которых он писал в своём трактате Тимей (360г до н. э.), где сопоставил каждую из четырёх стихий (землю, воздух, воду и огонь) определённому правильному многограннику. Земля сопоставлялась кубу, воздух — октаэдру, вода — икосаэдру, а огонь — тетраэдру.



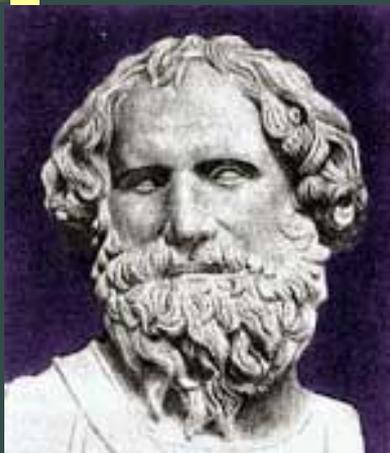
Евклид



Евклид дал полное математическое описание правильных многогранников в последней, *XIII книге Начал*.

- Предложения 13—17 этой книги описывают структуру тетраэдра, октаэдра, куба, икосаэдра и додекаэдра в данном порядке.
- Для каждого многогранника Евклид нашёл отношение диаметра описанной сферы к длине ребра.
- В 18-м предложении утверждается, что не существует других правильных многогранников.





Архимед

Известно еще множество совершенных тел, получивших название *полуправильных многогранников* или *Архимедовых тел*. Множество *Архимедовых тел* можно разбить на несколько групп. Первую из них, составляют пять многогранников, которые получаются из *Платоновых тел* в результате их *усечения*. Для *Платоновых тел* усечение может быть сделано таким образом, что и получающиеся новые грани и остающиеся части старых будут правильными многоугольниками.

Архимедовы тела: усеченный тетраэдр, усеченный гексаэдр (куб), усеченный октаэдр, усеченный додекаэдр и усеченный икосаэдр.

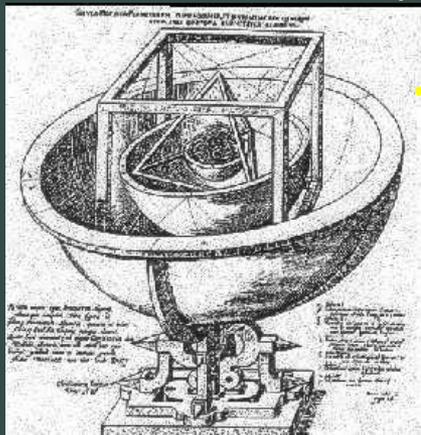


Кеплер



Все та же вера в гармонию, красоту и математически закономерное устройство мироздания привела И. Кеплера к мысли о том, что поскольку существует пять правильных многогранников, то им соответствуют только шесть планет. По его мнению, сферы планет связаны между собой вписанными в них Платоновыми телами. Поскольку для каждого правильного многогранника центры вписанной и описанной сфер совпадают, то вся модель будет иметь единый центр, в котором будет находиться Солнце.

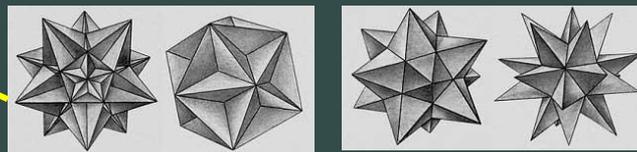
Геометрическая модель Солнечной системы, основанная на «платоновых телах».



В сферу орбиты Сатурна он вписывает куб, в куб - сферу Юпитера, в сферу Юпитера - тетраэдр, и так далее последовательно вписываются друг в друга сфера Марса - додекаэдр, сфера Земли - икосаэдр, сфера Венеры - октаэдр, сфера Меркурия

Таким образом, структура Солнечной системы и отношения расстояний между планетами определялись правильными многогранниками.

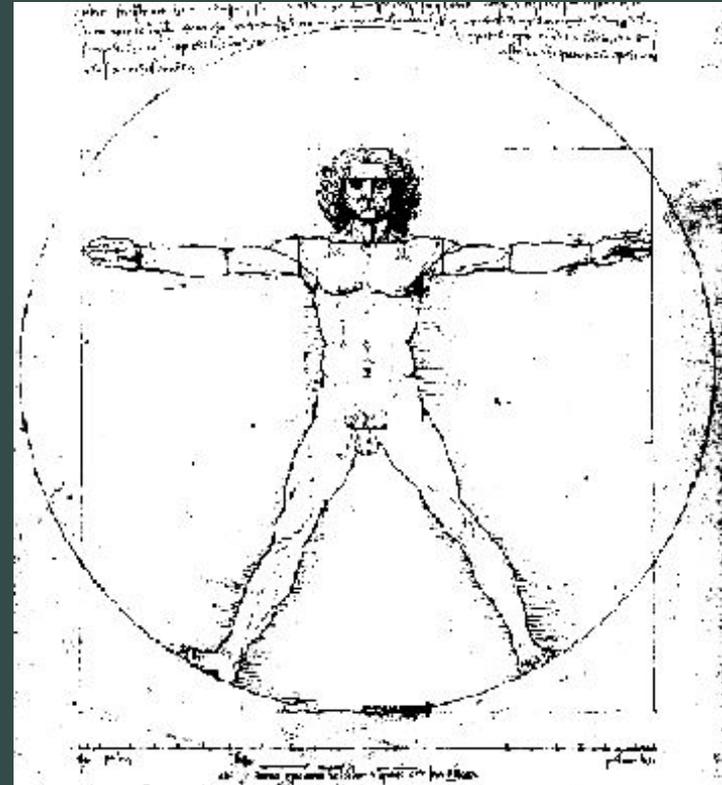
Открытие правильных звёздчатых многогранников - тел Кеплера-Пуансо.



Взаимосвязь «золотого сечения» и происхождения многогранников

Леонардо да Винчи в «Золотом делении» искал гармонические отношения в живописи, архитектуре, строении человеческого тела.

Золотое сечение применяется для построения правильных пяти- и десятиугольников; в стереометрии - правильных двенадцатигранников (додекаэдров) и двадцатигранников (икосаэдров).



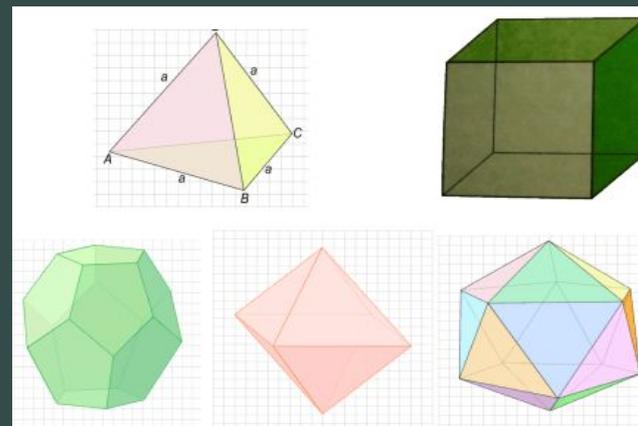
Многомудрые греки сочли разумным возвести генезис пропорций к самим истокам вселенной: "По Ферекиду, Зевс связал определенными пропорциями то, что прежде было хаотично".

Многогранники в математике

Многогранник называется правильным, если он выпуклый, все его грани равны друг другу и в вершине находится одинаковое количество ребер.

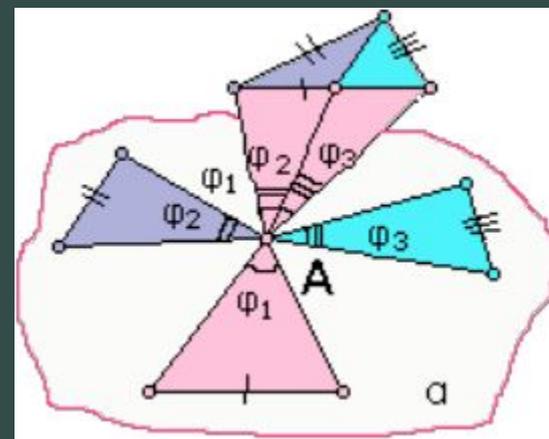
Существует 5 правильных многогранников:

- правильный тетраэдр;
- куб или правильный гексаэдр;
- правильный октаэдр;
- правильный додекаэдр;
- правильный икосаэдр



Почему именно пять?

Подтвердить это можно с помощью развертки выпуклого многогранного угла. Для того чтобы получить какой-нибудь правильный многогранник, в каждой вершине должно сходиться одинаковое количество граней, каждая из которых является правильным многоугольником. Сумма плоских углов многогранного угла должна быть меньше 360° , иначе никакой многогранной поверхности не получится. Перебирая возможные целые решения неравенств: $60k < 360$, $90k < 360$ и $108k < 360$, можно доказать, что правильных многогранников ровно пять (k - число плоских углов, сходящихся в одной вершине многогранника).



Название	β	k	Сумма плоских углов
тетраэдр	60	3	180
октаэдр	60	4	240
икосаэдр	60	5	300
гексаэдр	90	3	270
додекаэдр	108	3	324

Теорема Эйлера

Для любого выпуклого многогранника справедливо соотношение:

$$G+B-P=2,$$

где G -число граней, B -число вершин, P - число ребер данного многогранника.

$$\text{Грани} + \text{Вершины} - \text{Рёбра} = 2.$$

Многогранник	Вершины	Грани	Рёбра	Оси симметрии	Плоскости симметрии
Тетраэдр	4	4	6	3	6
Куб	8	6	12	9	9
Октаэдр	6	8	12	9	7
Додекаэдр	20	12	30	15	15
Икосаэдр	12	20	30	15	15

Почему правильные многогранники получили такие названия?

Это связано с числом их граней:

1. тетраэдр имеет 4 грани, в переводе с греческого "тетра" - четыре,
2. гексаэдр (куб) имеет 6 граней, в переводе с греческого "эдрон" - грань, "гекса" - шесть;
3. октаэдр - восьмигранник, в переводе с греческого "окто" - восемь;
4. додекаэдр - двенадцатигранник, в переводе с греческого "додека" двенадцать;
5. икосаэдр имеет 20 граней, в переводе с греческого "икоси" - двадцать.

Золотая пропорция в додекаэдре и икосаэдре

Додекаэдр и двойственный ему икосаэдр занимают особое место среди Платоновых тел.

Действительно, гранями додекаэдра являются пентагоны, т.е. правильные пятиугольники, основанные на золотой пропорции.



Если внимательно посмотреть на икосаэдр, то можно увидеть, что в каждой его вершине сходится пять треугольников, внешние стороны которых образуют пентагон.



Золотая пропорция во внешней площади и объеме додекаэдра и икосаэдра

Еще одно соотношение для додекаэдра и икосаэдра, подтверждающее связь с золотой пропорцией.

Если взять икосаэдр и додекаэдр с длиной ребра, равной единице, и вычислить их внешнюю площадь и объем, то они выражаются через золотую пропорцию.

	Икосаэдр	Додекаэдр
Внешняя площадь	$5\sqrt{3}$	$\frac{15\tau}{\sqrt{3-\tau}}$
Объем	$\frac{5\tau^5}{6}$	$\frac{5\tau^3}{2(3-\tau)}$

Многогранники в архитектуре

Музеи Плодов

Музеи Плодов в Яманаши создан с помощью трехмерного моделирования.

Пирамиды

Пирамиды стоят на древнем кладбище в Гизе, на противоположном от Каира, столицы современного Египта, берегу реки Нил. Некоторые археологи считают, что, возможно, на строительство Великой пирамиды 100 000 человек потребовалось 20 лет. Она была создана из более чем 2 миллионов каменных блоков, каждый из которых весил не менее 2,5 тонн.

Александрийский маяк

В III веке до н.э. был построен **александрийский маяк**, где использовались формы правильных многогранников. Маяк был построен на маленьком острове Фарос в Средиземном море, около берегов Александрии. На его строительство ушло 20 лет, а завершен он был около 280 г. до н.э., во времена правления Птолемея II, царя Египта

Спасская башня Кремля.

Четырехъярусная Спасская башня с церковью Спаса Нерукотворного — главный въезд в Казанский кремль. Возведена в XVI веке псковскими зодчими Иваном Ширяем и Постником Яковлевым по прозвищу «Барма». Четыре яруса башни представляют из себя куб, многогранники и пирамиду.

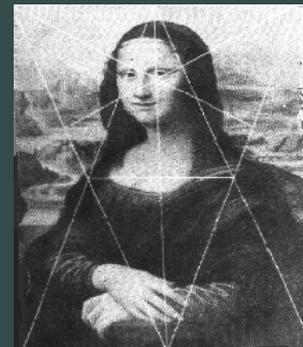


Многогранники в искусстве



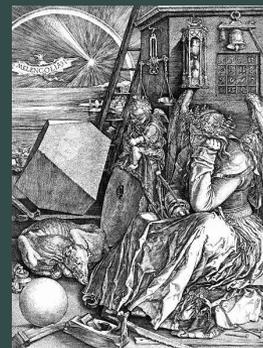
Леонардо да Винчи - «Портрет Монны Лизы».

Композиция рисунка основана на золотых треугольниках, являющихся частями правильного звездчатого пятиугольника.



Альбрехт Дюрер - гравюра «Меланхолия».

На переднем плане картины изображен додекаэдр.



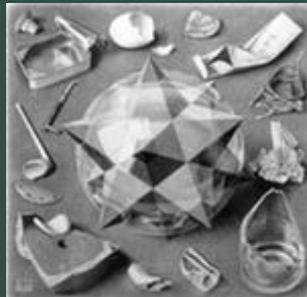
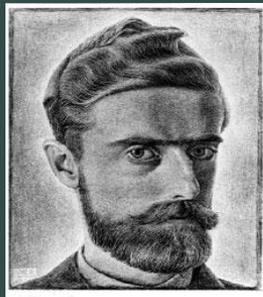
Сальвадор Дали – «Тайная Вечеря».

Христос со своими учениками изображён на фоне огромного прозрачного додекаэдра.



Тайная вечеря, 1955. Улест, масло.

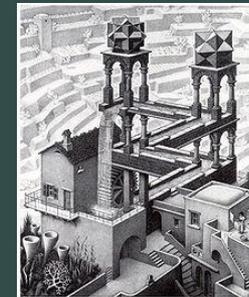
Мауриц Корнелис Эшер – «Порядок и хаос»,



гравюра «Звезды»,



литография «Водопад»



Многогранники в природе, химии и биологии

Кристаллы некоторых знакомых нам веществ имеют форму правильных многогранников.



Кристалл пирита— природная модель додекаэдра.



Кристаллы поваренной соли передают форму куб



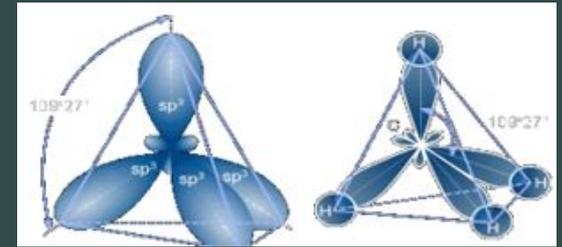
Монокристалл алюминио-калиевых квасцов имеет форму октаэдра.



Сурьенистый сернокислый натрий - тетраэдра

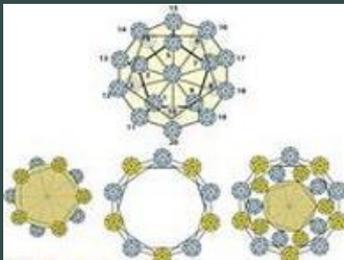


Хрусталь (призма)



В молекуле метана имеет форму правильного тетраэдра.

Икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно **формы вирусов**. Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень - икосаэдр.



В процессе деления яйцеклетки сначала образуется тетраэдр из четырех клеток, затем октаэдр, куб и, наконец, додекаэдро-икосаэдрическая структура гастрюлы. И наконец, самое, пожалуй, главное – структура ДНК генетического кода жизни – представляет собой четырехмерную развертку (по оси времени) вращающегося додекаэдра!

Таким образом, оказывается, что вся Вселенная – от Метагалактики и до живой клетки – построена по одному принципу – бесконечно вписываемых друг в друга додекаэдра и икосаэдра, находящихся между собой в пропорции золотого сечения!

Использование в жизни

С многогранниками мы постоянно встречаемся в нашей жизни – это древние Египетские пирамиды и кубики, которыми играют дети; объекты архитектуры и дизайна, природные кристаллы; вирусы, которые можно рассмотреть только в электронный микроскоп, прочные конструкции – шестиугольные соты, которые пчелы строили задолго до появления человека, книжные полки, вазы, письменный стол, шкатулки, коробочки, аквариумы, часы.



Оригами



**Интерьер
дома**



**Письменный
стол**

шкатулки



Да, мы живем и работаем в параллелепипеде.

Корпус физического факультета КГУ

Параллелепипед, поставленный вертикально на другой параллелепипед.

Рассмотрели

Заключение

Выяснили,

исторические факты происхождения правильных многоугольников, математические законы и использование их в различных сферах деятельности

что идеи Евклида, Платона и Кеплера о связи правильных многогранников с гармоничным устройством мира уже в наше время нашли свое продолжение в интересной научной гипотезе, авторами которой (в начале 80-х годов) явились московские инженеры В. Макаров и В. Морозов.

Мы и Они считают

Ядро Земли имеет форму и свойства растущего кристалла, оказывающего воздействие на развитие всех природных процессов, идущих на планете. Лучи этого кристалла, а точнее, его силовое поле, обуславливают икосаэдро-додекаэдрическую структуру Земли, проявляющуюся в том, что в земной коре как бы проступают проекции вписанных в земной шар правильных многогранников: икосаэдра и додекаэдра.

Их 62 вершины и середины ребер обладают рядом специфических свойств, позволяющих объяснить некоторые непонятные явления.

В трехмерном пространстве деления сферы ведут к созданию пяти правильных многогранников, так называемых пяти тел Платона. Формы Платона связаны с человеческим телом и природой сознания, раскрытие которой ведет не только к пониманию интеллекта Вселенной, но и к эмпирическому восприятию Бога, даруя ощущение глубокой всеобщей взаимосвязи элементов бытия.

При работе над проектом «Мир правильных многогранников» мы прикоснулись к удивительному миру красоты, совершенства, гармонии, узнали имена учёных, художников, которые посвятили этому миру свои труды, являющиеся шедеврами науки и искусства. Ещё раз убедились, что истоки математики – в природе, окружающей нас.

Литература и электронные ИСТОЧНИКИ

1. "Математика - Энциклопедия для детей" М.: Аванта +, 1998
2. Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи. К.: Высшая школа, 1989.
3. Стахов А. Коды золотой пропорции.
4. Смирнова И.М. В мире многогранников. - М.: Просвещение, 1995
5. Журнал «Наука и техника»
6. Журнал «Квант», 1973, № 8.
7. Журнал «Математика в школе», 1994, № 2; № 3.

8. <http://ru.wikipedia.org>
9. <http://festival.1september.ru>
10. <http://images.yandex.ru>
11. <http://pedsovet.su>
12. <http://museum.ru>