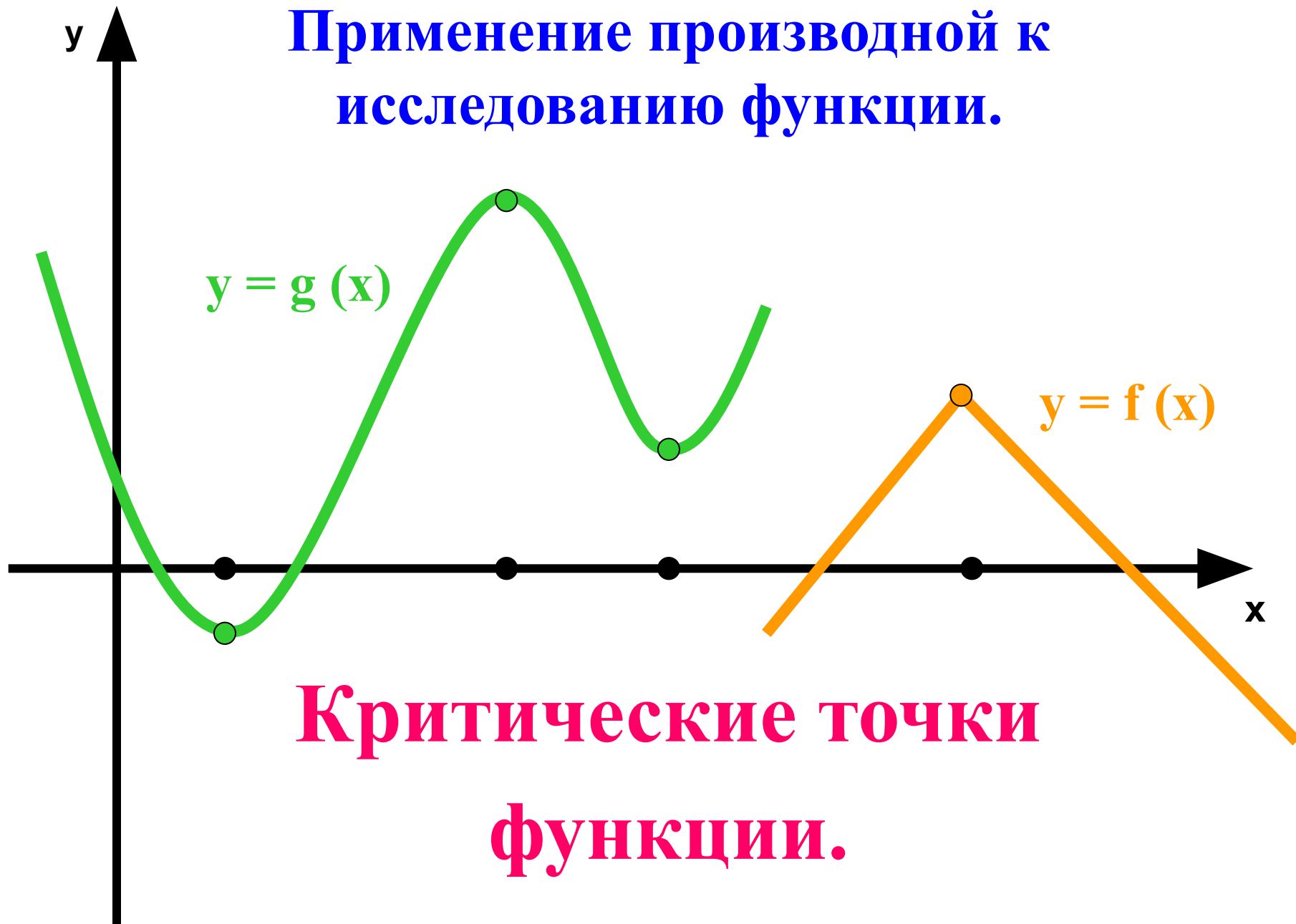


**Мы продолжаем изучать тему  
«Производная функции»**

**Мы познакомимся с применением  
производной для нахождения  
критических точек функции**

**Желаю успехов  
в изучении темы!**

# Применение производной к исследованию функции.



Критические точки  
функции.

## **Повторение:**

~ описание свойств функции по её графику

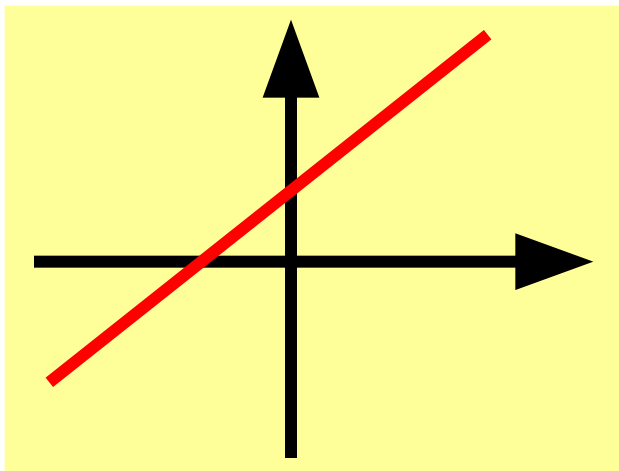
## **Изучение нового материала:**

~ точки экстремума функции

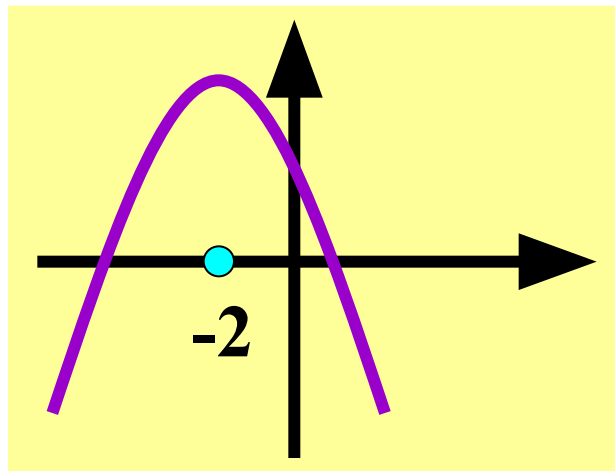
~ стационарные точки функции

~ критические точки функции

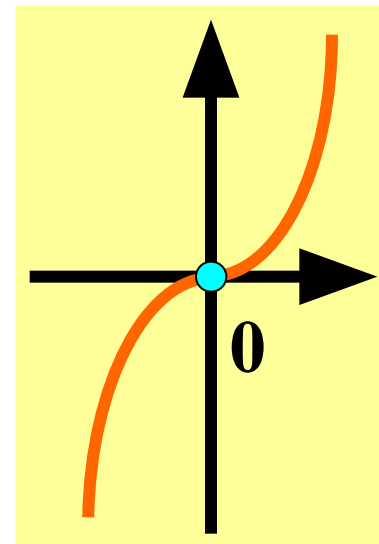
# Повторение



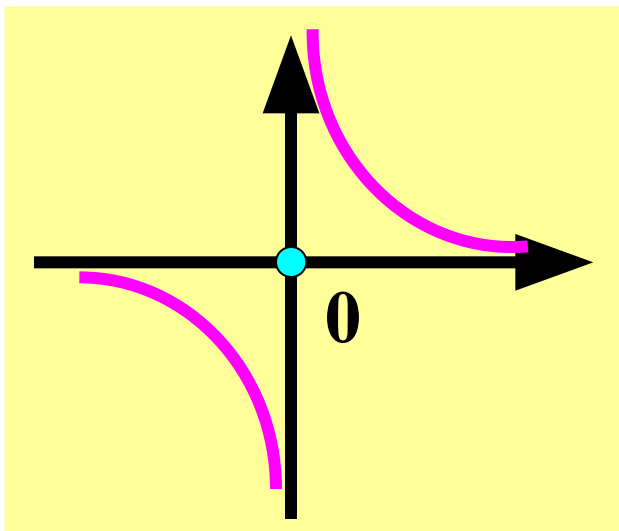
$$f(x) = \dots$$



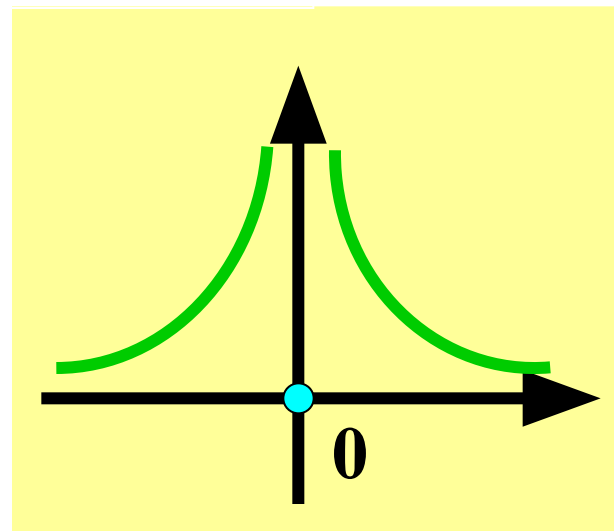
$$f(x) = \dots$$



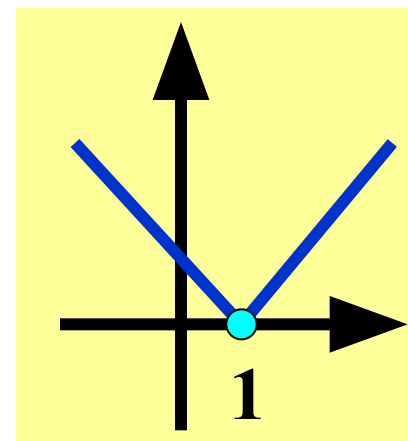
$$f(x) = \dots$$



$$f(x) = \dots$$



$$f(x) = \dots$$



$$f(x) = \dots$$

# Постановка проблемы

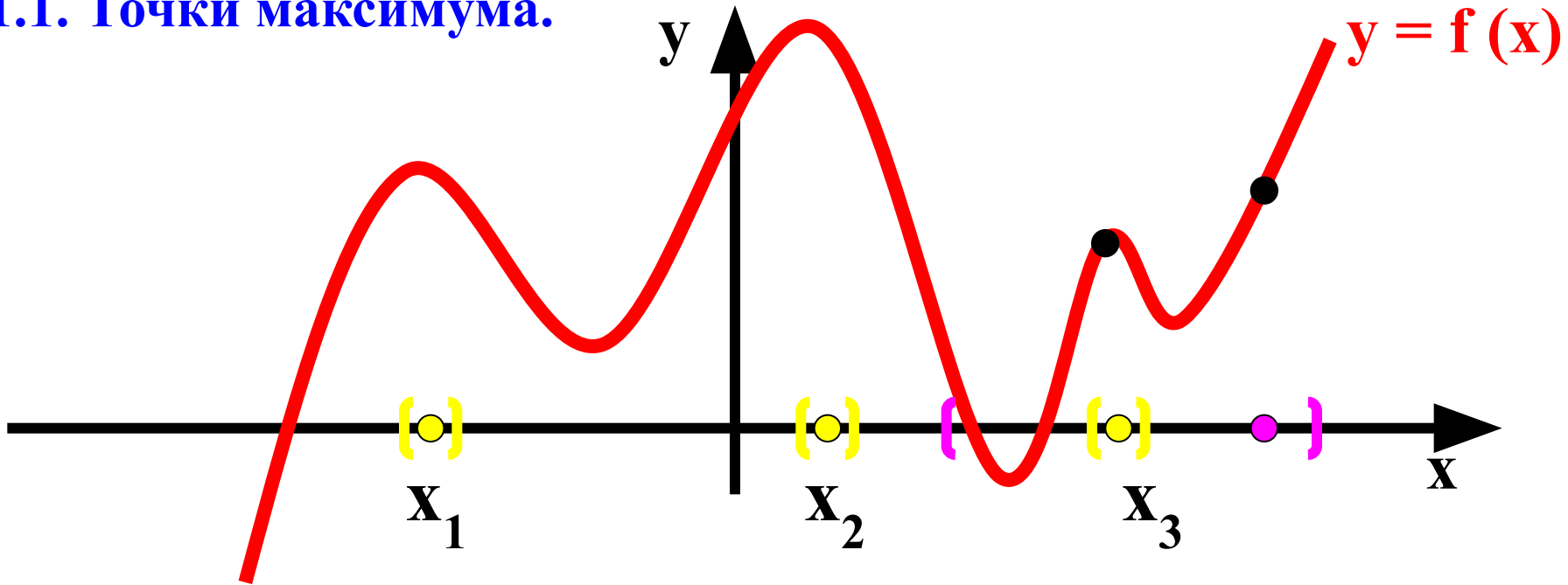
Как называются **точки**,  
в которых функция **«меняет характер»**?

Как найти эти  
точки,  
не выполняя  
построения  
графика  
функции?



# 1. Точки экстремума.

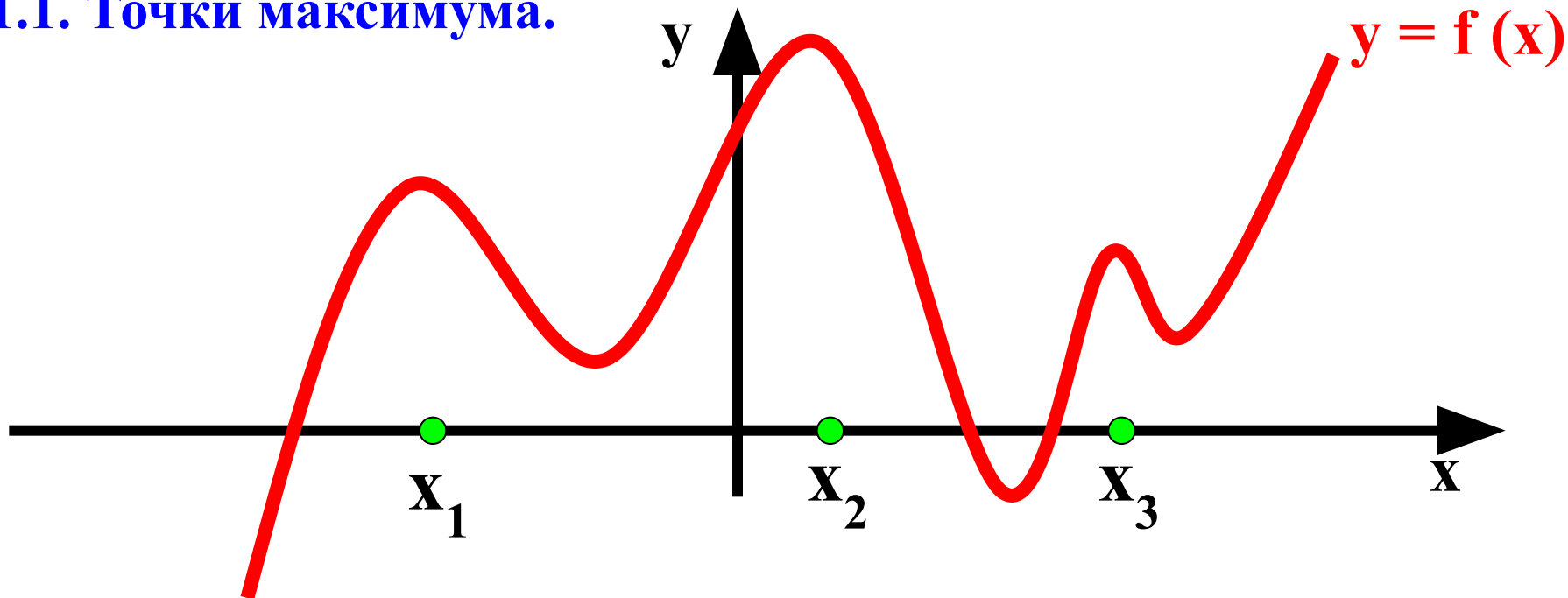
## 1.1. Точки максимума.



Точка  $x_0$  называется *точкой максимума* функции  $f(x)$ , если существует такая окрестность точки  $x_0$ , что для всех  $x \neq x_0$  из этой окрестности выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$ .

# 1. Точки экстремума.

## 1.1. Точки максимума.



$$f(x_1) > f(x)$$

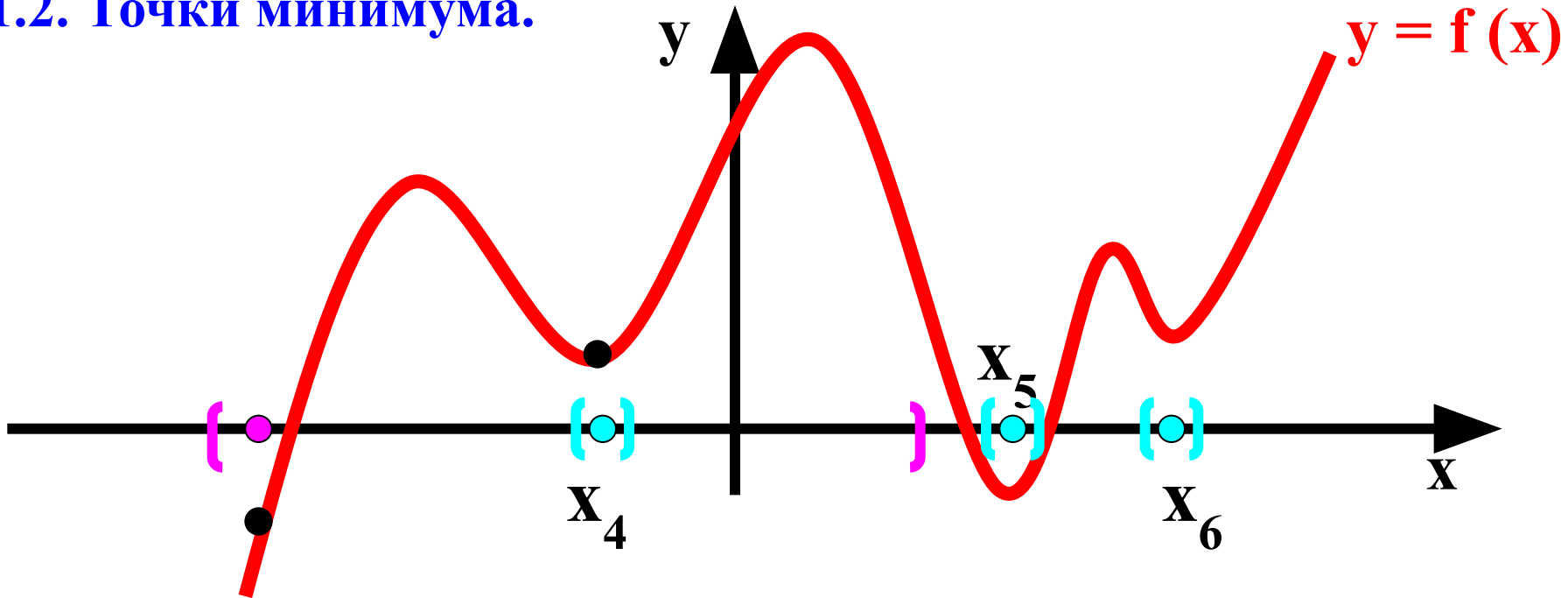
$$f(x_2) > f(x)$$

$$f(x_3) > f(x)$$

**Точки максимума:  $X=X_1$ ,  $X=X_2$ ,  $X=X_3$**

# 1. Точки экстремума.

## 1.2. Точки минимума.

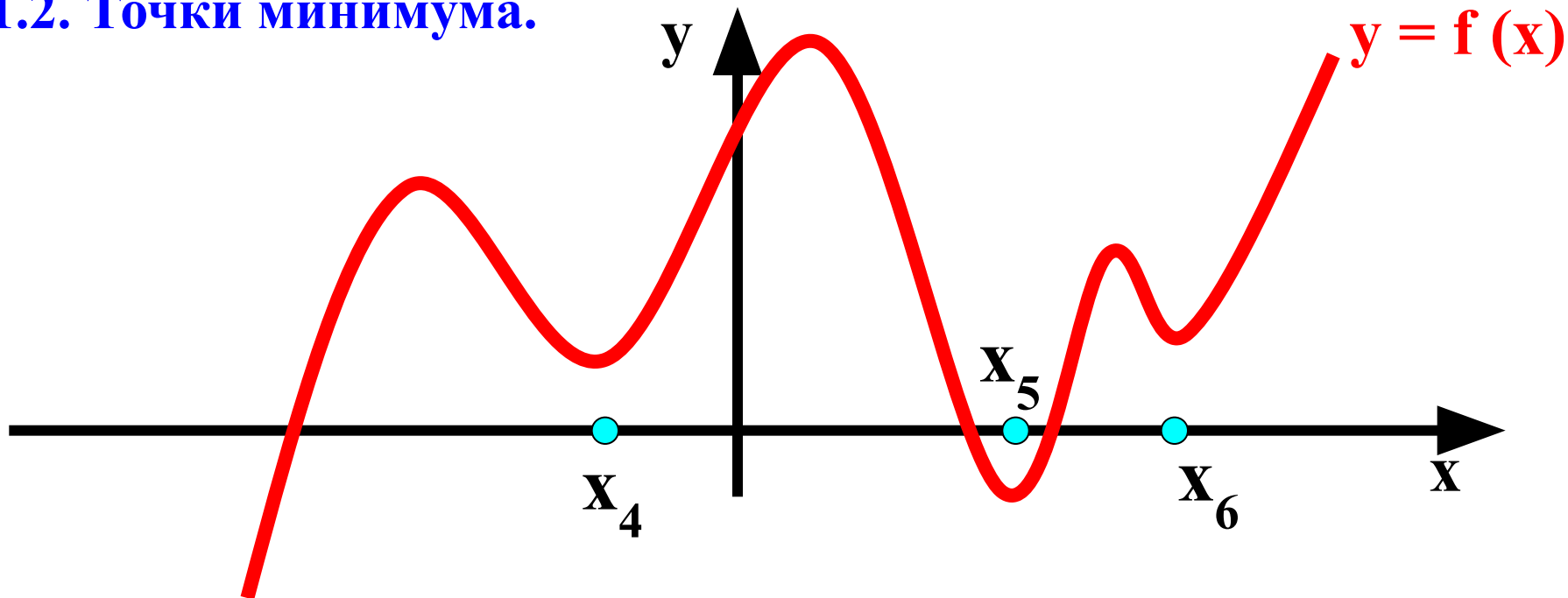


Точка  $x_0$  называется *точкой минимума* функции  $f(x)$ , если существует такая окрестность точки  $x_0$ , что для всех  $x \neq x_0$  из этой окрестности выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$ .



# 1. Точки экстремума.

## 1.2. Точки минимума.



$$f(x_4) < f(x)$$

$$f(x_5) < f(x)$$

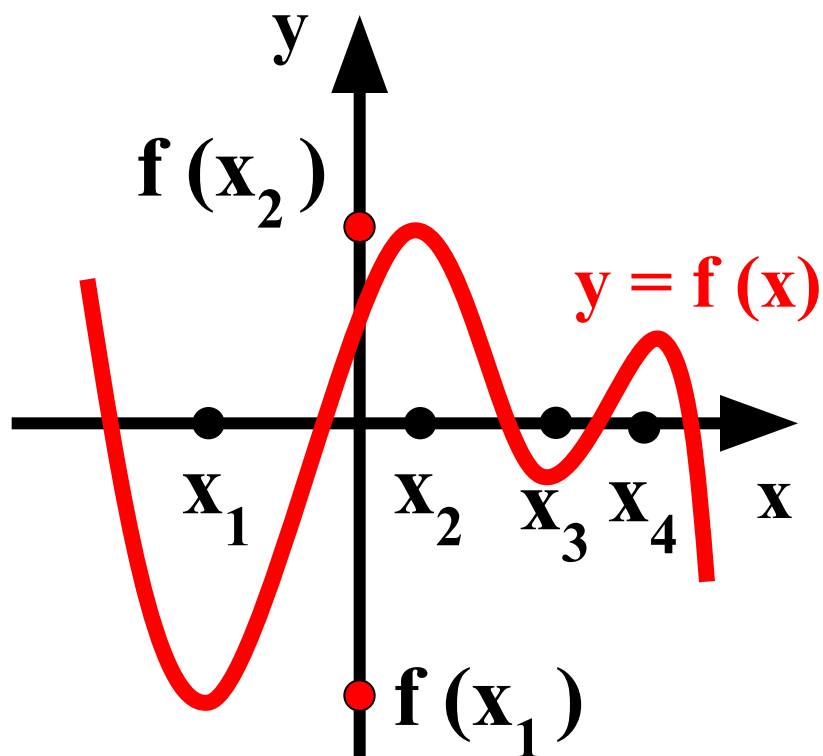
$$f(x_6) < f(x)$$

Точки минимума:  $X = X_4$ ,  $X = X_5$ ,  $X = X_6$

# 1. Точки экстремума.

## 1.3.

Точки максимума и точки минимума называются *точками экстремума* функции.



Значение функции в точке экстремума называется *экстремумом* функции.

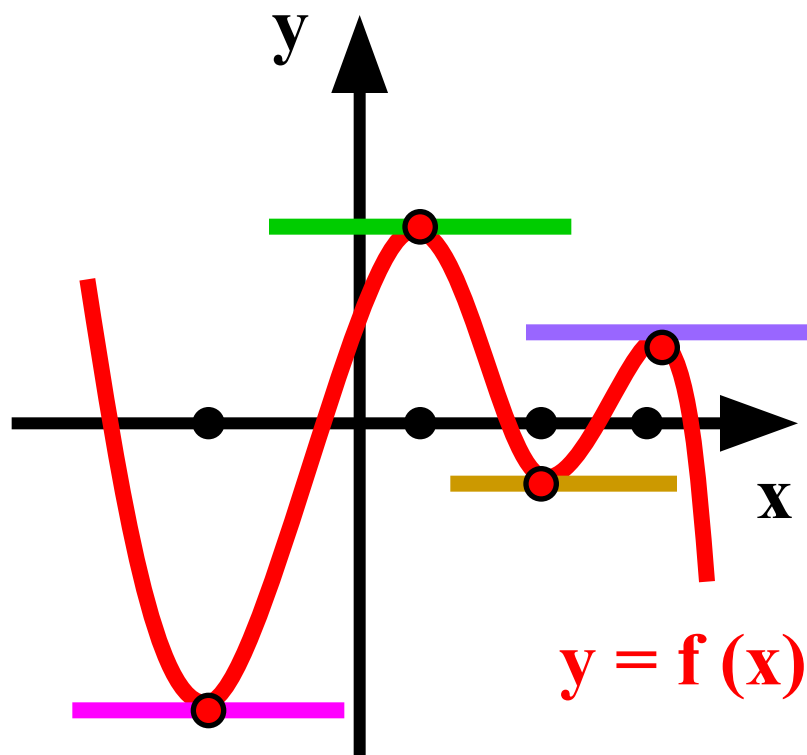
Максимум функции	$f(x_2)$	$f(x_4)$
------------------	----------	----------

Минимум функции	$f(x_1)$	$f(x_3)$
-----------------	----------	----------

# 1. Точки экстремума.

1.4.

Касательная к графику функции, проведённая в точке экстремума параллельна оси  $Ox$ .



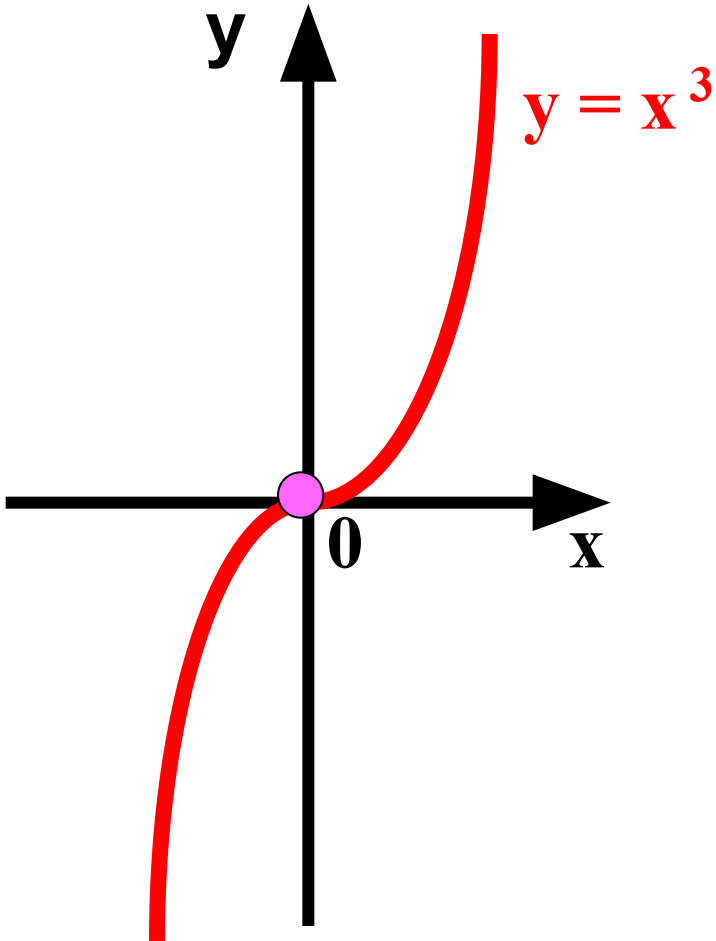
**Теорема Ферма.**

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и дифференцируема в этой точке.

Если  $x_0$  — точка экстремума функции  $f(x)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

$$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = f'(x_3) = 0$$

## 2. Точки перегиба.



$$y'(x) = 3x^2$$

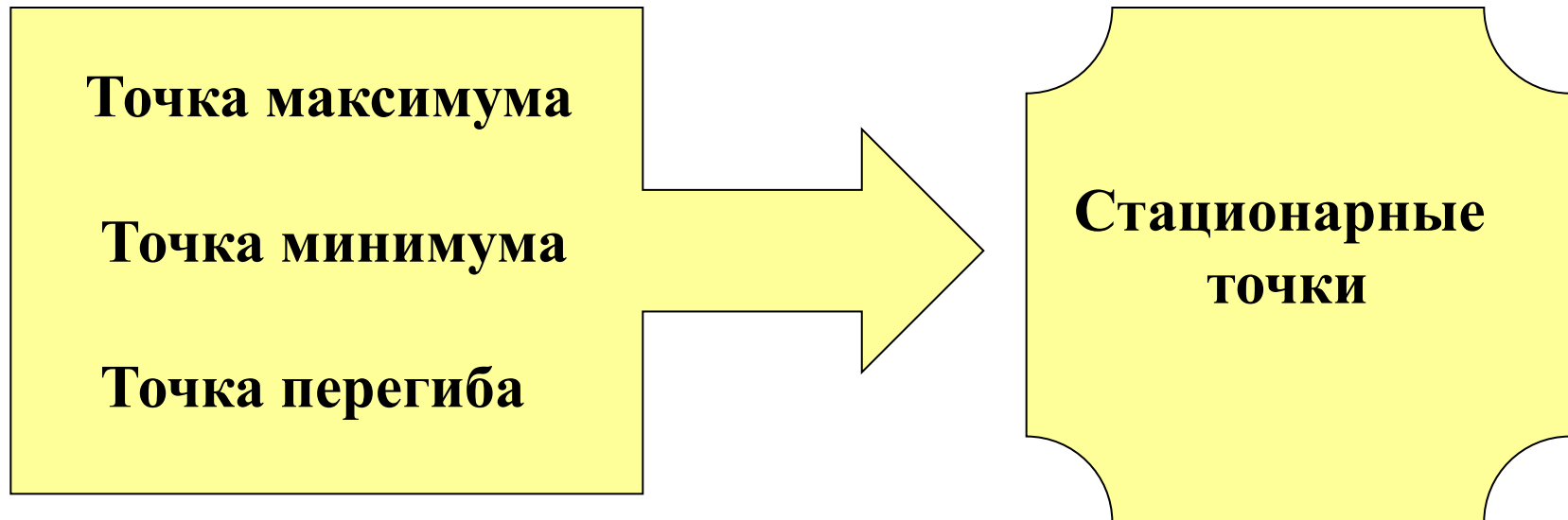
$$y'(0) = 0$$

точка  $x = 0$  не является  
точкой экстремума  
функции

точка  $x = 0$  является  
*точкой перегиба*  
функции

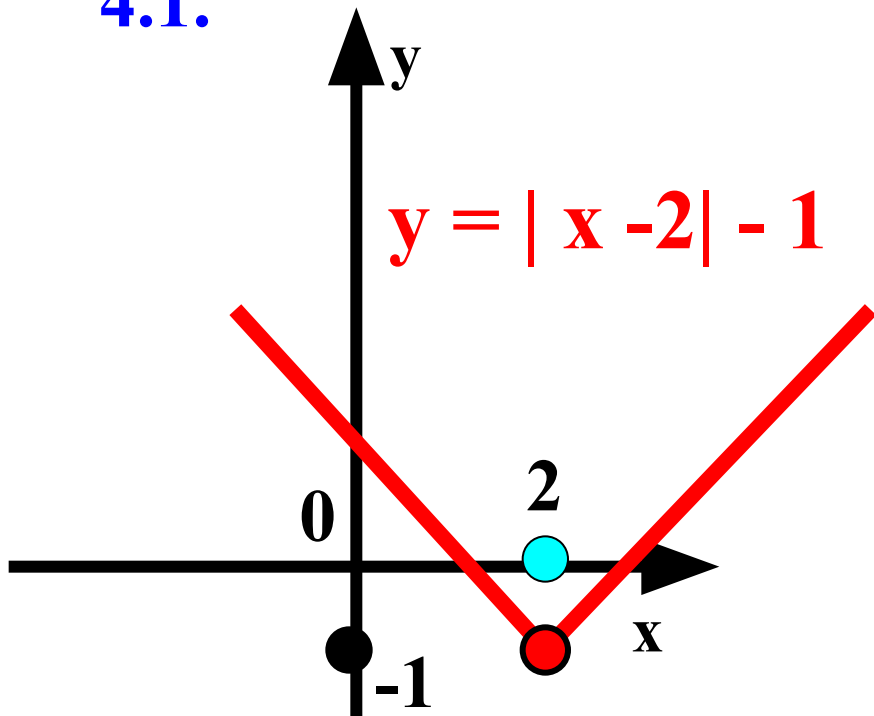
### 3. Стационарные точки.

Точки в которых производная функции равна нулю, называются *стационарными точками* функции.



## 4. Критические точки функции.

4.1.



**Функция может иметь экстремум в точке, в которой она не имеет производной.**

**точка  $x = 2$  является точкой экстремума (точкой минимума) функции**

**в точке  $x = 2$  функция не имеет производной**

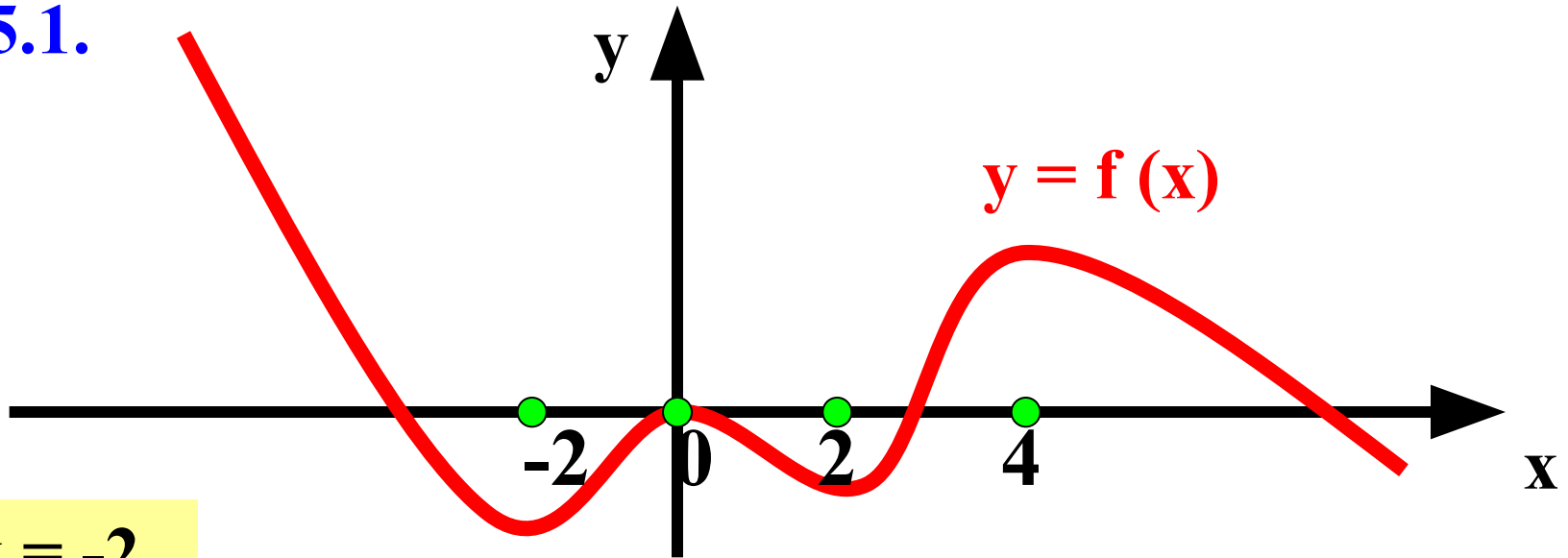
## 4. Критические точки функции.

### 4.2.

**Внутренняя точка области определения функции, в которой эта функция имеет производную, равную нулю или не имеет производной, называется *критической точкой* этой функции.**

## 5. Выполнение заданий.

5.1.



$x = -2$

$x = 0$

$x = 2$

$x = 4$

точка минимума

точка перегиба

критическая точка

точка максимума

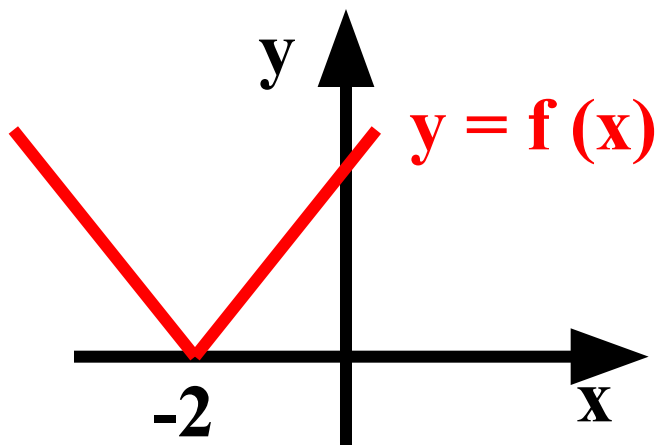
стационарная точка

точка экстремума



## 5. Выполнение заданий.

5.2.



$f(x) = \dots$

Верно ли, что:

1.  $x = -2$  – точка перегиба

← **НЕТ**

2. минимум функции равен  $(-2)$

← **НЕТ**

3.  $x = -2$  - точка минимума

← **ДА**

4. минимум функции равен  $0$

← **ДА**

5.  $f'(x) = 0$   
при  $x = -2$

← **НЕТ**

6.  $f'(x)$  не существует  
при  $x = -2$

← **ДА**

## 5. Выполнение заданий.

5.3. Найдите критические точки функции  $f(x) = x^3 + 0,5x^2 - 4x$

1. Функция определена для всех значений  $x$ .

2. Найдём производную функции

$$f'(x) = 3x^2 + x - 4$$

### **Теорема Ферма.**

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и дифференцируема в этой точке.

Если  $x_0$  – точка экстремума функции  $f(x)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

**Теорема Ферма.**  
Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и дифференцируема в этой точке.  
Если  $x_0$  – точка экстремума функции  $f(x)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

## 5. Выполнение заданий.

### 5.4.

**Теорема Ферма.** Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и дифференцируема в этой точке. Если  $x_0$  – точка экстремума функции  $f(x)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

### 1. Функция определена для $x \neq 0$ .

**Теорема Ферма.**

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и дифференцируема в этой точке.

Если  $x_0$  – точка экстремума функции  $f(x)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

**Теорема Ферма.**


Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и дифференцируема в этой точке.

Если  $x_0$  – точка экстремума функции  $f(x)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

**Теорема Ферма.** Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и дифференцируема в этой точке. Если  $x_0$  – точка

## Итоги урока

- ▲ Точка минимума функции
- ▲ Точка максимума функции
- ▲ Точки экстремума функции
- ▲ Точка перегиба функции
- ▲ Стационарные точки функции
- ▲ Критические точки функции
- ▲ Экстремум функции
- ▲ Свойство производной в точке экстремума

A blue curve is plotted on a coordinate system with black axes. The curve starts in the lower-left quadrant, crosses the x-axis, reaches a high peak in the upper-left quadrant, then descends, crossing the x-axis again, and continues with smaller oscillations in the lower-right quadrant. A yellow rectangular box is centered over the curve, containing text. Below the x-axis, a yellow smiley character with arms and legs is standing.

**Желаю всем  
успехов в изучении темы!**

