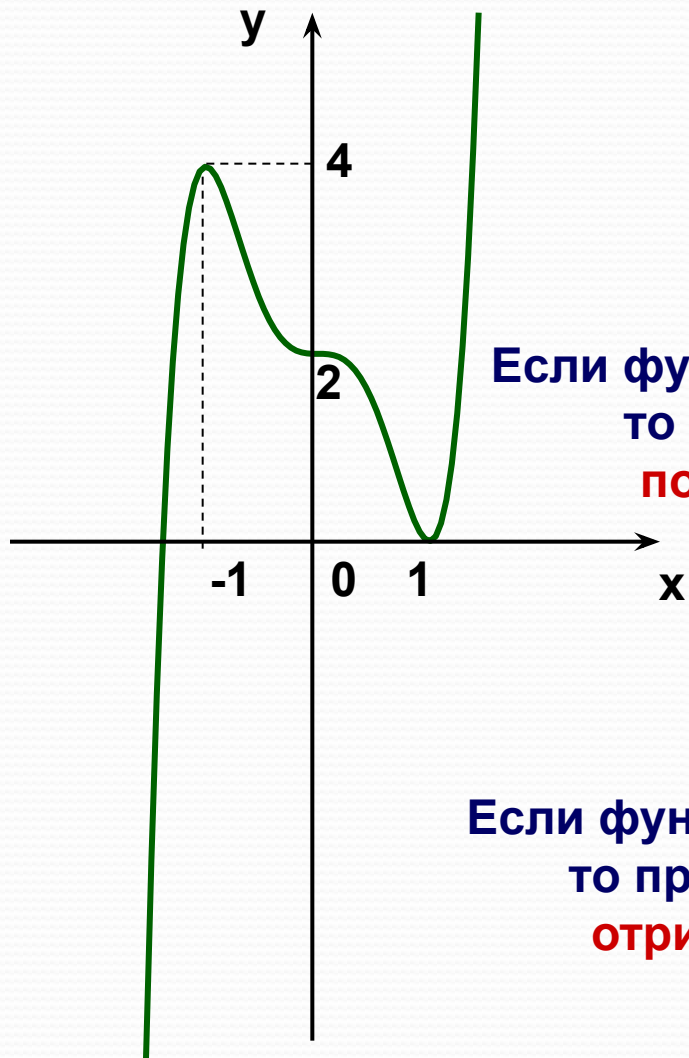


# Применение производной к исследованию функций

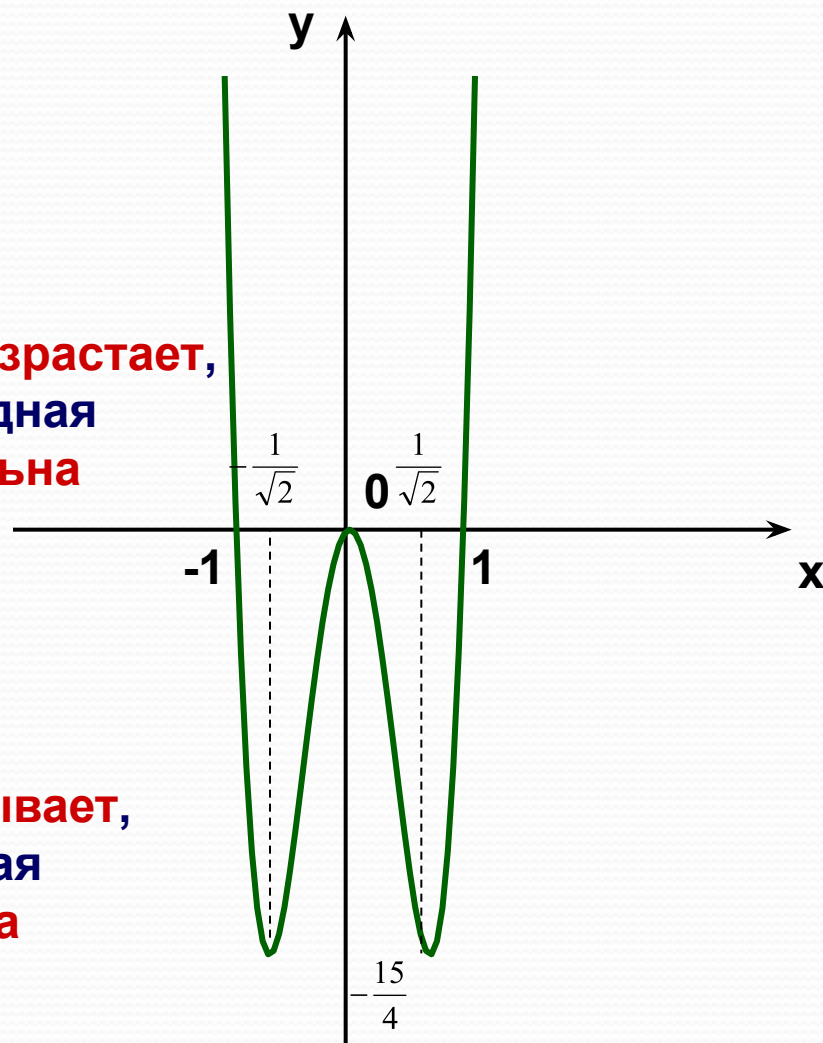
$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$$

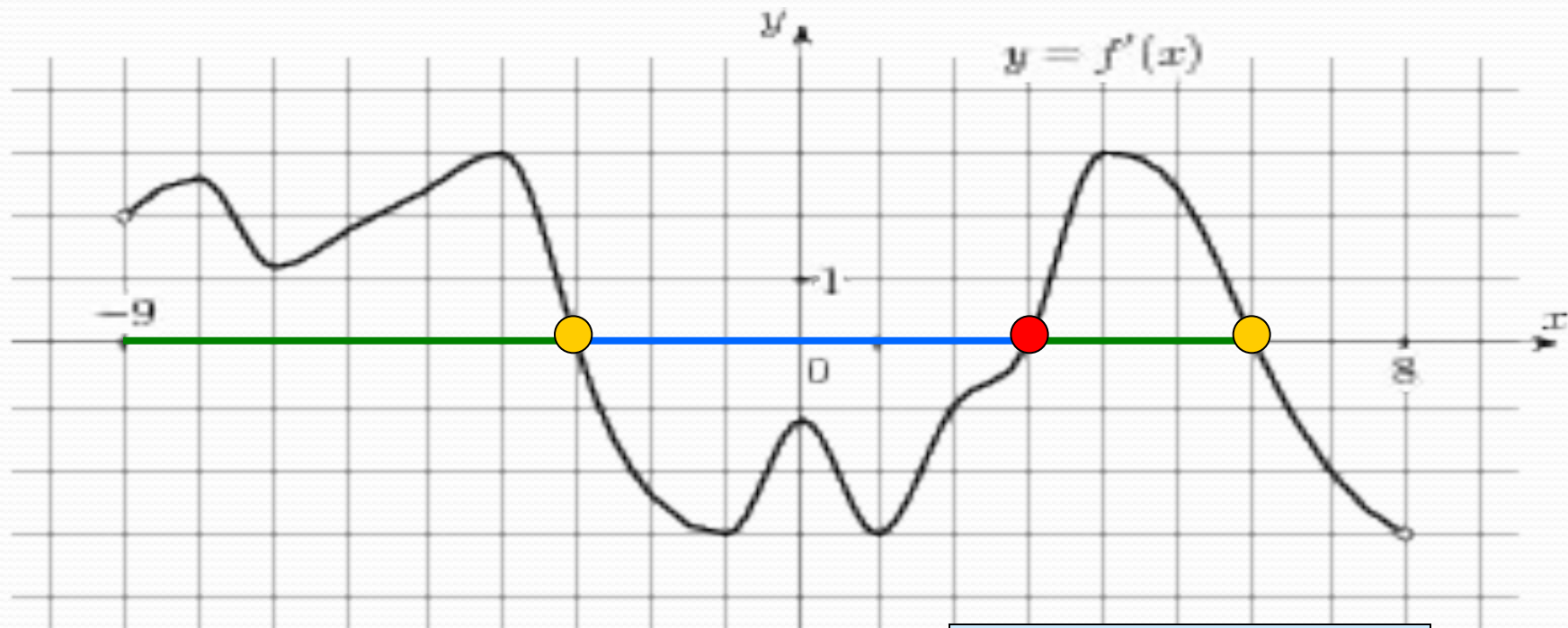


Если функция **возрастает**,  
то производная  
**положительна**

Если функция **убывает**,  
то производная  
**отрицательна**

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$





**Возрастает:**

**Убывает:**

**Максимум:**

**Минимум;**

# Алгоритм нахождения наибольших и наименьших значений функции

**Находим производную функции**

**Находим критические точки функции**

**Если критических точек на отрезке нет, значит функция на отрезке монотонна, и наибольшего и наименьшего значения функция достигает на концах отрезка**

**Если критические точки на отрезке есть, значит нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, и выбрать из полученных чисел наибольшее и наименьшее**

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 8$$

**Решение:**

$$f'(x) = -3x^2 + 8x - 5$$

$$-3x^2 + 8x - 5 = 0$$

$$x = 1 ; x = 5/3$$

$$f(-1) = 18$$

$$f(3) = 2$$

$$f(1) = 6$$

$$f(5/3) = 55/9$$

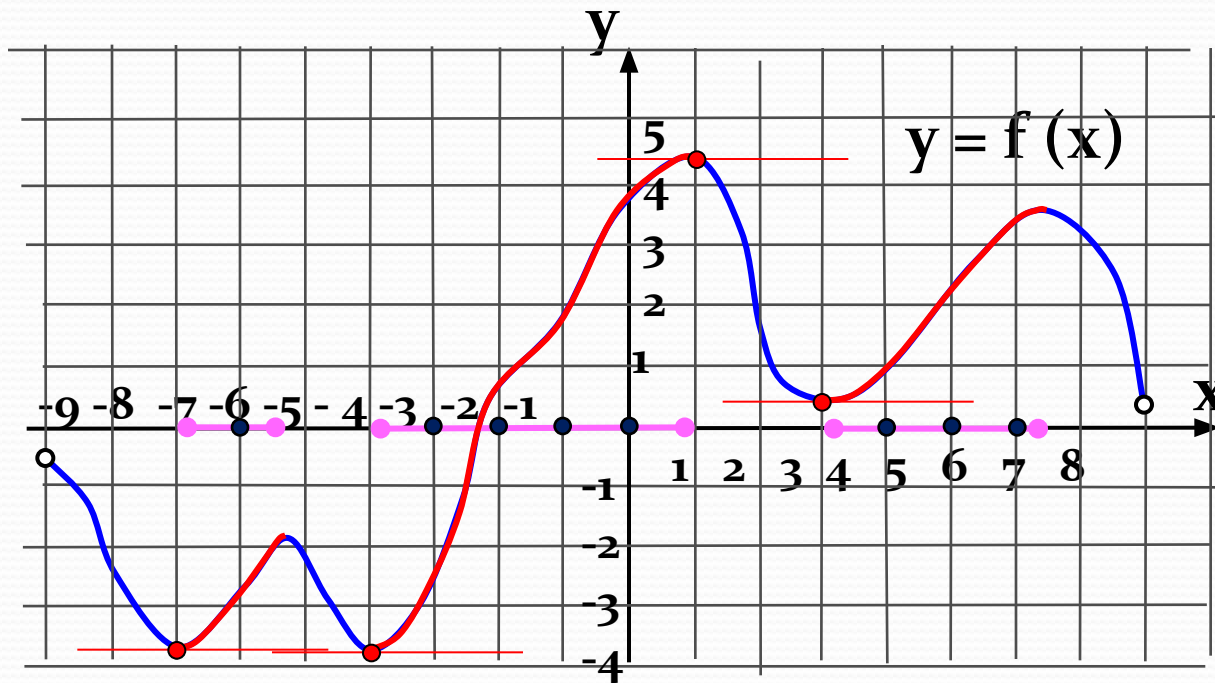
*ответ*

## Привести примеры функций:

1. Имеющих критические точки, в которых  $f'(x)$  не существует.
2.  $f'(x_0) = 0$ , но  $x_0$  не является точкой экстремума.
3.  $f(x) = \sqrt{x}$ . Найти  $f'(x)$ . Найти  $f'(0)$ .  
Является ли 0 - критической точкой.
4.  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Найти  $f'(x)$ . Найти  $f'(0)$ . Является ли 0 - критической точкой.
5. Может ли значение функции в точке максимума быть меньше ее значения в точке минимума.

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-9; 8)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

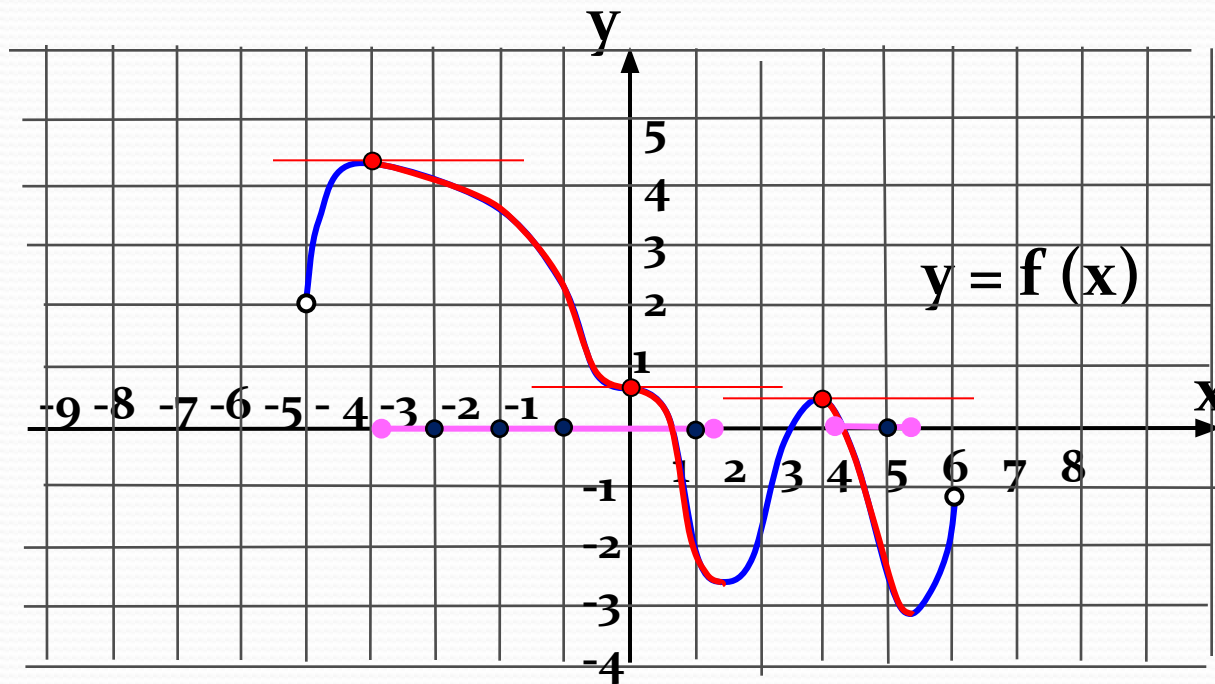
- Решение:** 1.  $f'(x) > 0$ , значит, функция возрастает. Найдем эти участки графика.  
2. Найдем все целые точки на этих отрезках.



**Ответ: 8**

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-5; 5)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

- Решение:** 1.  $f'(x) < 0$ , значит, функция убывает. Найдем эти участки графика.  
2. Найдем все целые точки на этих отрезках.

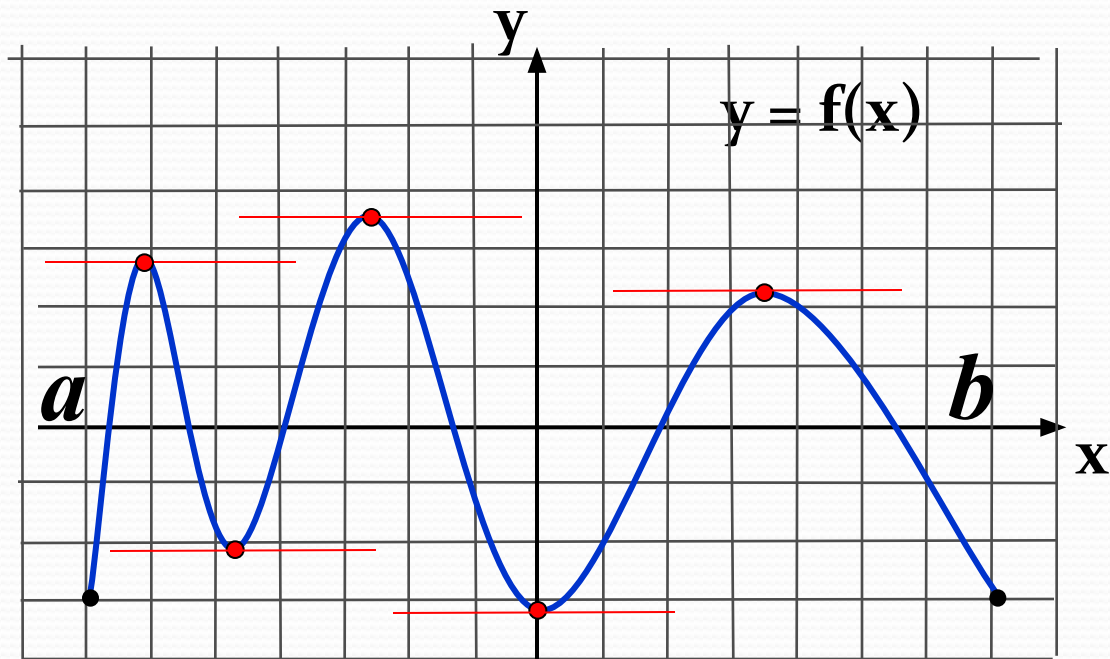


**Ответ: 5**



Непрерывная функция  $y = f(x)$  задана на отрезке  $[a; b]$

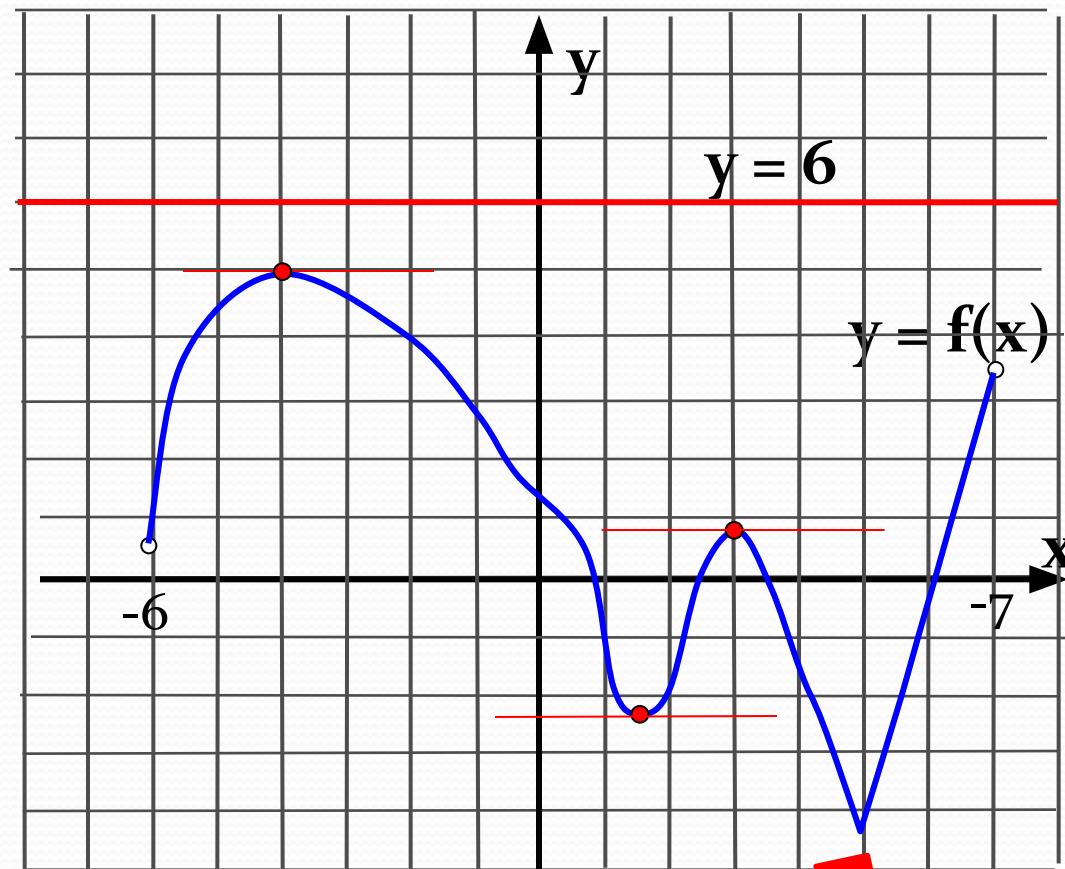
На рисунке изображен ее график. В ответе укажите количество точек графика этой функции, в которых касательная параллельна оси  $Ox$ .



**Ответ: 5**

Непрерывная функция  $y = f(x)$  задана на интервале  $(-6; 7)$ .

На рисунке изображен ее график. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 6$ .

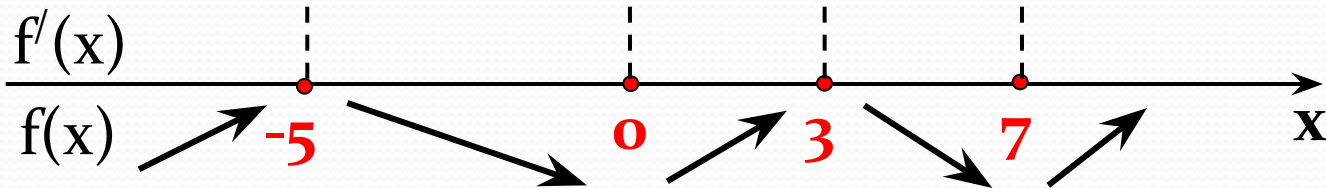
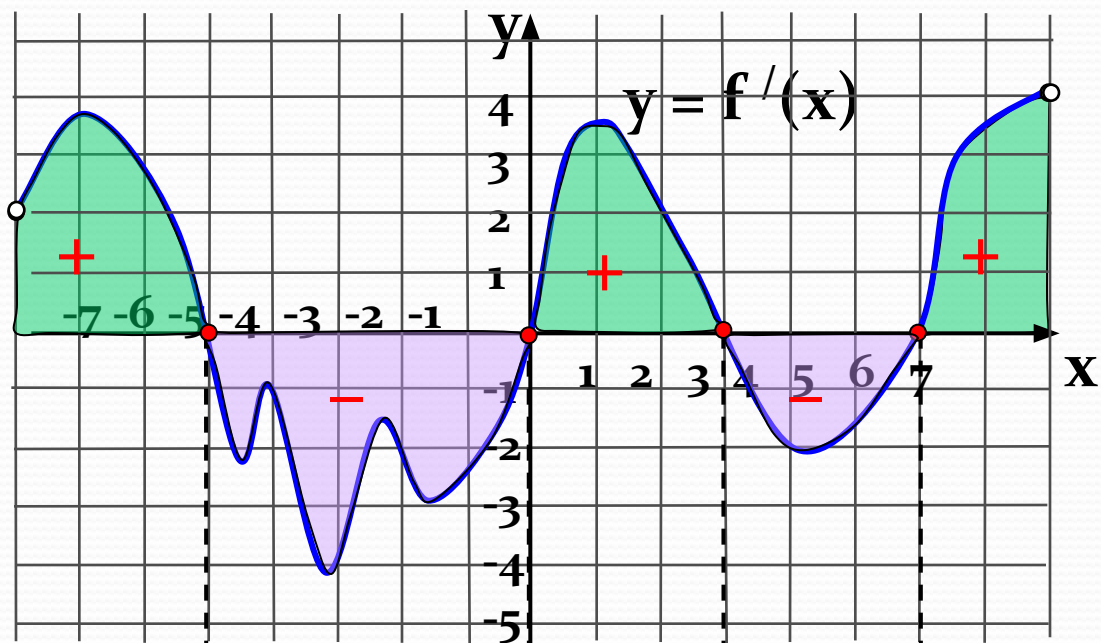


**В этой точке производная НЕ  
существует!**

**Ответ: 3**

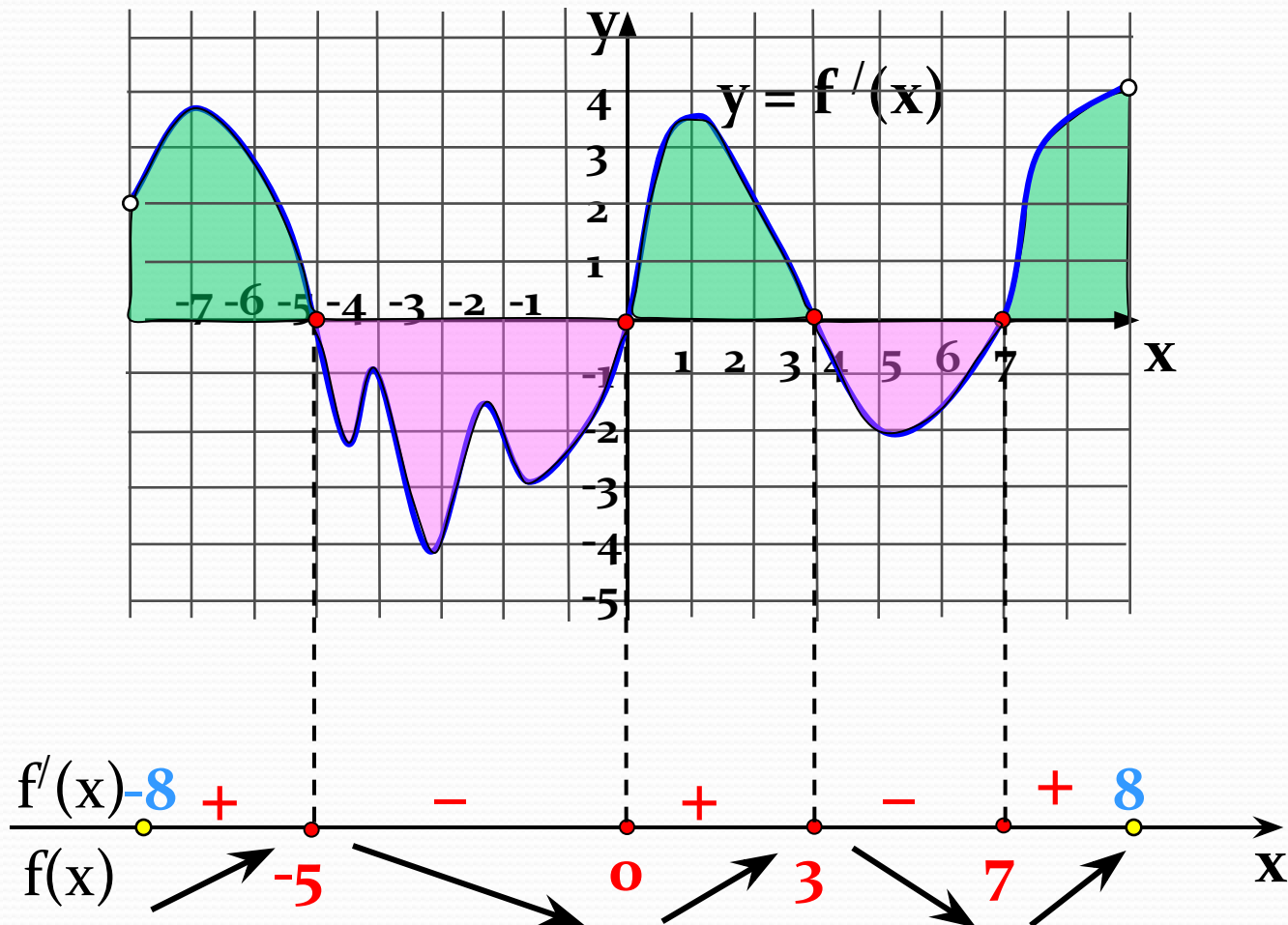
На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ , заданной на промежутке  $(-8; 8)$ .

Найдем точки, в которых  $f'(x) = 0$  (это нули функции).



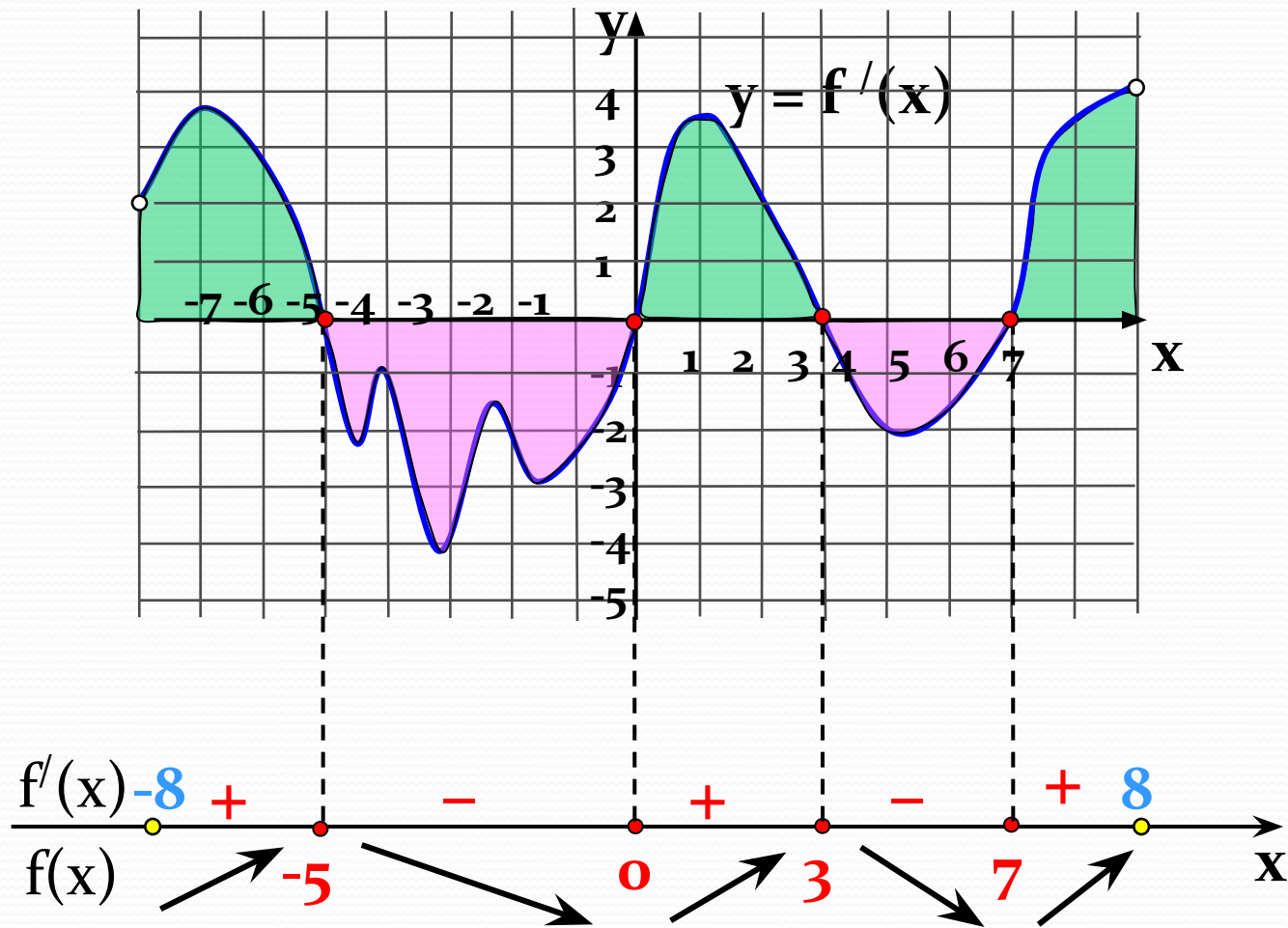
Исследуйте функцию  $y = f(x)$  на экстремум и укажите количество ее точек минимума.

4 точки экстремума



Ответ: 2

Найдите количество точек экстремума функции  $y = f(x)$   
на отрезке  $[-3; 7]$



**Ответ: 3**

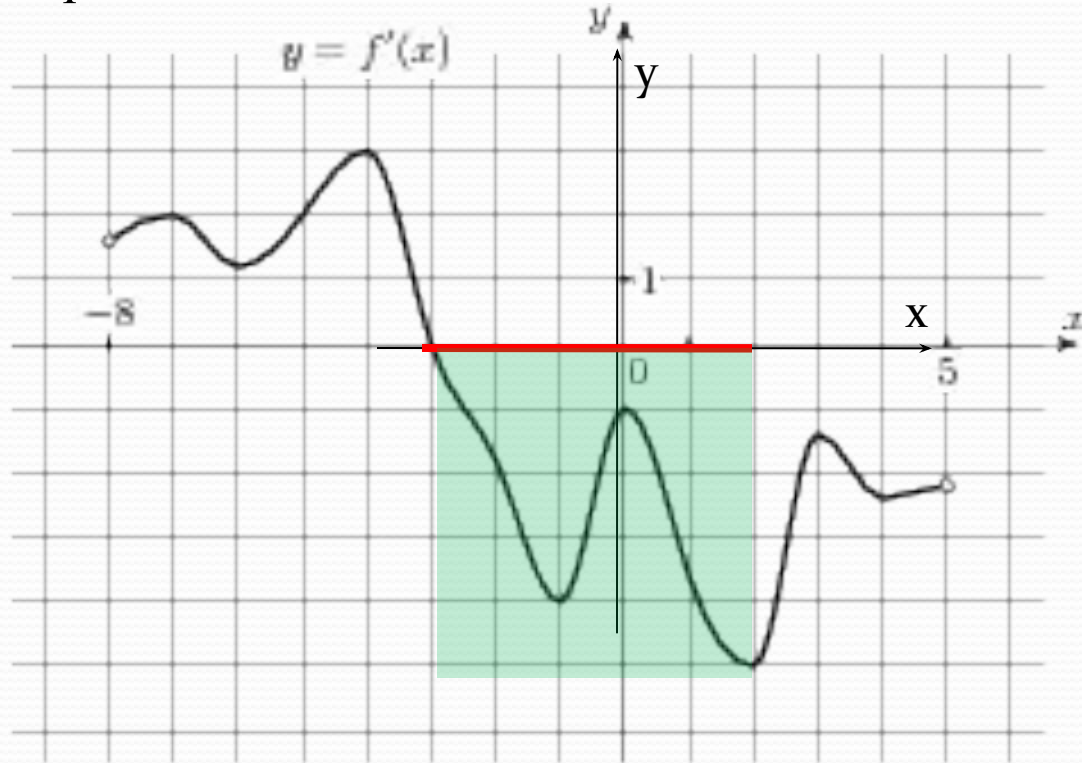
На рисунке изображен график функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-3;10)$ . Найдите сумму точек экстремума функции  $y=f(x)$ .



$$-1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$$

**Ответ: 35**

На рисунке изображен график  $y=f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-8;5)$ . В какой точке отрезка  $[-3;2]$  принимает наибольшее значение?

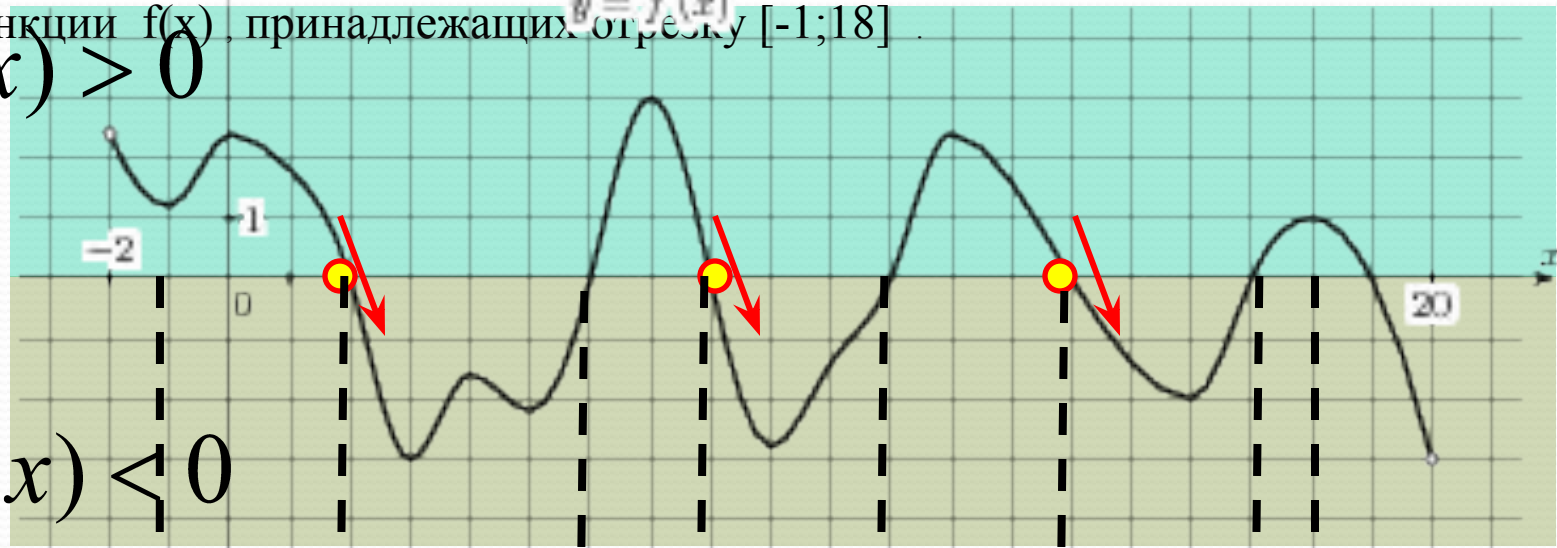


$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  убывает

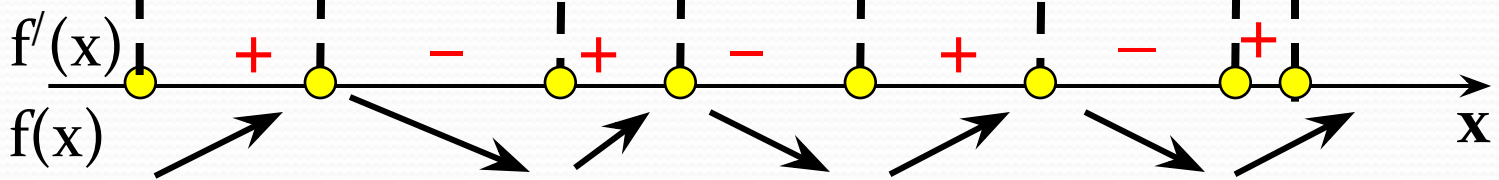
**Ответ:-3**

На рисунке изображен график  $y=f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-2;20)$ . Найдите количество точек максимума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-1;18]$ .

$$f'(x) > 0$$



$$f'(x) < 0$$

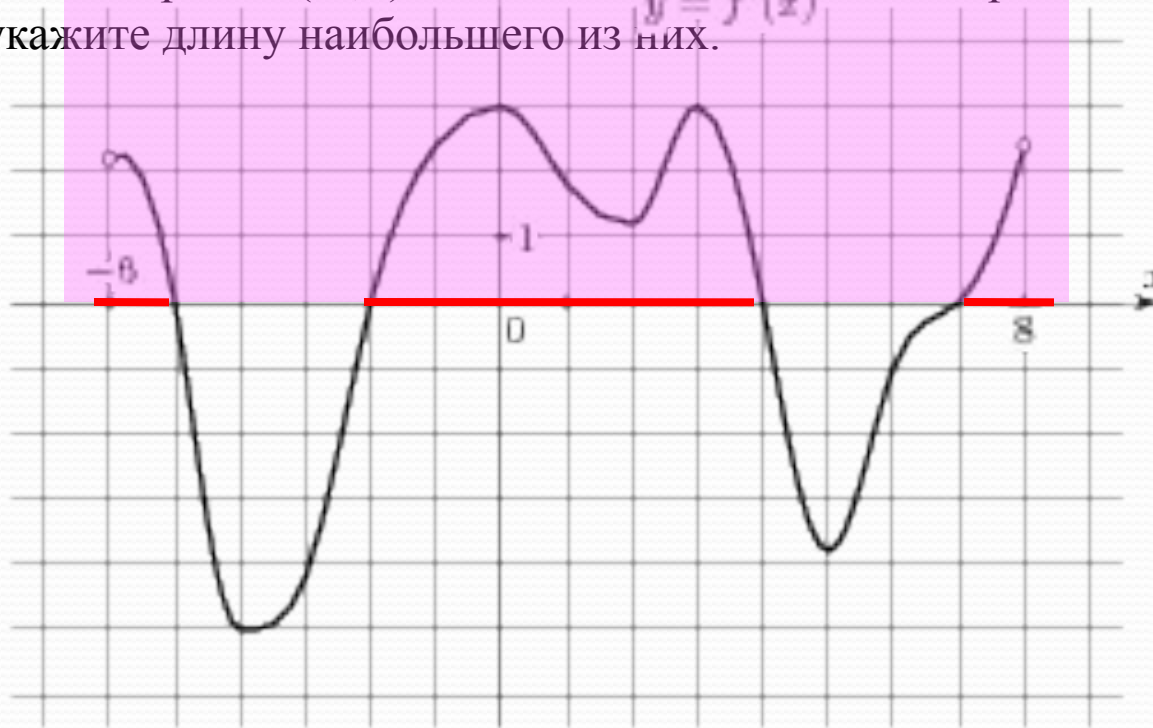


Точка максимума – точка перехода от  $f'(x) > 0$  к  $f'(x) < 0$

**Ответ: 3**

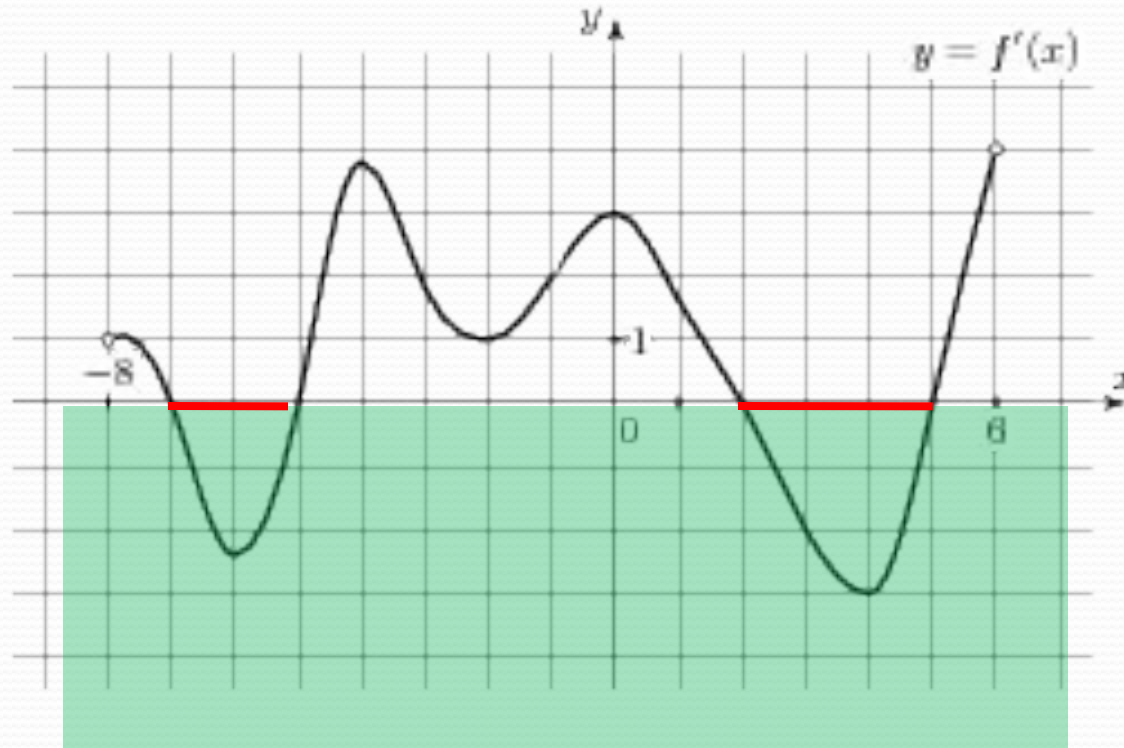


На рисунке изображен график  $y=f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-6;8)$ . Найдите промежутки возрастания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.



**Ответ: 6**

На рисунке изображен график  $y=f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-8;6)$ . Найдите промежутки убывания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.



**Ответ: 3**

Отыщите функцию в таблице, исходя из её «автобиографии». Найдите область определения, корень, точку разрыва, промежуток возрастания и убывания.

Я – функция сложная, это известно,  
Ещё расскажу, если вам интересно,  
Что точку разрыва и корень имею,  
И есть интервал, где расти не посмею.  
Во всём остальном положительна, право,  
И это, конечно, не ради забавы.  
Для чисел больших я стремлюсь к единице.  
Найдите меня среди прочих в таблице.

$f(x) = \frac{1}{4}x^4$	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$	$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-x}}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$	$f(x) = \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2$
$f(x) = (x^2-1)^2$	$f(x) = x(1-x)$	$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

# Домашнее задание

## УРОВЕНЬ А

1. Исследовать и построить график функции

а)  $y = (x+1)^3(x-2)$

б)  $y = (x+2)^2(x-2)$

2. **Нестандартное задание:**

составить формулу, задающую функцию, графиком которой была бы прямая с выколотой точкой.

## УРОВЕНЬ В

1. Исследовать и построить график функции

а)  $f(x) = x^2 \sqrt{1-2x}$

б)  $f(x) = 4x^2 \sqrt{1-4x}$

2. **Нестандартное задание:**

отыскать функции, описывающие реальные физические процессы, которые вы изучали на уроках физики, и исследуйте их.

## УРОВЕНЬ Б

1. Исследовать и построить график функции

а)  $f(x) = \frac{x^2 + 5}{2 - x}$

б)  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

2. **Нестандартное задание:**

составить формулу, задающую функцию, графиком которой была бы одна точка.