Применение предела последовательности в физике и геометрии

Нам знакомы приложения теории пределов в геометрии. Например, площадь круга, объем цилиндра, конуса и шара были определены, а затем и вычислены как соответствующие пределы. Укажем другой способ использования понятия предела в решении задач, который называется методом суммирования.

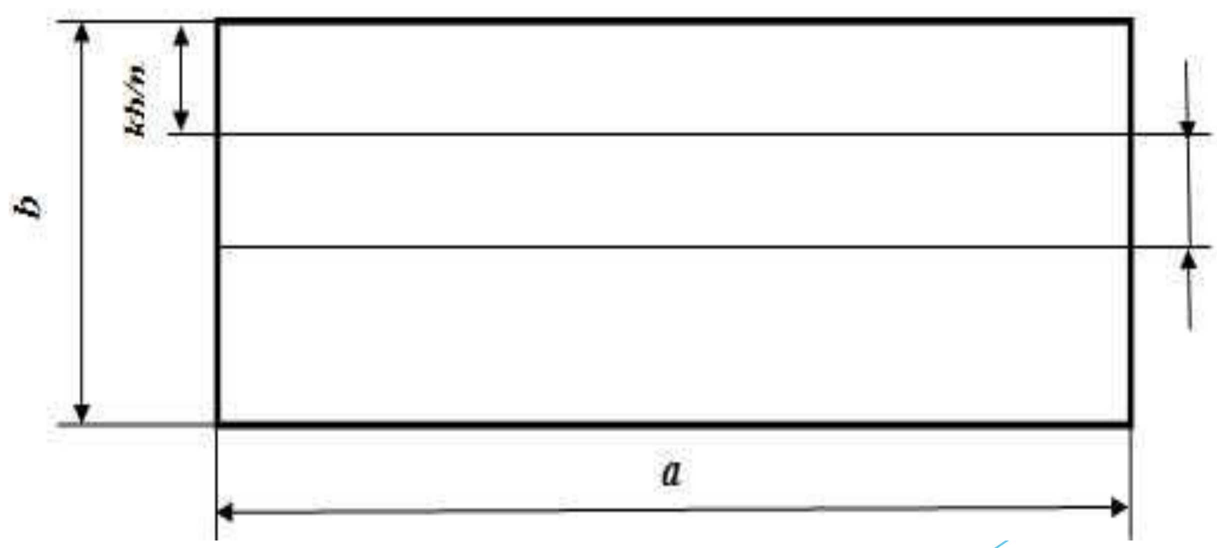
Задача: Определить давление p, производимое водой, наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, имеющих длину a=50 см., высоту b=30 см.

Решение: Согласно закону Паскаля давление жидкости распространяется во все стороны равномерно и направлено всюду перпендикулярно к поверхности сосуда. Величина этого давления на площадку равна весу столба жидкости, высота которого равна глубине этой площадки, а основание – её площади.

Кроме того, если стенку разбить на отдельные полоски, то давление на всю стенку будет совпадать с суммой давлений на эти полоски. Этим мы и воспользуемся для решения задачи.

Чтобы подсчитать давление на стенку аквариума, мы разобьем её высоту *b* на *n* равных частей и через точки деления проведем отрезки, параллельные стороне *a*.

В результате вся стенка аквариума разобьется на тонкие горизонтальные слои в форме прямоугольников со сторонами *a* и



При достаточно не большом *n* высота горизонтального слоя, равная

будет очень малой, и мы можем считать, что все точки k-го слоя находятся на одной и той же глубине, равной

Тогда давление воды на *k*-ый слой приближенно будет равно:

Давление на всю стенку аквариума будет приближенно равно:

За истинную величину давления принимается предел этого выражения при то есть давление воды на вертикальную стенку равно произведению площади стенки на половину ее высоты. Подставив данные, получим p=22,50 кг..

Решение уравнений с помощью степенных рядов

Многие уравнения и системы уравнений с двумя и более переменными, некоторые из которых надо найти через остальные, можно решать с помощью степенных рядов. Для этого заданные функции, через которые записано уравнение, надо разложить в степенные ряды и искать неизвестные в виде рядов. После этого для нахождения неизвестных коэффициентов рядов будут получены новые уравнения, решения которых во многих случаях находятся без особых затруднений. Полученные таким образом решения исходного уравнения вполне пригодны как для вычислений, так и для других операций.

Продемонстрируем описанный метод на примере уравнения Кеплера

$$y = a + x\sin y,$$

играющего важную роль в астрономии. Здесь y – эксцентрическая аномалия планеты, a – ее средняя аномалия, x – эксцентриситет орбиты планеты.

Считая y неизвестной функцией от x, будем искать ее в виде

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots \qquad (6)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \qquad (5)$$

Разложив siny по формуле (5) в ряд Тейлора по степеням y и подставив вместо y ряд (6), после возведения этого ряда в степени и приведения подобных членов получим

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots = a + x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) -$$

$$-\frac{x}{3!}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)^3 + \dots$$

Аномалия (в небесной механике) — угол, используемый для описания движения тела по эллиптической орбите.

Из этого равенства, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, найдем последовательно неизвестные c0, c1, c2 ...

$$c_0 = a,$$

$$c_1 = c_0 - \frac{c_0^3}{3!} + \frac{c_0^5}{5!} - \ldots = \sin c_0 = \sin a,$$

$$c_2 = c_1 - \frac{3}{3!}c_0^2 c_1 + \frac{5}{5!}c_0^4 c_1 - \ldots =$$

$$= c_1\left(1 - \frac{c_0^2}{2!} + \frac{c_0^4}{4!} - \ldots\right) = \sin a \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a, \ldots$$

и саму функцию

$$y = a + (\sin a)x + \frac{1}{2}(\sin 2a)x^2 + \frac{1}{2}(2\sin a - 3\sin^2 a)x^3 + \ldots$$

Доказано, что это разложение верно при |x| < < 0,6627…
Если уравнение Кеплера записать в виде y = x + bsiny и снова считать y неизвестной функцией от x, то при $b \neq 1$, выполнив аналогичные действия, получим

$$y = \frac{1}{1-b}x - \frac{b}{3!(1-b)^4}x^3 + \frac{b+9b^2}{5!(1-b)^7}x^5 - \ldots$$

Некоторые применения ряда Фурье на практике

Анализ поля ветра при адаптации к особенностям рельефа (как эффективней расположить «Ветряки» на поле

Для прогнозирования и оптимизации поставок предприятия оптовой торговли в аспекте управления собственным и арендуемым транспортом

Для анализа конструкции нефтегазового насоса

Спасибо за внимание

Применение рядов в экономике

В настоящем разделе мы рассмотрим две задачи, касающиеся последовательностей и рядов, применительно к экономическим задачам.
Пусть имеется вклад N (рублей) в банке. По прошествии определенного промежутка времени банк начисляет проценты. Обозначим через p % годовых.
Если промежуток времени, за который начисляются проценты, меньше, чем год, например $\frac{1}{n}$ от года, то за этот промежуток времени банк начислит $\frac{p}{n}$ %.

Например, может быть ежеквартальное начисление процентов, тогда за каждый квартал будет начислено $\frac{p}{4}$ %. Иногда применяют ежемесячное начисление процентов. В этом случае за каждый месяц банк будет начислять $\frac{p}{12}$ %. В принципе, возможна и ситуация с ежедневным начислением $\frac{p}{365}$ %.

Возможны различные ситуации начисления процентов:

с капитализацией (когда проценты прибавляются к основному вкладу и тоже участвуют в начислении процентов в последующие временные промежутки),

без капитализации (проценты переводятся на отдельный беспроцентный счет или выплачиваются вкладчику, так что основной вклад остается неизменным).

Рассмотрим вначале второй случай. Пусть вклад находится n' временных промежутков, за каждый из которых банк начисляет $\frac{p}{n}$ %, при ставке р % годовых. После первого промежутка банк начислит

$N\frac{p}{100n}$ рублей (множитель 100 взялся из-за перевода процентов в доли от единицы, то есть 10% соответствует 0.1 доле), после второго еще $N\frac{p}{100n}$

и так далее. Спустя n' временных промежутков к основному вкладу N рублей дополнительно можно получить $N\frac{pn'}{100n}$ рублей.

Если вклад хранится Y лет, то $n' = Yn$ и сумма вклада и процентов за этот срок составит $N(1 + Yp/100)$ рублей.