Областное государственное автономное образовательное учреждение
среднего профессионального образования
Белгородский строительный колледж
г. Белгород

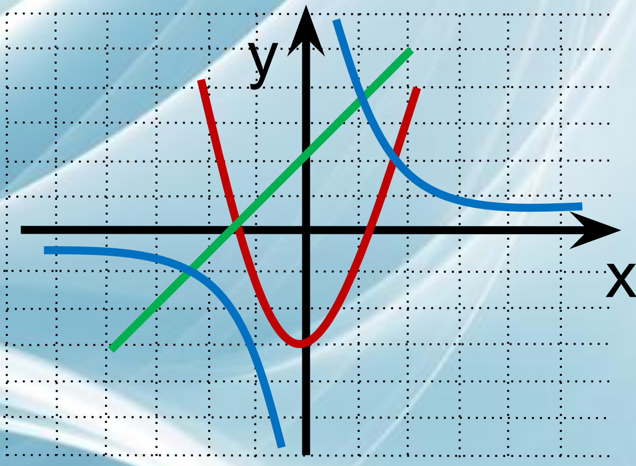
Урок-лекция «Применение производной к исследованию и построению графиков функций»

урок математики, 1 курс

Автор: Агапова Наталья Николаевна,
преподаватель математики

Цель урока:

- научиться применять таблицу производных при исследовании функций и построении графиков



Математический диктант

Вариант *1.*

1. $(Cu)' = \ldots$
2. $\ldots = (u'v - v'u)/v^2$
3. $(\cos x)' = \ldots$
4. $\ldots = 1/\cos^2 x$
5. $(e^x)' = \ldots$

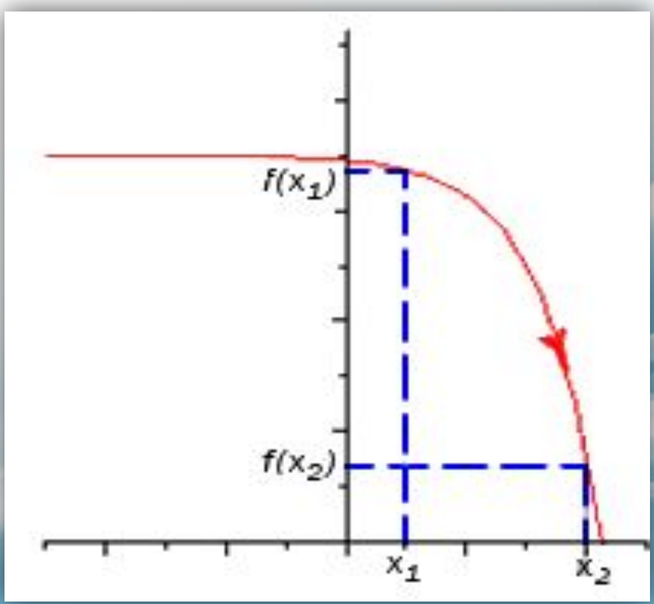
Вариант *2.*

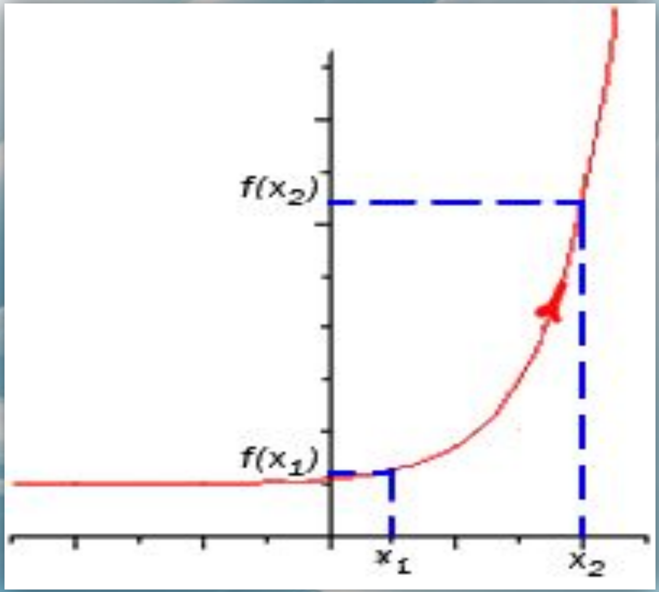
1. $C' = \ldots$
2. $\ldots = (u'v + v'u)$
3. $(\sin x)' = \ldots$
4. $\ldots = -1/\sin^2 x$
5. $(x^n)' = \ldots$

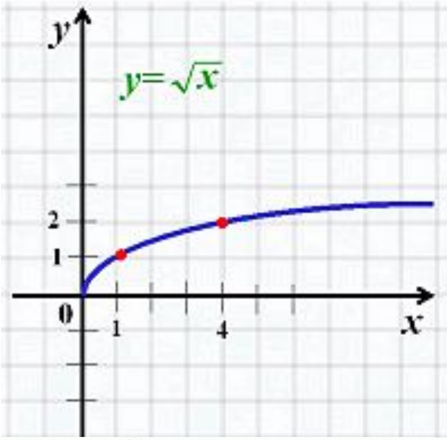
Классная работа

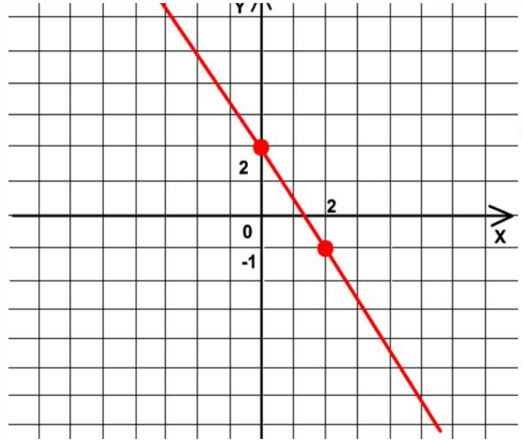
- *Одной из основных задач, возникающих при исследовании функции, является нахождение* ***промежутков монотонности функции*** *(****промежутков возрастания и убывания****). Такой анализ легко сделать с помощью производной.*

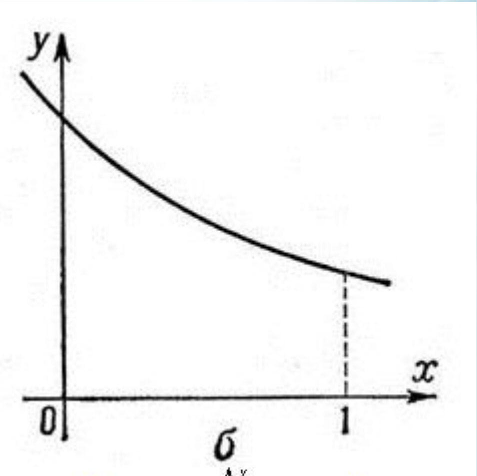
- Функция y=f(x) называется **возрастающей** в некотором интервале, если в точках этого интервала большему значению аргумента соответствует большее значение функции, и **убывающей**, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

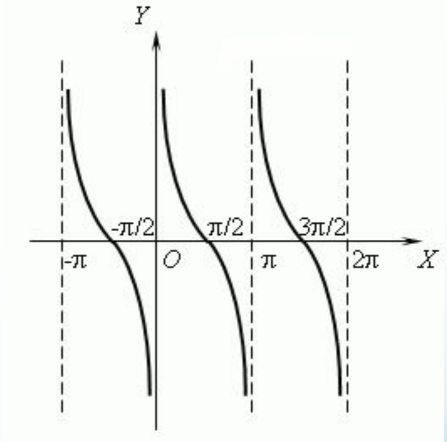


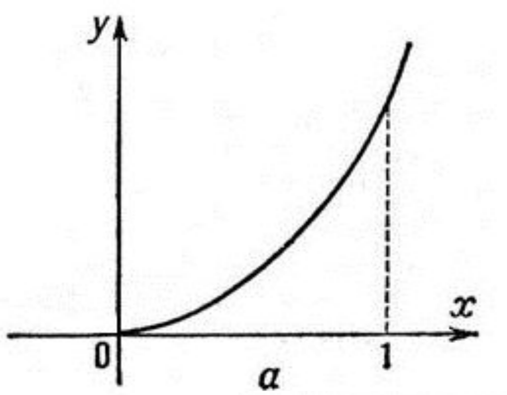


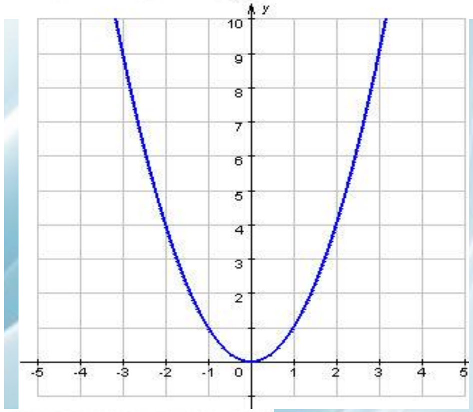

y
$y=\sqrt{x}$
2
1
0
1
4
x

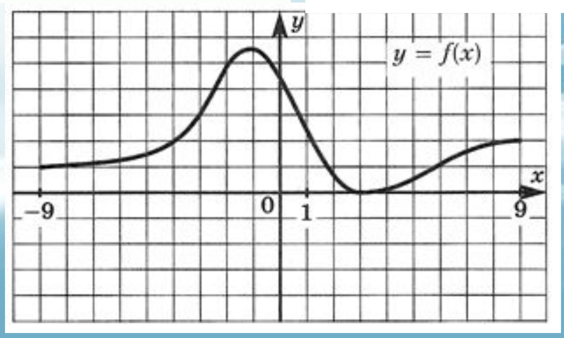

2
2
0
-1
X

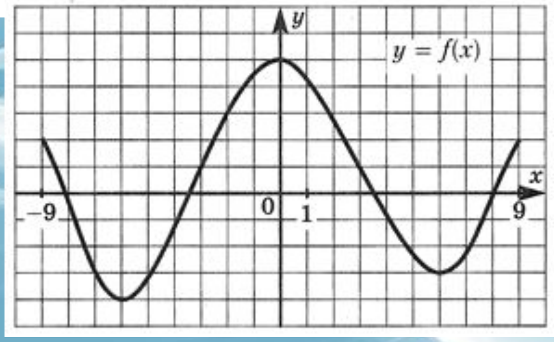

y
x
0
1
б


Y
-π/2
π/2
3π/2
-π
O
π
2π
X


y
x
0
1
a

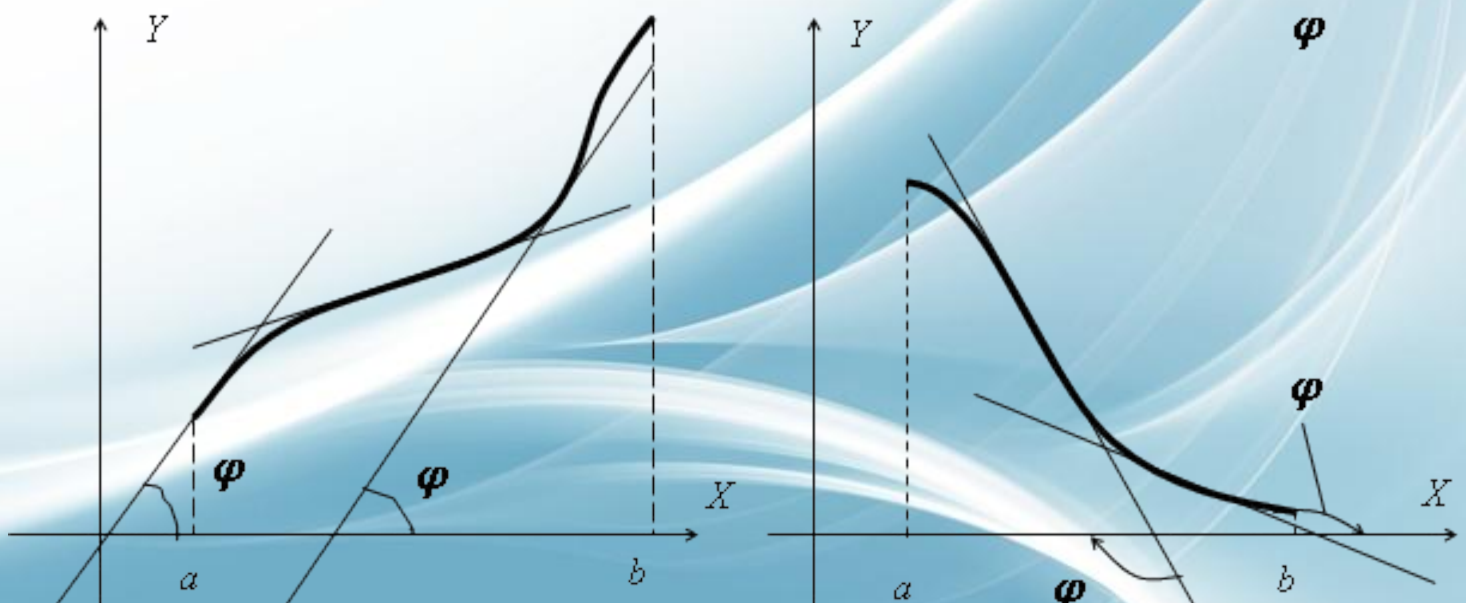

y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5


y
$y = f(x)$
x
−9
0
1
9


y
$y = f(x)$
x
−9
0
1
9

Теорема 1.

- Если дифференцируемая функция y=f(x) **возрастает (убывает)** в данном интервале, то производная этой функции ***не отрицательна (не положительна)*** в этом интервале.



Теорема 2.

- Если производная функции y=f(x) **положительна (отрицательна)** на некотором интервале, то функция в этом интервале ***монотонно возрастает (монотонно убывает)***.

Правило нахождения интервалов монотонности

1. Находим область определения функции f(x).
2. Вычисляем производную f’(x) данной функции.
3. Находим точки, в которых f’(x)=0 или не существует. Эти точки называются **критическими** для функции f(x).
4. Делим область определения функции этими точками на интервалы. Они являются **интервалами монотонности**.
5. Исследуем знак f’(x) на каждом интервале. Если **f’(x)›0**, то на этом интервале **f(x) возрастает**; если **f’(x)‹0**, то на таком интервале функция **f(x) убывает**.

<u>Пример №1.</u> Найти промежутки монотонности функции $y=2x^3-3x^2-36x+5$

1. **<u>Область определения</u>**: R. Функция непрерывна.
2. **<u>Вычисляем производную :</u>** $y'=6x^2-6x-36$.
3. **<u>Находим критические точки:</u>** $y'=0$.

$$x^2-x-6=0$$

$$Д=1-4*(-6)*1=1+24=25$$

$$x_1=\frac{1-5}{2}=-2 \qquad x_2=\frac{1+5}{2}=3$$

4. **<u>Делим область определения на интервалы:</u>**

5. **Функция возрастает** при ***xϵ(-∞;-2]∪[3;+∞)***, *функция* ***убывает*** *при* ***xϵ[-2;3]***.

Пример №2. Найти промежутки монотонности функции $y=x^3-3x^2$

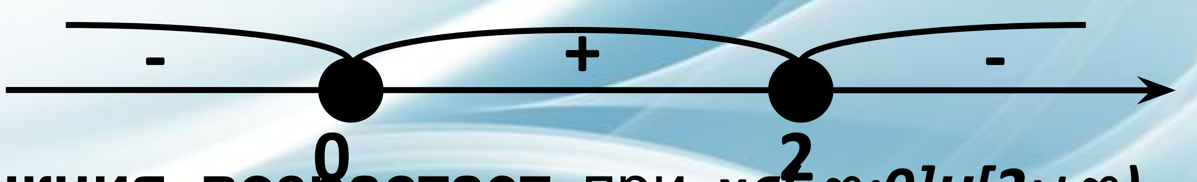
1. **Область определения**: R. Функция непрерывна.
2. **Вычисляем производную :** $y'=3x^2-6x$.
3. **Находим критические точки:** $y'=0$.

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

$$x1=0 \text{ и } x2=2$$

4. **Делим область определения на интервалы:**

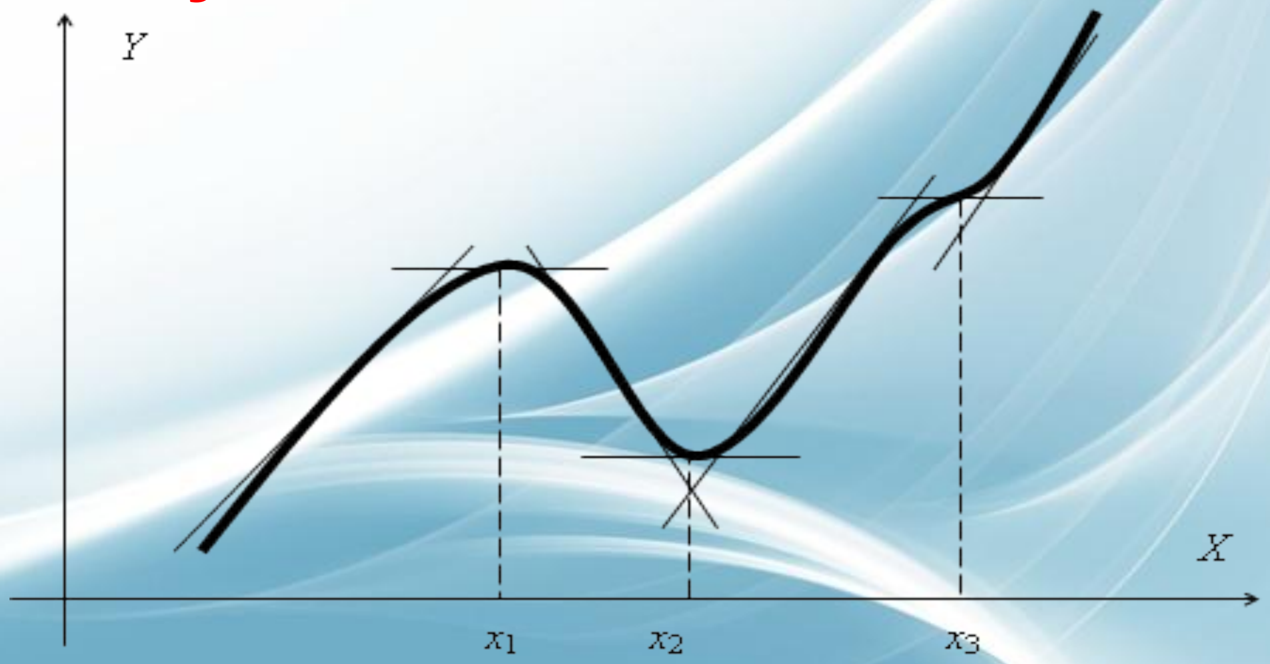


5. **Функция возрастает** при $x \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$, функция ***убывает*** *при* $x \in [0;2]$.

- Точку $x=x_0$ называют **точкой минимума** функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $\mathbf{f(x) \geq f(x_0)}$.
- Точку $x=x_0$ называют **точкой максимума** функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $\mathbf{f(x) \leq f(x_0)}$.

Теорема 3.

- Если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке $x=x_0$, то в этой точке **производная** функции или **равна нулю**, или **не существует**.



Теорема 4.

- Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 **меняет знак**, то точка x_0 **является точкой экстремума** функции $f(x)$.

Если производная меняет знак с + на –, то точка будет являться точкой максимума, если с – на +, то точка будет точкой минимума

Пример №3. Найти экстремумы функции

$y=-2x^3-3x^2+12x-4$

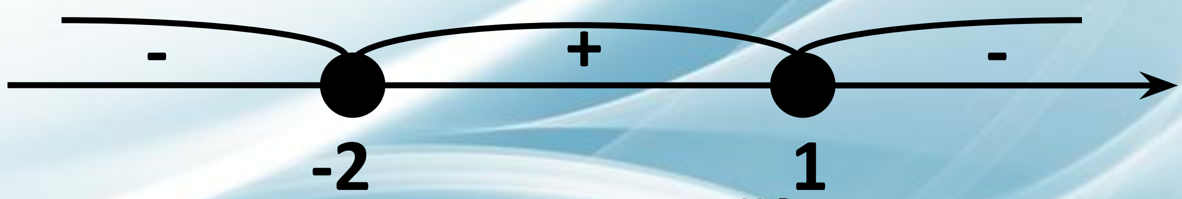
1. **Область определения**: R. Функция непрерывна.
2. **Вычисляем производную :** $y'=-6x^2-6x+12$.
3. **Находим критические точки:** $y'=0$.

$$-x^2-x+2=0$$

$$Д=1-4*(-1)*2=1+8=9$$

$$x_1=1;\ x_2=-2$$

4. **Делим область определения на интервалы:**



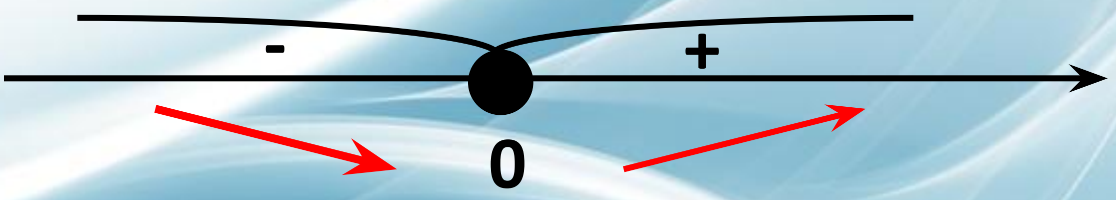
5. ***x=-2 – точка минимума***. *Найдём минимум функции* ***y_{min}=-24***. ***x=1 – точка максимума***. *Найдём максимум функции:* ***y_{max}=3***.

Работа на уроке:

- № 564. **Исследовать на экстремум функцию $y=x^2+2$.**

Решение:

1. Находим область определения функции: $D(y)=R$.
2. Находим производную: $y'=(x^2+2)'=2x$.
3. Приравниваем её к нулю: $2x=0$, откуда $x=0$ – критическая точка.
4. Делим область определения на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:

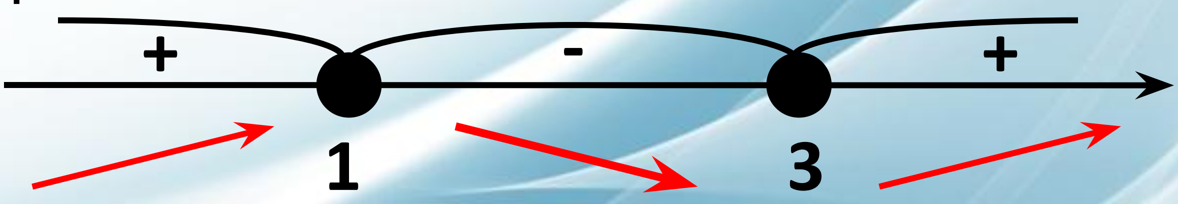


5. $x=0$ – точка минимума. Найдём минимум функции $y_{min}=2$.

- № 565. **Исследовать на экстремум функцию $y=1/3x^3-2x^2+3x+1$.**

Решение:

1. Находим область определения функции: $D(y)=R$.
2. Находим производную: $y'=(1/3x^3-2x^2+3x+1)'=x^2-4x+3$.
3. Приравниваем её к нулю: $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=3$ – критические точки.
4. Делим область определения на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:



5. $x=1$ – точка максимума. Найдём максимум функции $y_{max}=7/3$. $x=3$ – точка минимума. Найдём минимум функции: $y_{min}=1$.

- **№ 566. Исследовать на экстремум функцию $y=x^3+3x^2+9x-6$.**

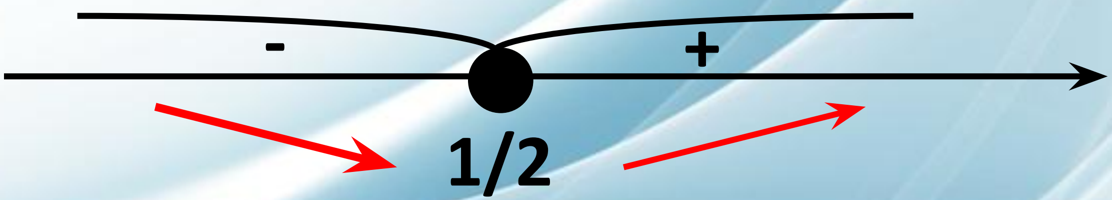
Решение:

1. Находим область определения функции: $D(y)=R$.
2. Находим производную: $y'=(x^3+3x^2+9x-6)'=3x^2+6x+9$.
3. Приравниваем её к нулю: $3x^2+6x+9=0$, откуда $D<0$. То есть критических точек не существует.
4. Однако, функция возрастает на всей $D(y)$, так как $y'=3x^2+6x+9>0$:

- № 571. **Исследовать на экстремум функцию $y=x^2-x-6$.**

Решение:

1. Находим область определения функции: D(y)=R.
2. Находим производную: $y'=(x^2-x-6)'=2x-1$.
3. Приравниваем её к нулю: $2x-1=0$, откуда $x=1/2$ – критическая точка.
4. Делим область определения на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:



5. $x=1/2$ – точка минимума. Найдём минимум функции: $y_{min}=-6,25$.

Задание на дом:

1. Учебник Лисичкин В. Т., Соловейчик И. Л.: № 572, 573, 575, 576 – стр. 253;
2. Выучить достаточные и необходимые условия монотонности и существования экстремумов функции.