Применение производной к исследованию функций

2 курс

Теория без практики мертва или бесплодна, практика без теории невозможна или пагубна.
Для теории нужны знания,
для практики,
сверх всего того,
и умение.

А.Н. Крылов
(Русский советский математик, кораблестроитель, академик)

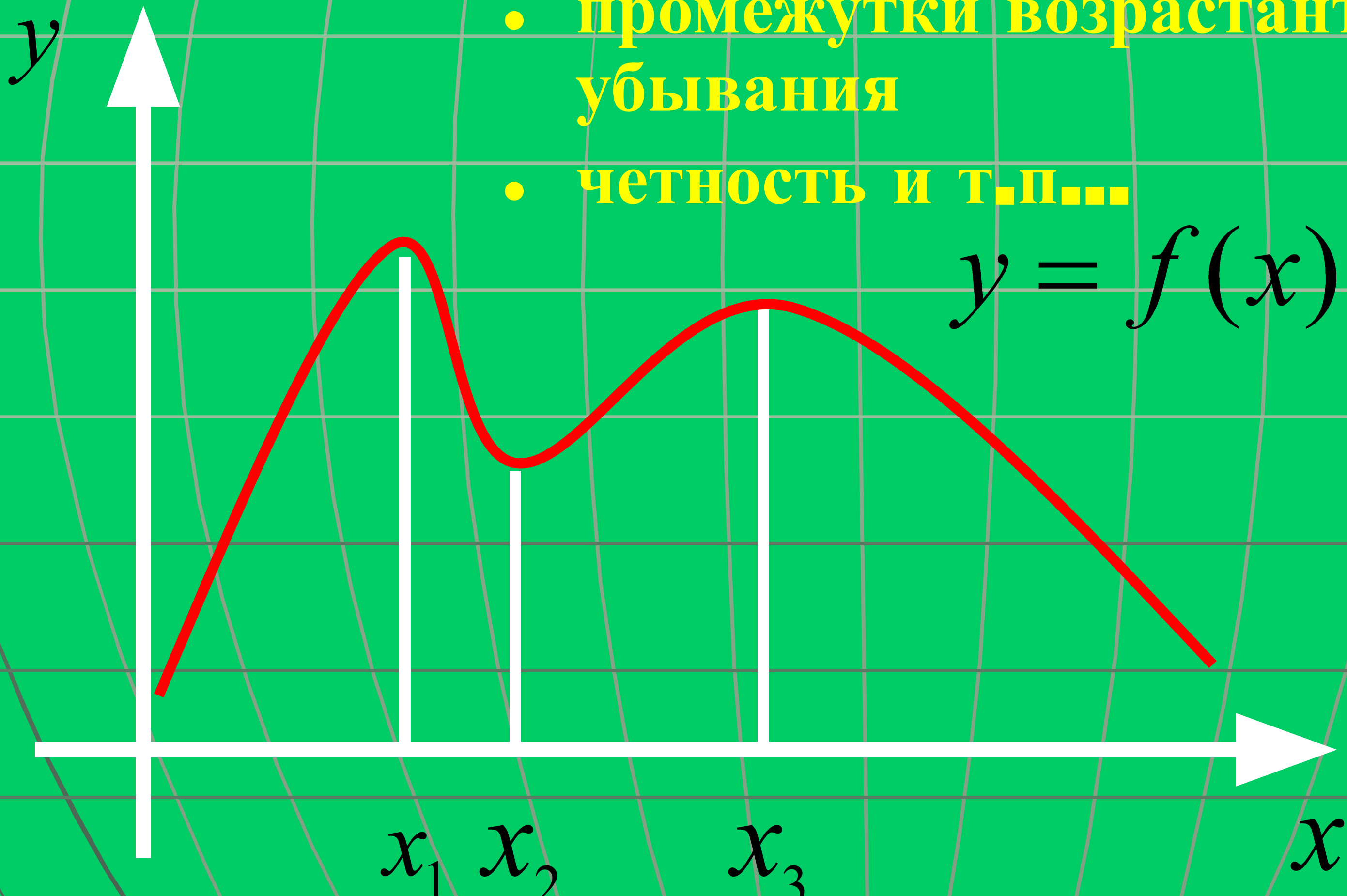
Математическим выражением взаимной связи реальных величин является идея функциональной зависимости.

Понятие функции – важнейшее понятие математики. Слово «функция» (от латинского «Functio» - исполнение обязанностей, деятельность) впервые ввел немецкий ученый Г. Лейбниц.

Исследование функции:

- D(f)
- E(f)
- промежутки возрастантия и убывания
- четность и т.п…

$$y = f(x)$$



Повторение

- Четность, нечетность функций
- Периодичность
- Нули функции
- Промежутки знакопостоянства
- Монотонность функции

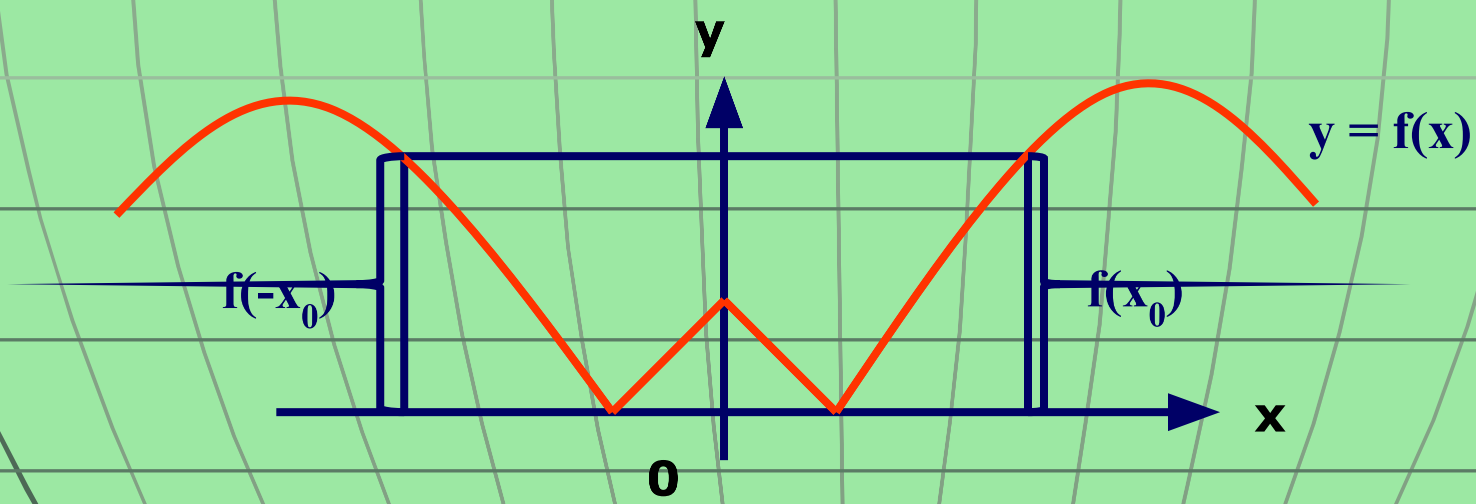
далее

Четность функций

Определение: Функция y = f(x) называется **четной**, если для любого значения x, взятого из области определения функции, значение (–x) также принадлежит области определения и выполняется равенство **f(-x) = f(x)**

четная функция определена на множестве, симметричном относительно начала координат.

График четной функции **симметричен** относительно **оси ординат**

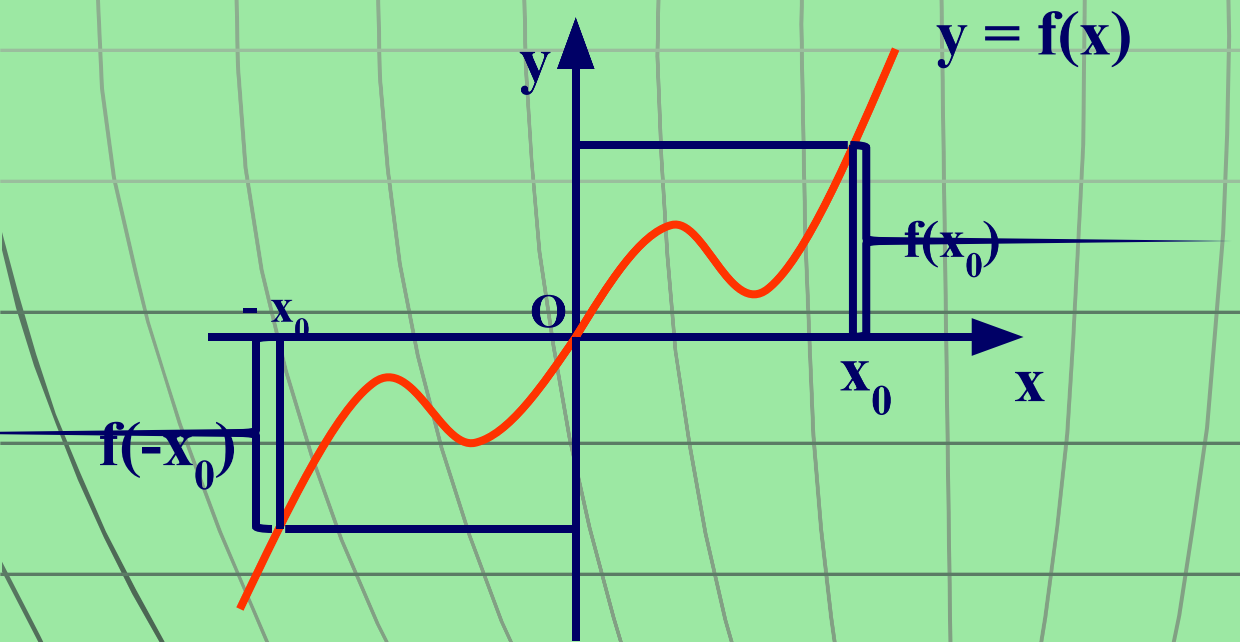


Нечетность функций

Определение: Функция y = f(x) называется **нечетной**, если для любого значения x, взятого из области определения функции, значение

(–x) также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат

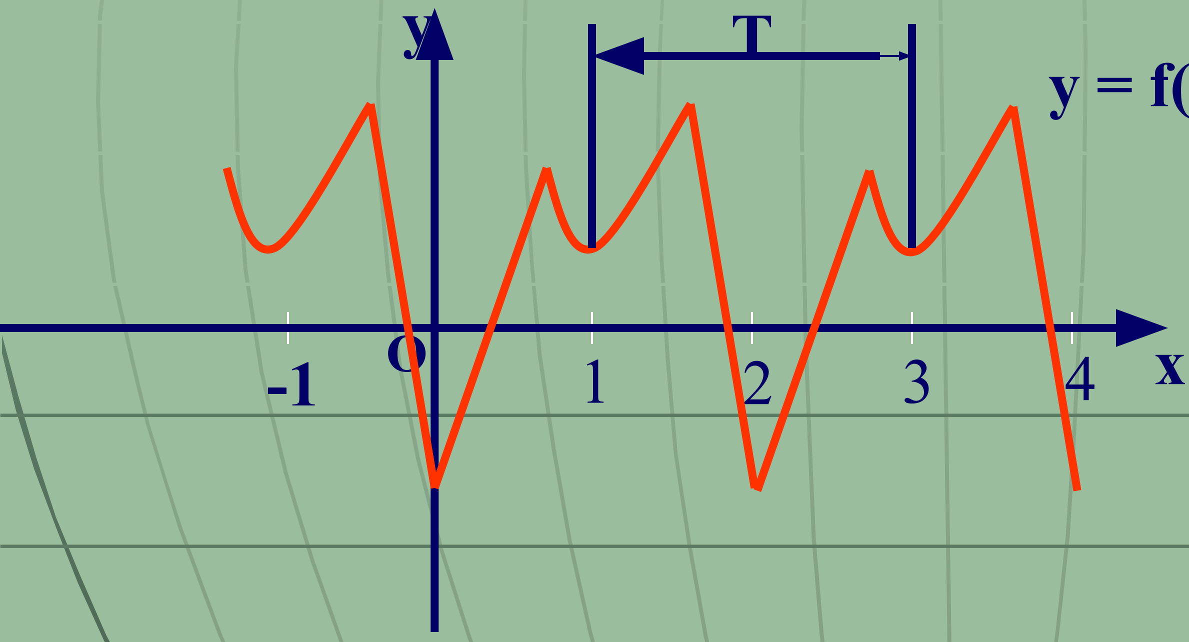


повторение

Периодичность функций

Определение: *Функция y = f(x) называется периодической, если существует такое число T ≠ 0, что для любого значения x, взятого из области определения, значения x + T и x – T также принадлежат области определения и выполняется равенство*

f(x) = f(x + T) = f(x – T)



повторение

Нули функции

Нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции

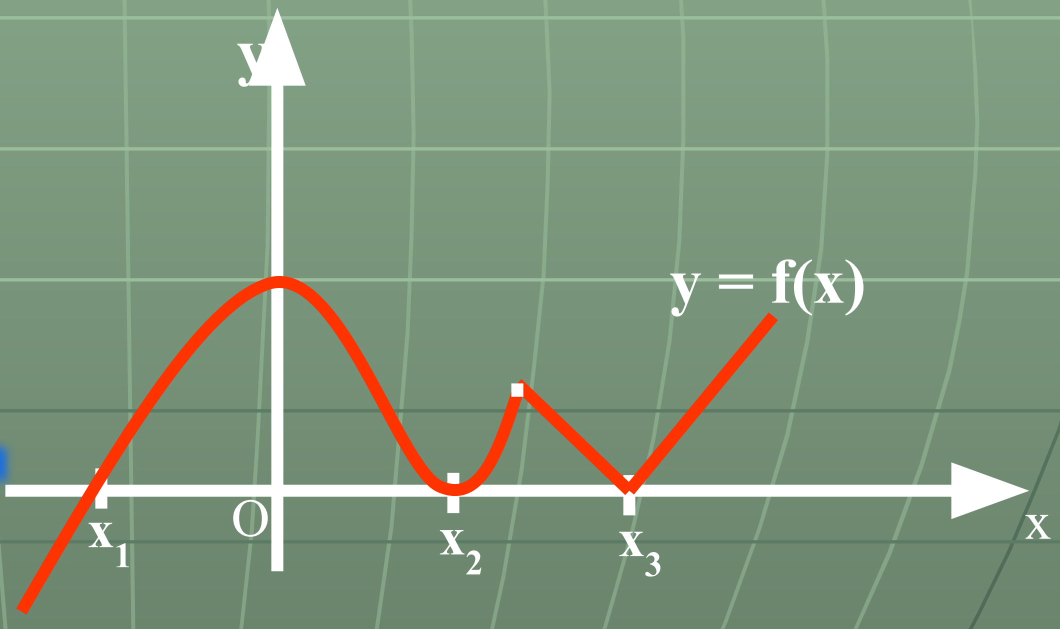
либо пересекает ось абсцисс,

либо касается ее,

либо имеет общую точку с этой осью, ординаты данных точек нулевые

Определение: Нулем функции называется такое действительное значение x, при котором значение функции равно нулю.

Для того, чтобы найти нули функции, следует решить уравнение $f(x) = 0$ Действительные корни этого уравнения являются нулями функции $y = f(x)$



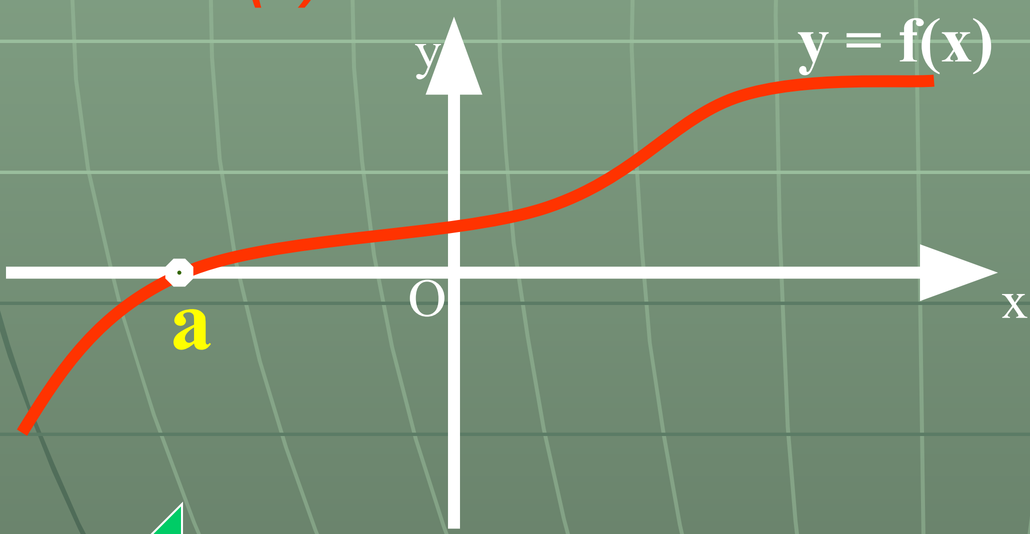
x_1, x_2, x_3 – нули функции $y = f(x)$.

повторение

Промежутки знакопостоянства

Определение: Числовые промежутки, на которых непрерывная функция **сохраняет** свой знак и **не обращается в нуль**, называются промежутками знакопостоянства.

Над этими промежутками график функции лежит **выше оси абсцисс**, если $f(x) > 0$, и **ниже оси абсцисс**, если $f(x) < 0$



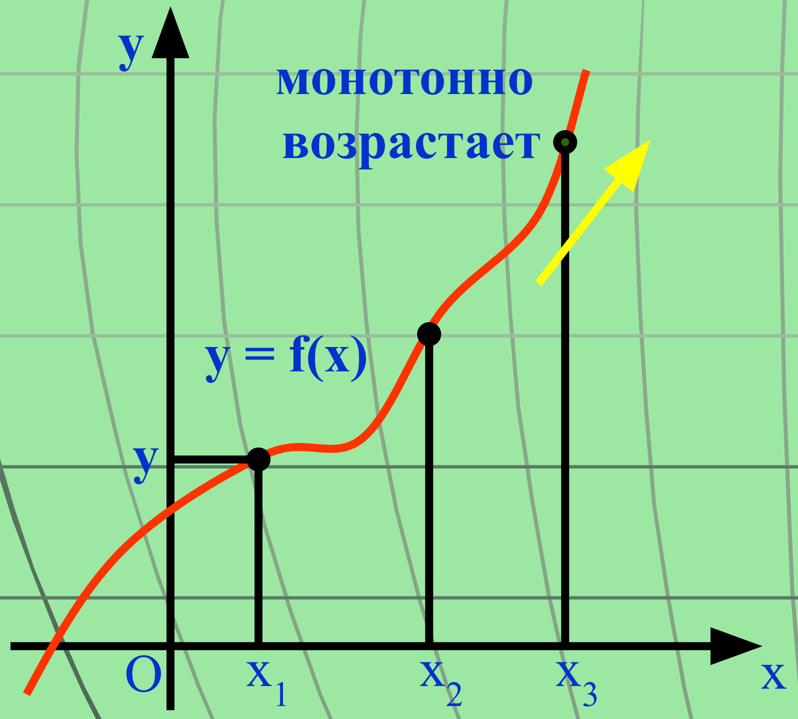
$f(x) > 0$ при $x > a$

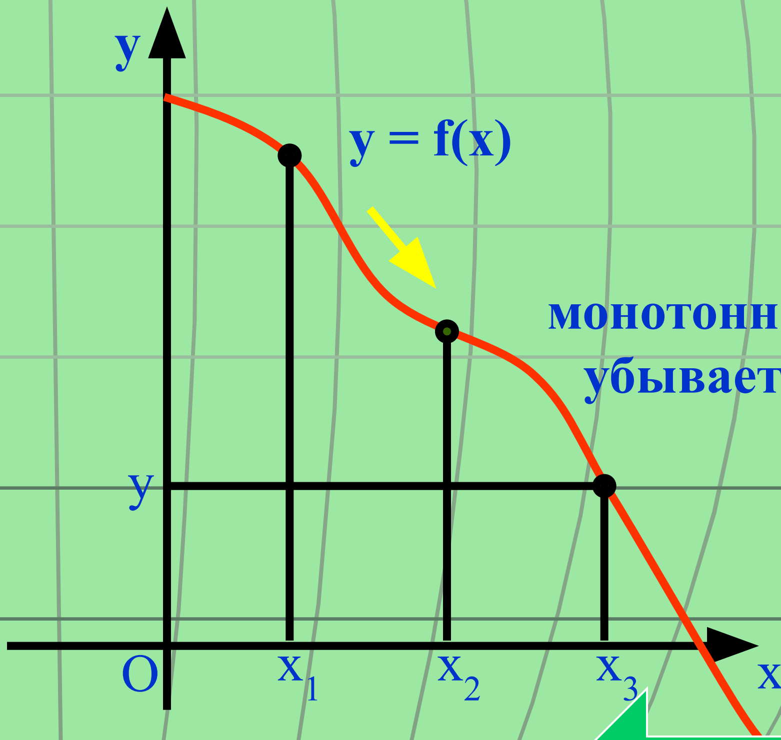
$f(x) < 0$ при $x < a$

повторение

Монотонность функции

Определение: ***Функцию называют монотонно возрастающей, если с увеличением аргумента значение функции увеличивается, и монотонно убывающей, если с увеличением аргумента значение функции уменьшается***.

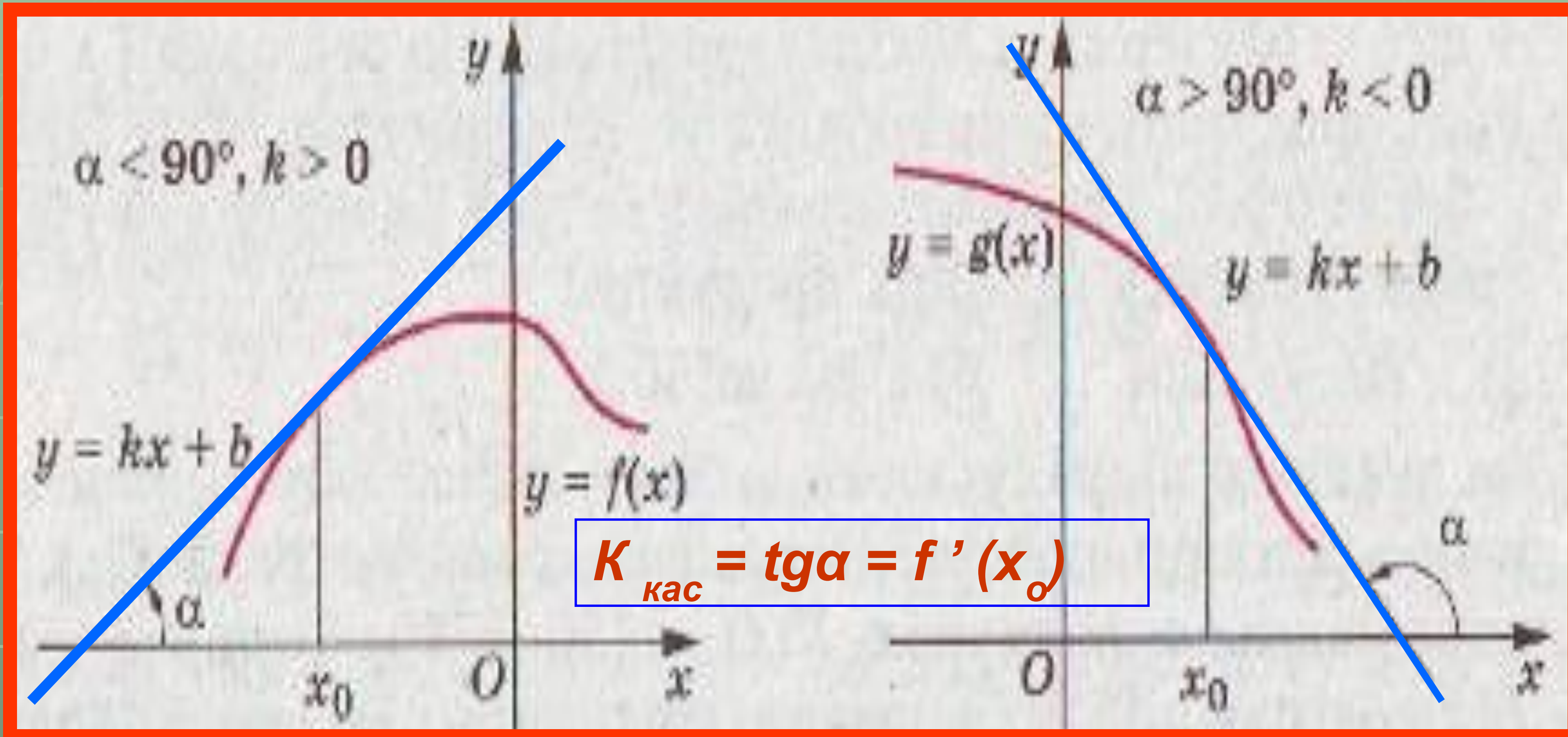




повторение

Связь производной с монотонностью функции

- Если **производная** функции в каждой точке некоторого промежутка **положительна**, то функция на этом промежутке **возрастает**, т.е. $f'(x)>0$, $f(x)$□
- Если **производная** функции в каждой точке некоторого промежутка **отрицательна**, то функция на этом промежутке **убывает**, т. е. $f'(x)<0$, $f(x)$□
- Если **производная** функции в каждой точке некоторого промежутка **равна 0**, то функция на этом промежутке **постоянна**



$K_{кас} = tg\alpha = f'(x_o)$

f'(x) >0

f'(x) <0

Критические точки функции -

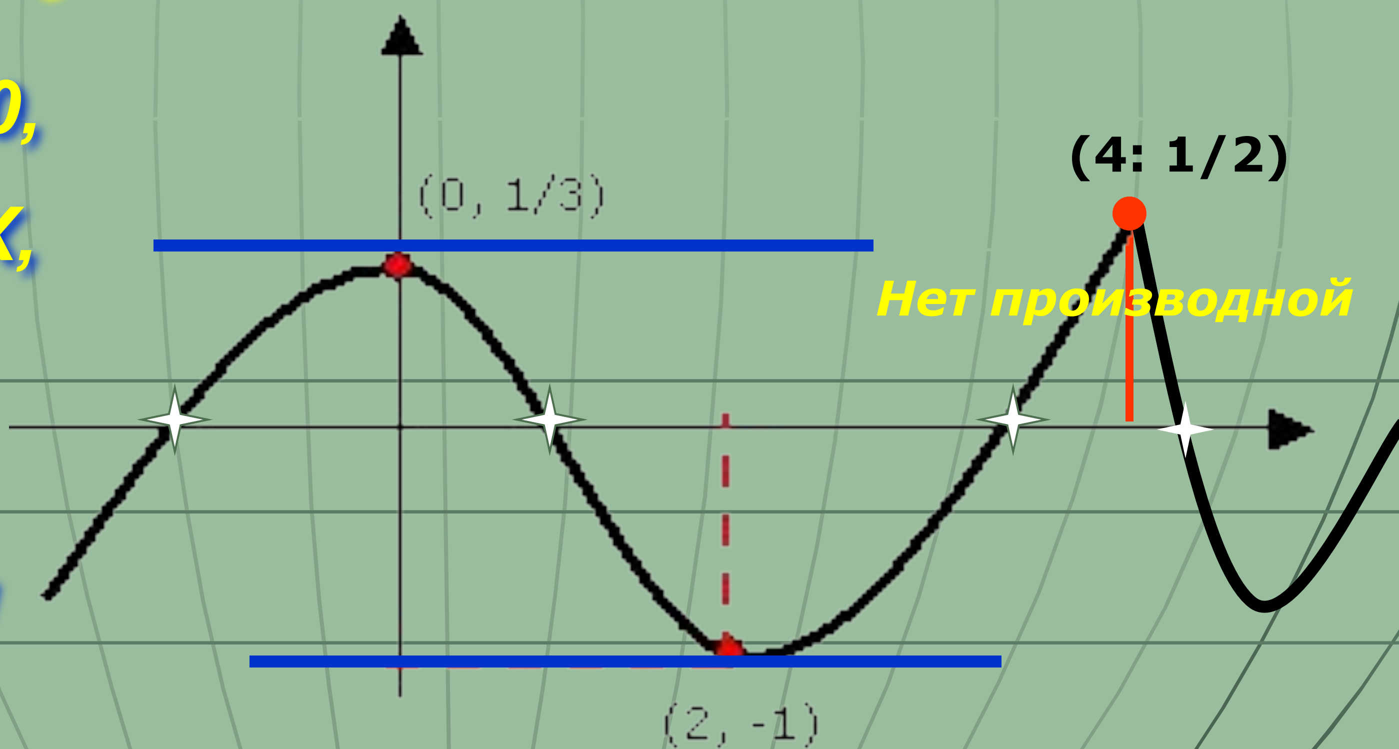
Внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует

$f'(x_i) = k_{кас} = 0$,

касат II OX,

перегиб графика,

смена поведения



Достаточный признак возрастания или убывания функции

Алгоритм решения:

$f'(x)$

$f'(x)=0$ или не существует

ритические точки

$f'(x)>0$

$f'(x)<0$

Пример: Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=x^3-3x^2+2$

Решение:

1) $f'(x)=(x^3-3x^2+2)'=3x^2-6x=3x(x-2)$

2)Находим критичекие точки: $f'(x)=0$, т.е.

$3x(x-2)=0$ при $x=0$ $x=2$

3) Исследуем знак производной методом интервалов

	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

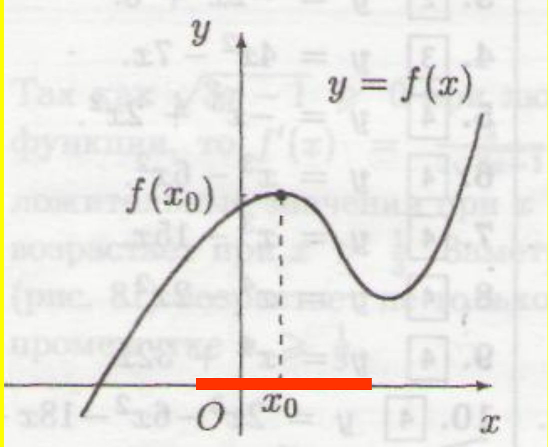
Ответ: f (x)□ на (-∞; 0) ∪ (2;∞)

f (x)□ на (0;2)

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Окрестностью точки x_0 - называется промежуток, для которого точка x_0 является внутренней.

Точка x_0 называется точкой <u>максимума</u> (x_{max}) функции f(x), если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

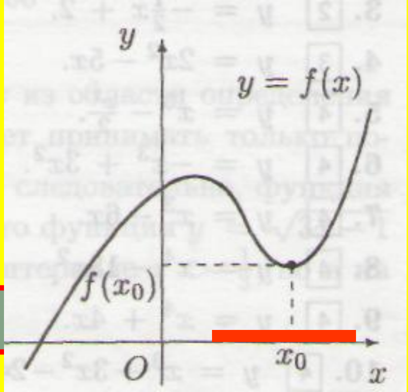


$$\boxed{f(x) \le f(x_0)}$$

$$f(x) \le f(x_{\max})$$

Точка x_1 называется точкой минимума (x_{min}) функции f(x), если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство

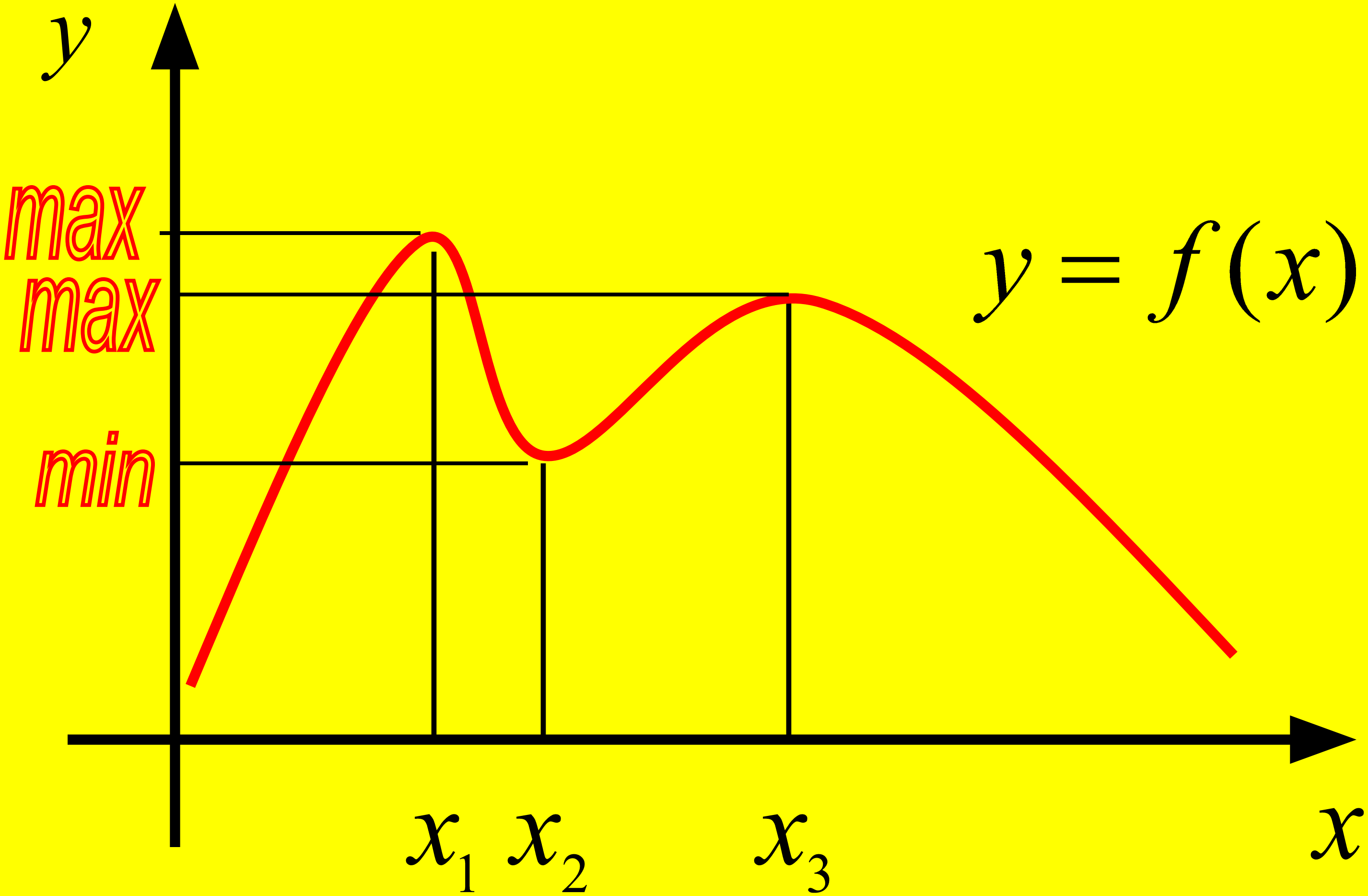
$$\boxed{f(x) \geq f(x_1)} \qquad f(x) \geq f(x_{\min})$$



Точки минимума и максимума называются точками экстремума (крайние, конечные)

Значения функции в точках x_0 и x_1 называются соответственно максимумом и минимумом функции (y_{min} и y_{max})

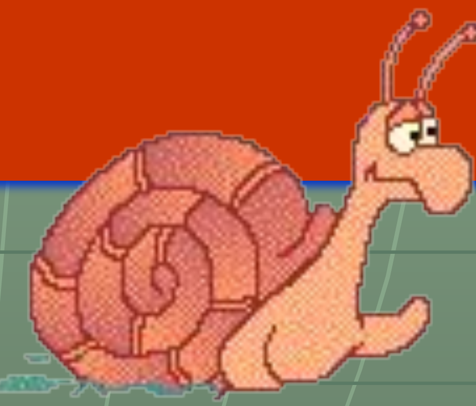
Максимум и минимум функции называется экстремумом функции



Точки экстремумов x_i

Обратите внимание!!!

- ***Что происходит с производной при переходе через экстремальную точку?***
- ***Что происходит с самой функцией при переходе через экстремальную точку?***



удачи в изучении))