

**Мы продолжаем изучать тему
«Производная функции»**

**Мы познакомимся с применением
производной для нахождения
критических точек функции**

**Желаю успехов
в изучении темы!**

Применение производной к исследованию функции.



Критические точки
функции.

Повторение:

~ описание свойств функции по её графику

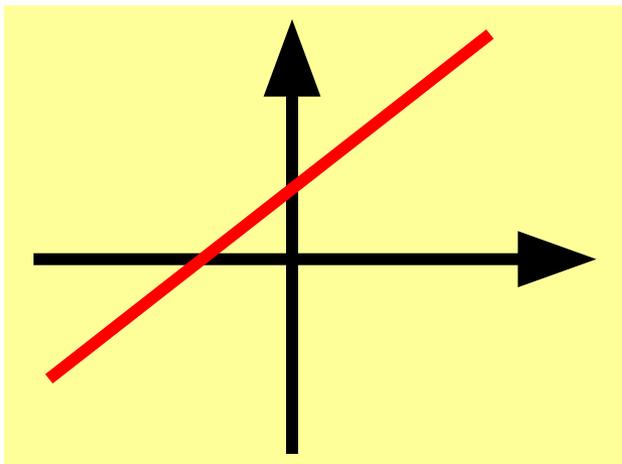
Изучение нового материала:

~ точки экстремума функции

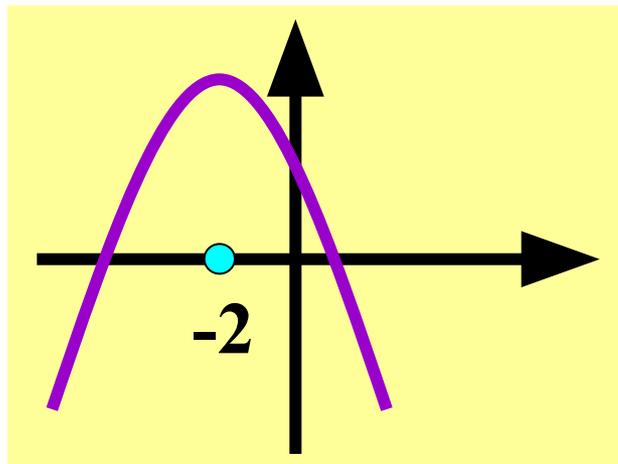
~ стационарные точки функции

~ критические точки функции

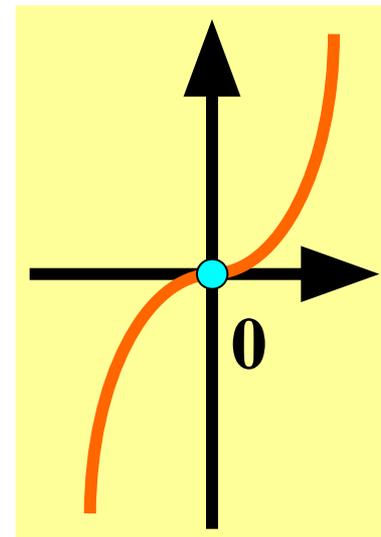
Повторение



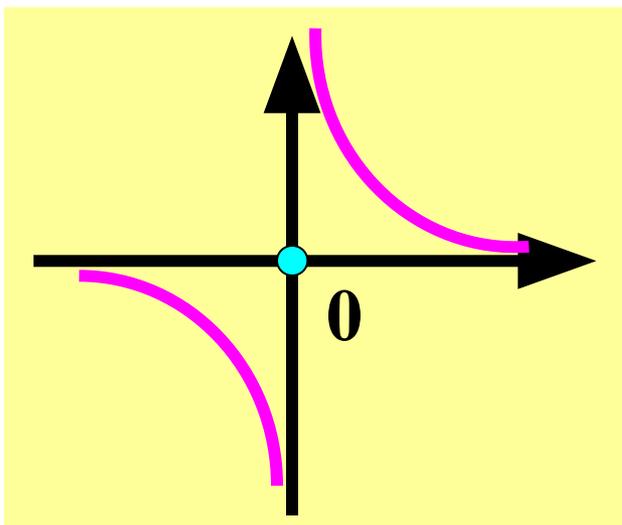
$$f(x) = \dots$$



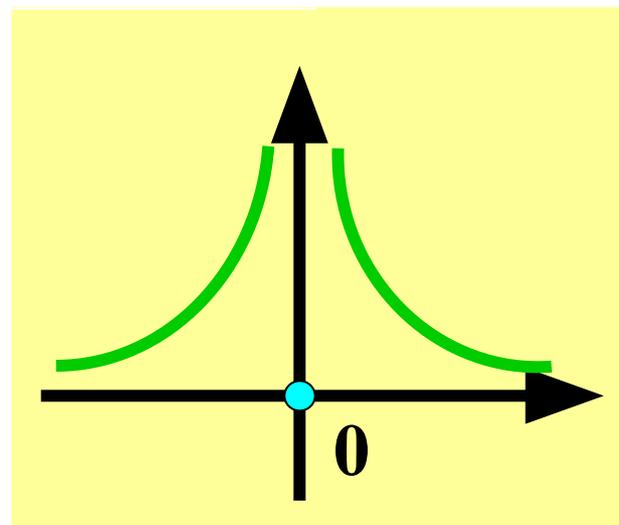
$$f(x) = \dots$$



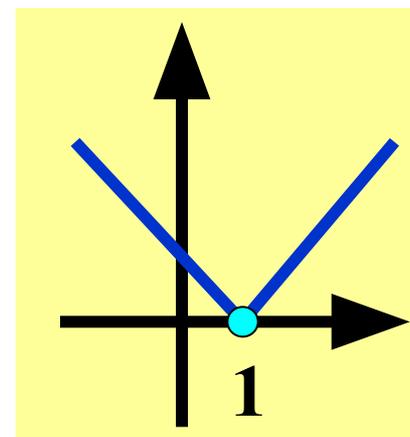
$$f(x) = \dots$$



$$f(x) = \dots$$



$$f(x) = \dots$$



$$f(x) = \dots$$

Постановка проблемы

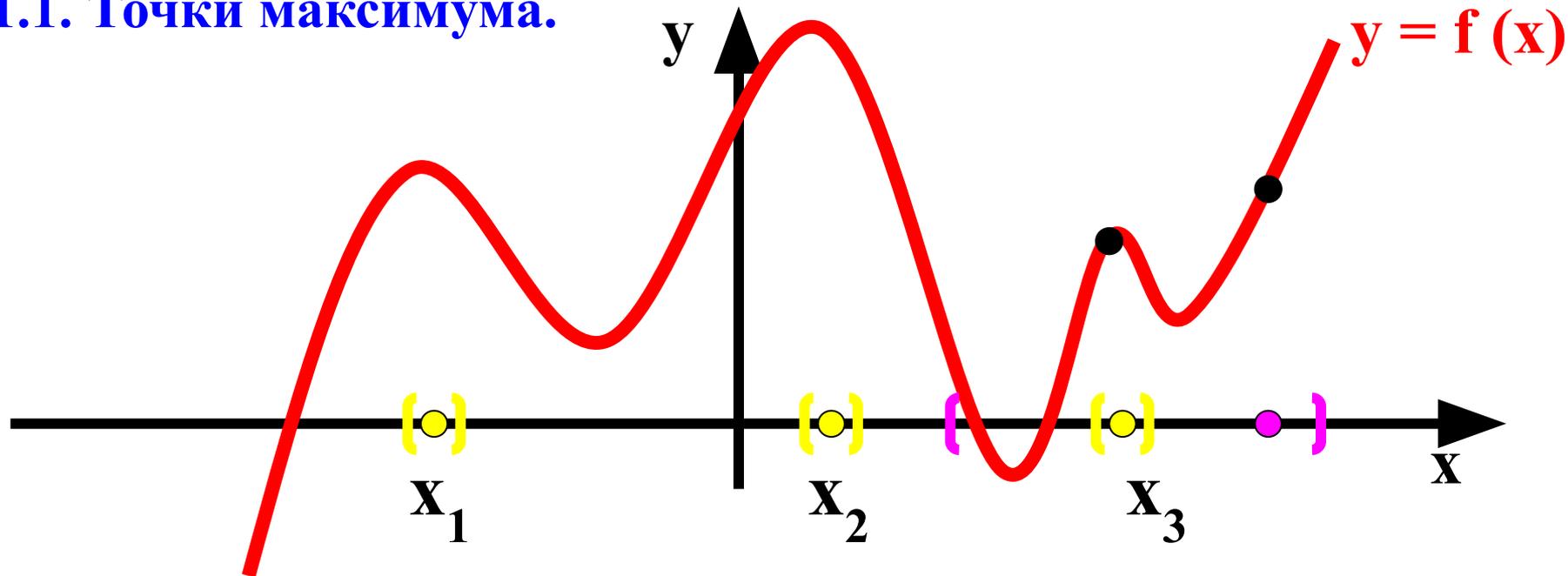
Как называются **точки**,
в которых функция **«меняет характер»**?

Как найти эти
точки,
не выполняя
построения
графика
функции?



1. Точки экстремума.

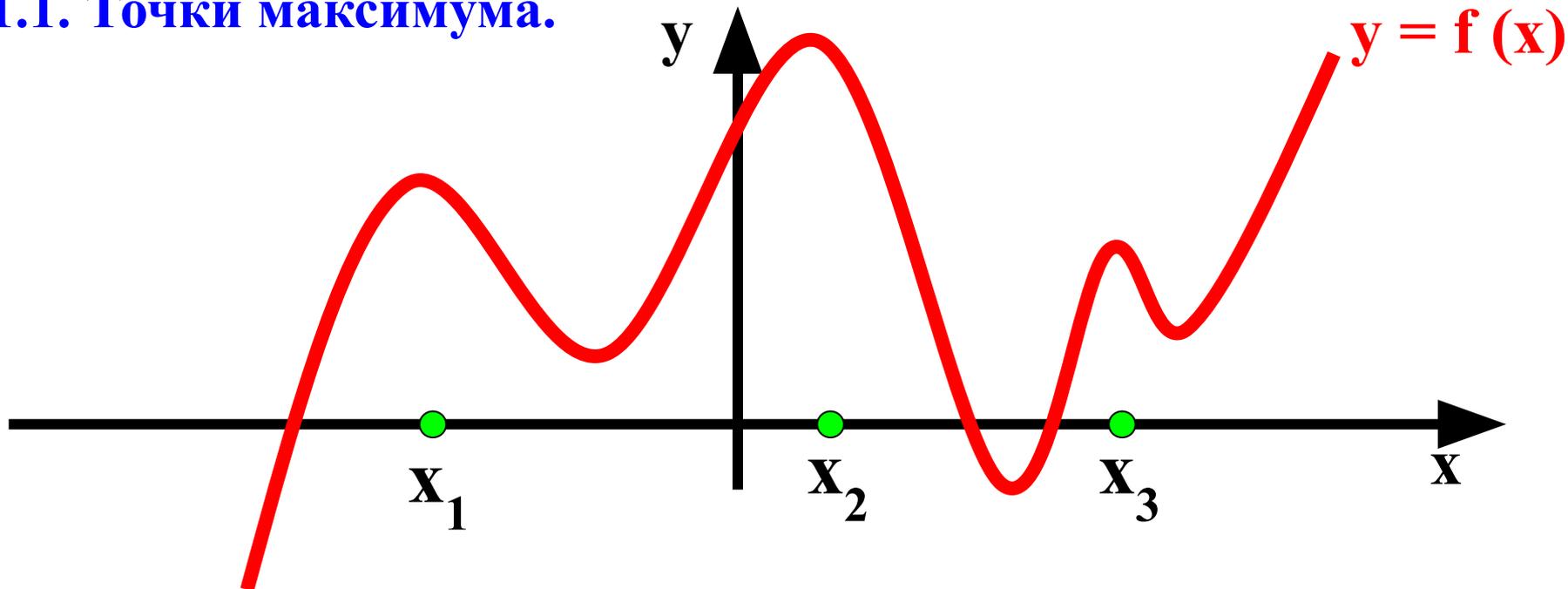
1.1. Точки максимума.



Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

1. Точки экстремума.

1.1. Точки максимума.



$$f(x_1) > f(x)$$

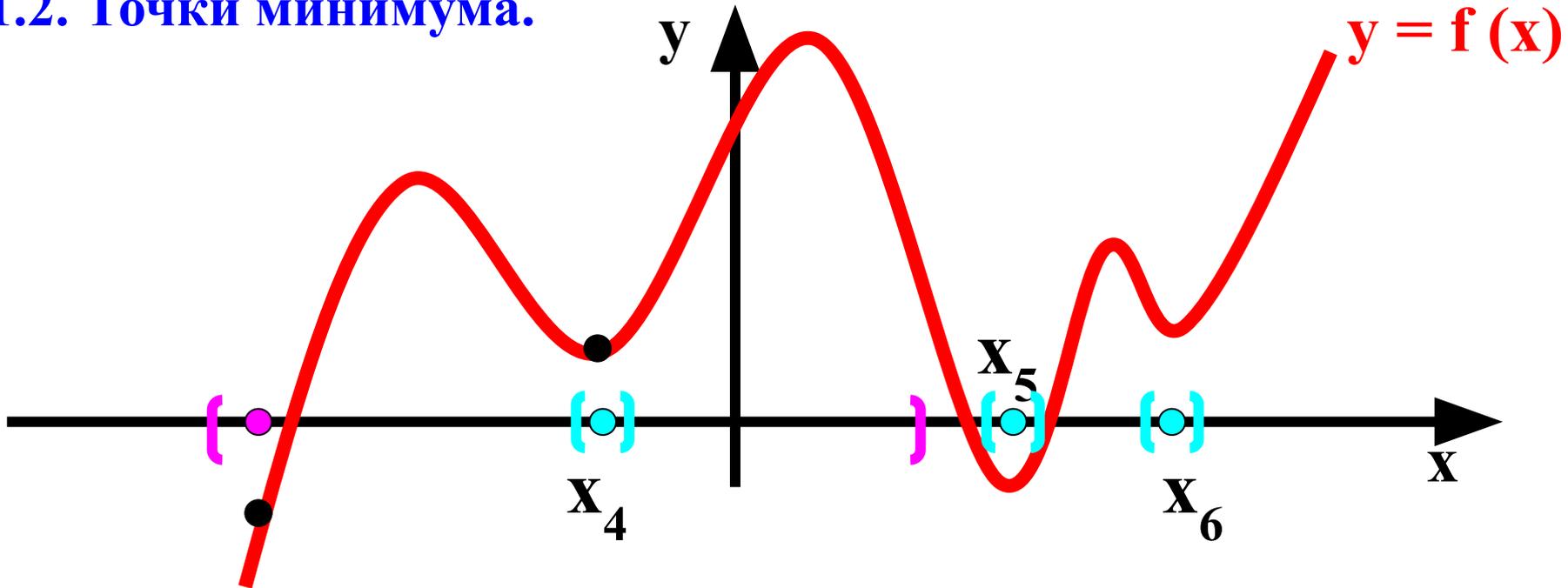
$$f(x_2) > f(x)$$

$$f(x_3) > f(x)$$

Точки максимума: $X=X_1$, $X=X_2$, $X=X_3$

1. Точки экстремума.

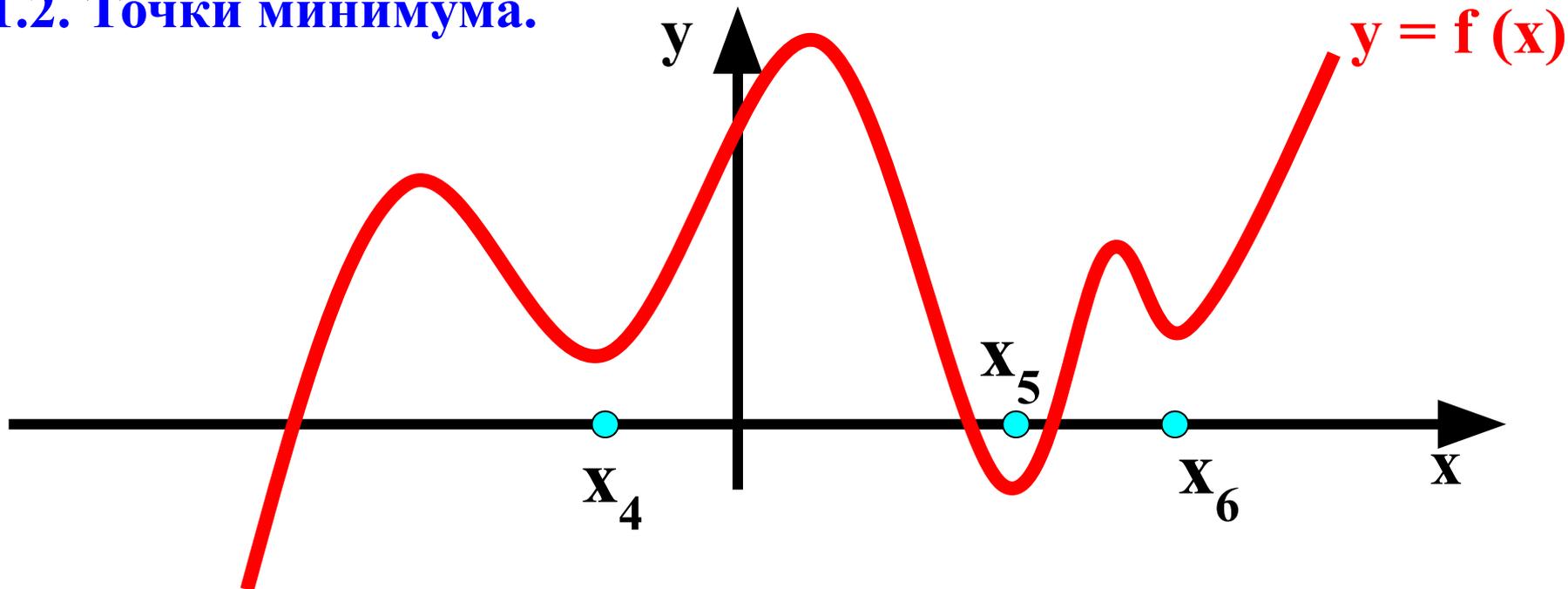
1.2. Точки минимума.



Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

1. Точки экстремума.

1.2. Точки минимума.



$$f(x_4) < f(x)$$

$$f(x_5) < f(x)$$

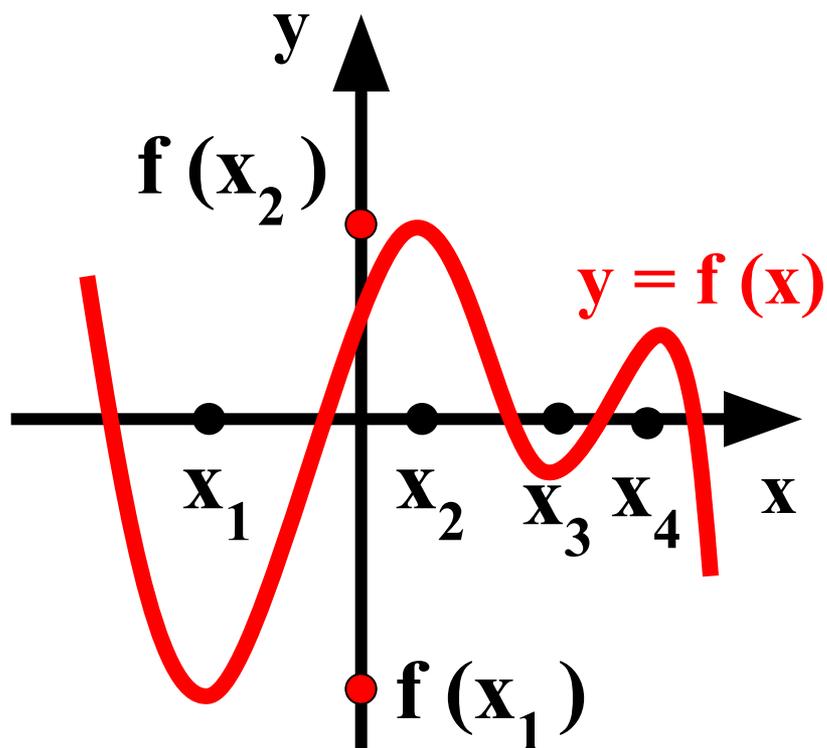
$$f(x_6) < f(x)$$

Точки минимума: $X = X_4$, $X = X_5$, $X = X_6$

1. Точки экстремума.

1.3.

Точки максимума и точки минимума называются *точками экстремума* функции.



Значение функции в точке экстремума называется *экстремумом* функции.

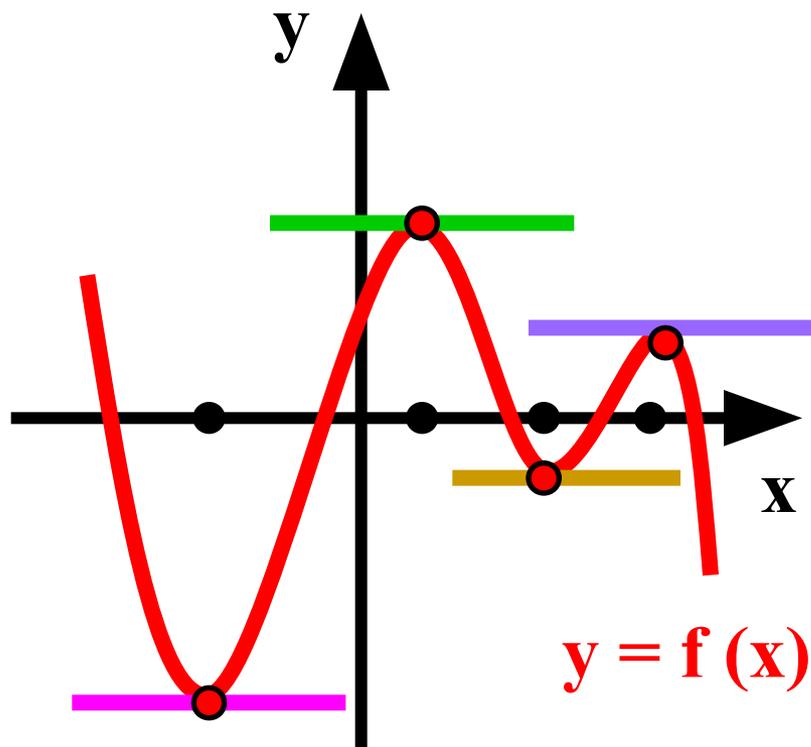
| | | |
|------------------|----------|----------|
| Максимум функции | $f(x_2)$ | $f(x_4)$ |
|------------------|----------|----------|

| | | |
|-----------------|----------|----------|
| Минимум функции | $f(x_1)$ | $f(x_3)$ |
|-----------------|----------|----------|

1. Точки экстремума.

1.4.

Касательная к графику функции, проведённая в точке экстремума параллельна оси Ox .



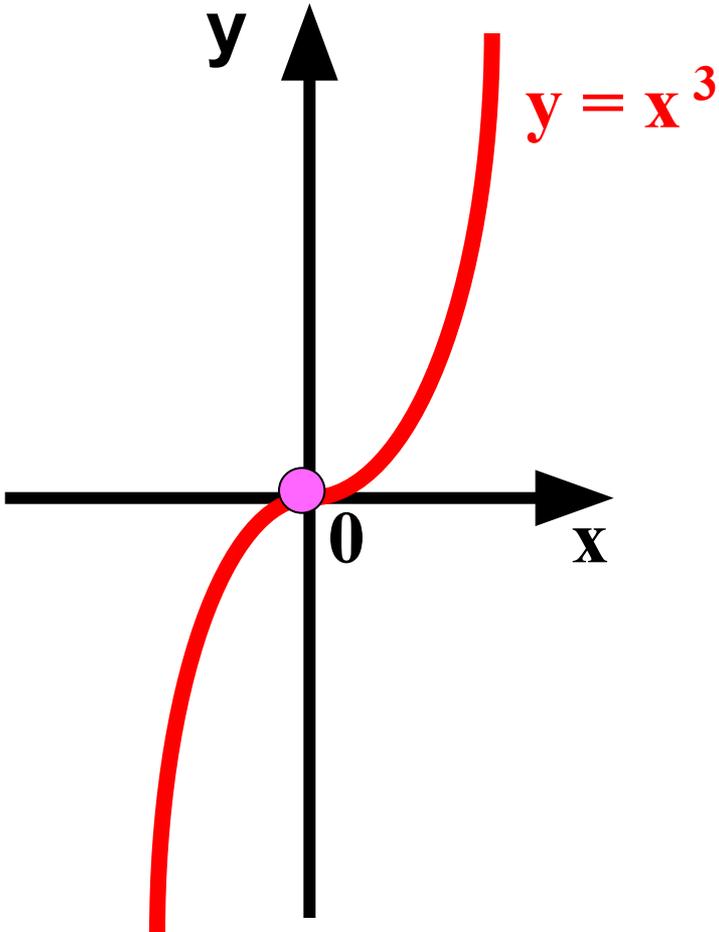
Теорема Ферма.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке.

Если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

$$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = f'(x_3) = 0$$

2. Точки перегиба.



$$y'(x) = 3x^2$$

$$y'(0) = 0$$

точка $x = 0$ не является
точкой экстремума
функции

точка $x = 0$ является
точкой перегиба
функции

3. Стационарные точки.

Точки в которых производная функции равна нулю, называются *стационарными точками* функции.

Точка максимума

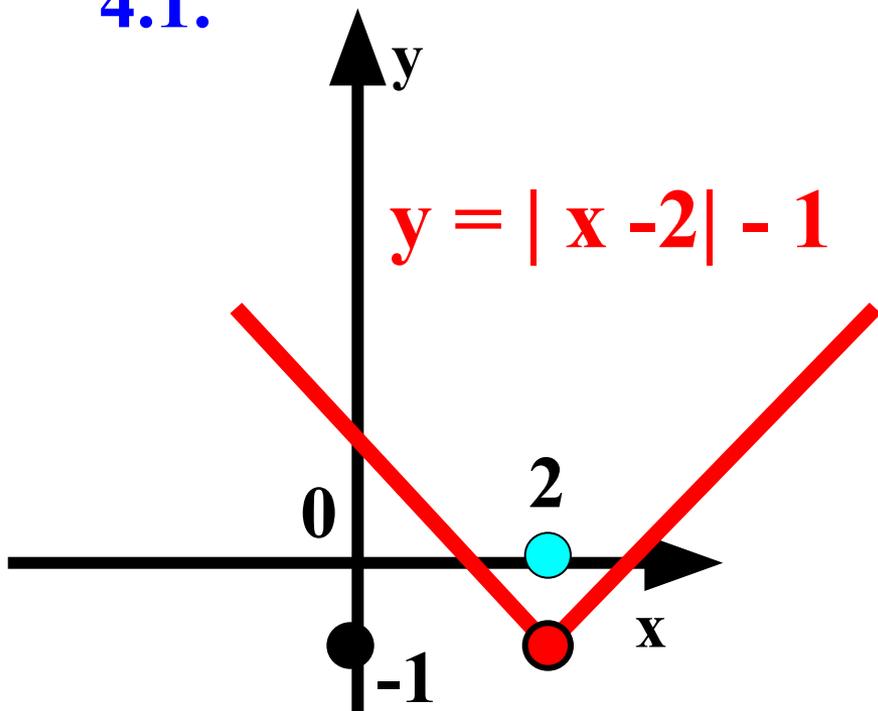
Точка минимума

Точка перегиба

Стационарные
точки

4. Критические точки функции.

4.1.



Функция может иметь экстремум в точке, в которой она не имеет производной.

точка $x = 2$ является точкой экстремума (точкой минимума) функции

в точке $x = 2$ функция не имеет производной

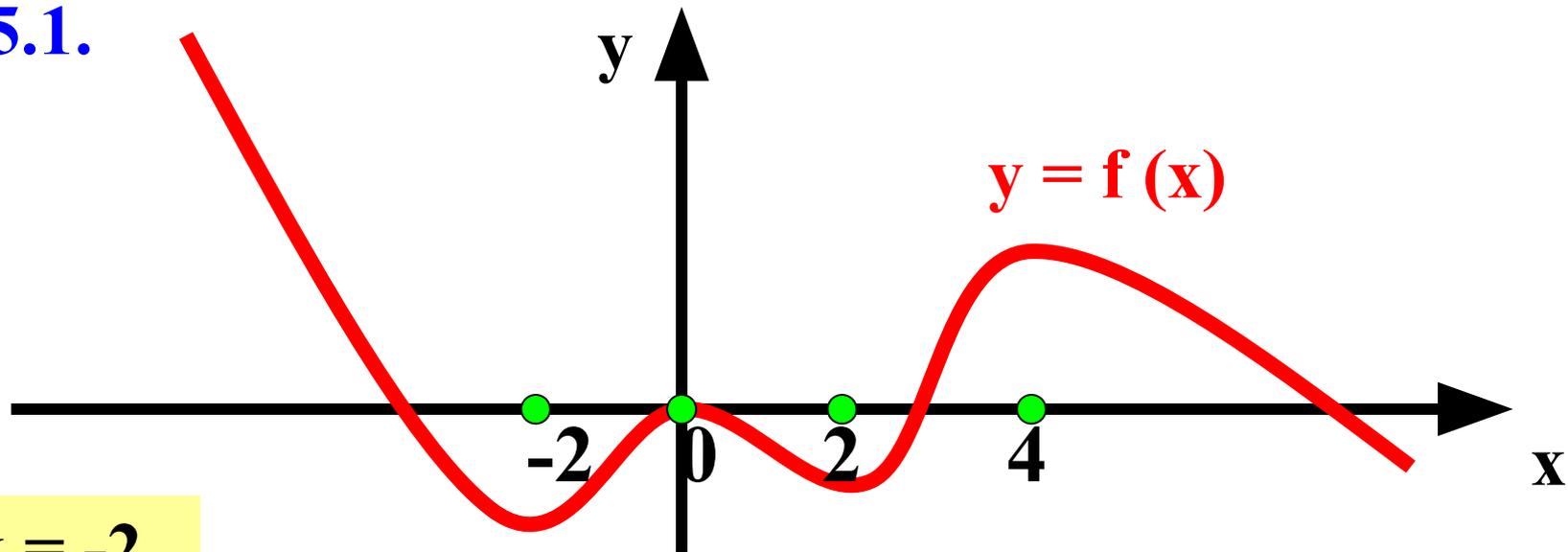
4. Критические точки функции.

4.2.

Внутренняя точка области определения функции, в которой эта функция имеет производную, равную нулю или не имеет производной, называется *критической точкой* этой функции.

5. Выполнение заданий.

5.1.



$x = -2$

$x = 0$

$x = 2$

$x = 4$

точка минимума

точка перегиба

критическая точка

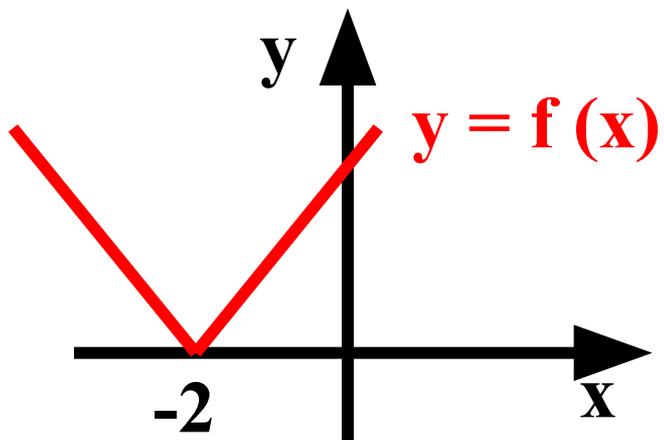
точка максимума

стационарная точка

точка экстремума

5. Выполнение заданий.

5.2.



$$f(x) = \dots$$

Верно ли, что:

1. $x = -2$ – точка перегиба

← НЕТ

2. минимум функции равен (-2)

← НЕТ

3. $x = -2$ - точка минимума

← ДА

4. минимум функции равен 0

← ДА

5. $f'(x) = 0$
при $x = -2$

← НЕТ

6. $f'(x)$ не существует
при $x = -2$

← ДА

5. Выполнение заданий.

5.3. Найдите критические точки функции $f(x) = x^3 + 0,5x^2 - 4x$

1. Функция определена для всех значений x .

2. Найдём производную функции

$$f'(x) = 3x^2 + x - 4$$

3. $f'(x) = 0$

$$3x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = 1 \text{ или } x = -1\frac{1}{3}$$

Ответ: $1; -1\frac{1}{3}$

5. Выполнение заданий.

5.4. Найдите критические точки функции $f(x) = \frac{x^2+3}{2x}$

1. Функция определена для $x \neq 0$.

2. Найдём производную функции

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 6}{4x^2}$$

3. $f'(x) = 0$,

$$\frac{2x^2 - 6}{4x^2} = 0, \quad x = \sqrt{3} \text{ или } x = -\sqrt{3}$$

Ответ: $-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}$

Итоги урока

- ▲ Точка минимума функции
- ▲ Точка максимума функции
- ▲ Точки экстремума функции
- ▲ Точка перегиба функции
- ▲ Стационарные точки функции
- ▲ Критические точки функции
- ▲ Экстремум функции
- ▲ Свойство производной в точке экстремума

A blue curve is plotted on a coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The curve starts in the lower-left quadrant, crosses the x-axis, rises to a peak in the upper-left quadrant, then descends, crossing the x-axis again, and continues with smaller oscillations in the lower-right quadrant. A yellow rectangular box is centered over the curve, containing the text 'Желаю всем успехов в изучении темы!' in red. Below the x-axis, a yellow smiley character with a red mouth, black eyes, and blue shoes is standing and waving with its right hand.

**Желаю всем
успехов в изучении темы!**

