«Теория без практики мертва или бесполезна, практика без теории невозможна или пагубна».
А. Н. Крылов

Тема урока: Применение производной в физике, математике, биологии и жизни

Учитель математики ВКК МБОУ СОШ с углубленным изучением отдельных предметов Орлова О.В.

Г. Воронеж

•Тип урока: интегрированный

•Воспитательная работа:

1. Расширение кругозора и познавательной деятельности учащихся
2. Развитие логического мышления и умение применять свои знания

•Техническое обеспечение:

1. Интерактивная доска
2. Компьютер
3. Диск

ЦЕЛЬ УРОКА

- *обобщить и закрепить ключевые задачи по теме*
- *обобщить и закрепить применение техники дифференцирования*
- *учить работать с теоретическими вопросами темы*
- *научиться применять производную в физике, биологии и математике*
- *обобщить, систематизировать знания о производной*

Повторение основных понятий:

1. Скажите основное определение производной?

2. Что вы знаете о производной (свойства, теоремы)?

3. Знаете ли вы какие-нибудь примеры задач с применением производной?

Обоснование термина производной :

Производная – одно из фундаментальных понятий математики. Умение решать задачи с применением производной требует хорошего знания теоретического материала, умения проводить исследование различных ситуаций.

Поэтому сегодня на уроке мы закрепим и систематизируем полученные знания, рассмотрим и оценим работу каждой группы и на примере некоторых задач покажем, как при помощи производной решать другие задачи и нестандартные задачи с применением производной.

Разбор домашней работы:

№ 396,

397 (а, б),

401 (2),

425 (4,7)

Домашнее задание:

№ 428 (2),

430 (1),

433 (1, 3),

435*, 439*

Объяснение нового материала и запись конспекта:

I. Мгновенная мощность есть производная работы по времени:

W=lim ΔA/Δt ΔA – изменение работы.

II. Если тело вращается вокруг оси, то угол поворота есть функция времени t

Тогда угловая скорость равна:

W=lim Δφ/Δt=φ′(t)

Δt→0

III. Сила тока есть производная

I=lim Δg/Δt=g′, где **g –** положительный электрический заряд переносимый через сечение проводника за время Δt.

IV. Пусть ΔQ – количество теплоты, необходимое для изменения температуры за Δt времени, тогда

lim ΔQ/Δt=Q′=C – удельная теплоёмкость.

V. Задача о скорости течения химической реакции.

m(t)-m(t0) – количество вещества, вступающее в реакцию от времени t0 до t

V= lim Δm/Δt=m’

Δt→0

$N = N_0 * e^{-\lambda t}$

$N = N_0 * e^{-\lambda t}$

VI. Пусть m – масса радиоактивного вещества. Скорость радиоактивного распада: **V= lim Δm/Δt=m′(t)**

Δt→0

В дифференцированной форме закон радиоактивного распада имеет вид:

dN/dt=-λN, где **N** – число ядер не распавшихся время **t.**

Интегрируя это выражение, получаем: **dN/N= -λdt**

∫dN/N= -λ∫dt lnN= -λt+c, c=const

при **t=0** число радиоактивных ядер **N=N0**, отсюда имеем:

ln N0=const, следовательно **ln N=-λt+ln N0.**

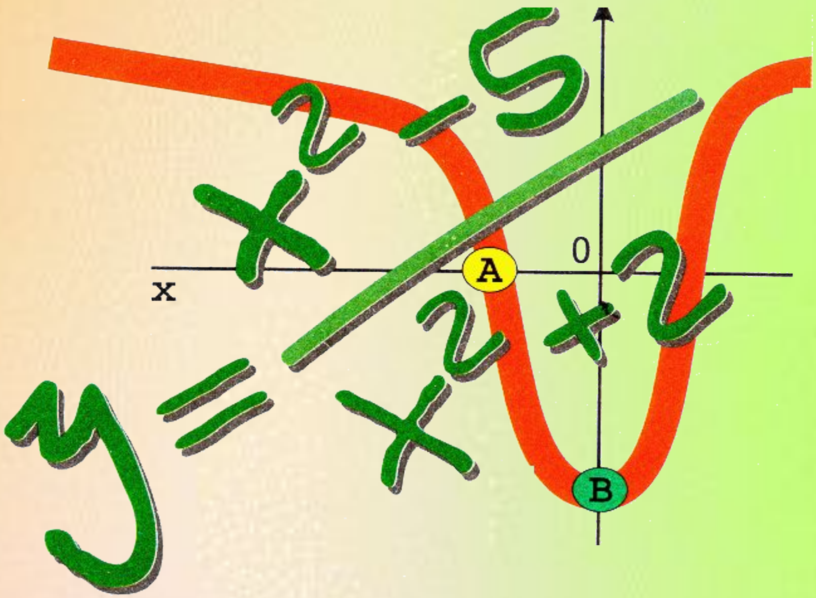
Потенциируя это выражение получаем:

$$N = N_0 * e^{-\lambda t}$$

- закон радиоактивного распада, где **N0** – число ядер в момент времени **t0=0, N** – число ядер, не распавшихся за время **t.**

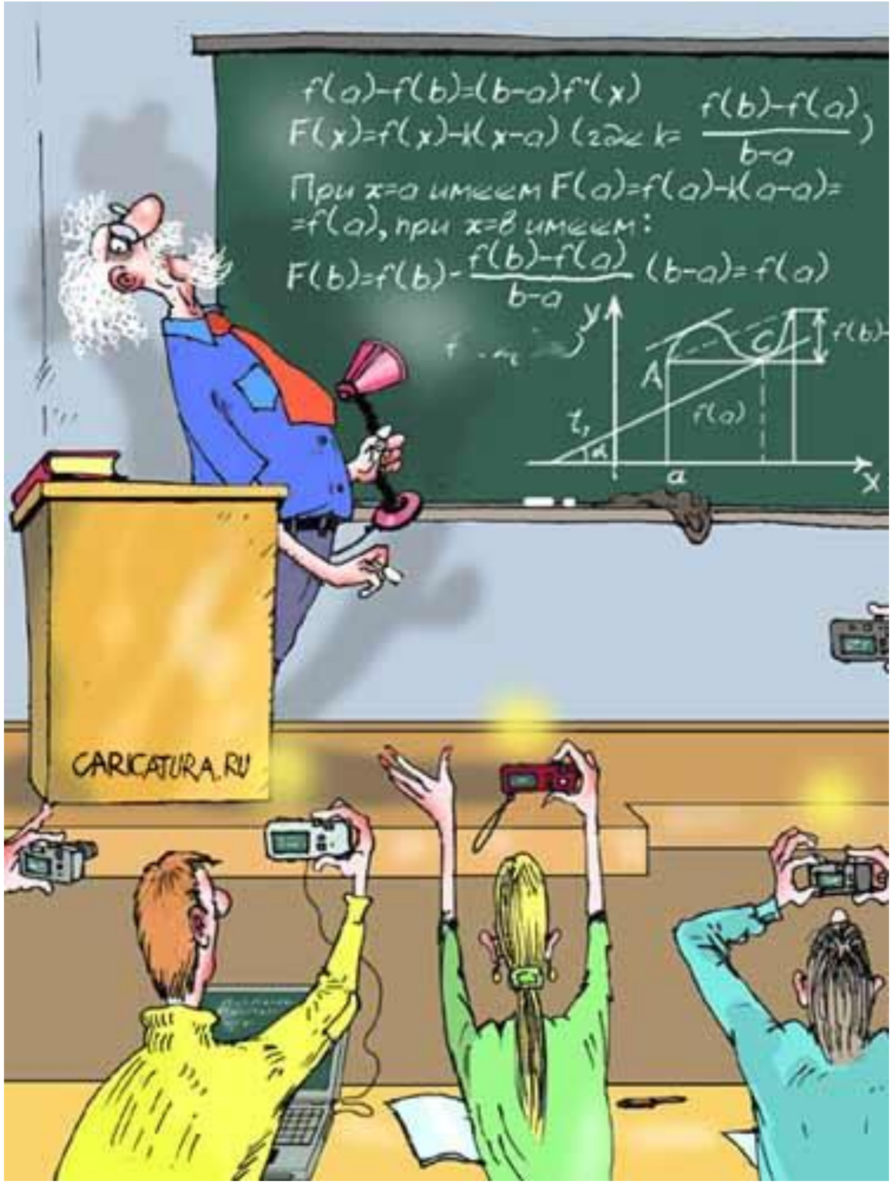
Применение производной в биологии, физике, жизни

Дифференциальное исчисление- это описание окружающего нас мира, выполненное на математическом языке. Производная помогает нам успешно решать не только математические задачи, но и задачи практического характера в разных областях науки, техники и жизни.



$\sqrt{x}$

1. «Сюжет Листик»



Мы с вами изучали производную и её свойства. Философское высказывание Гильберта: «У каждого человека есть определённый кругозор. Когда этот кругозор сужается до бесконечного малого, то он обращается в точку. Тогда человек и говорит что это и есть его точка зрения.»

Давайте попробуем измерить точку зрения на применении производной! Рассмотрим падение как неравномерное движение зависящее от времени.

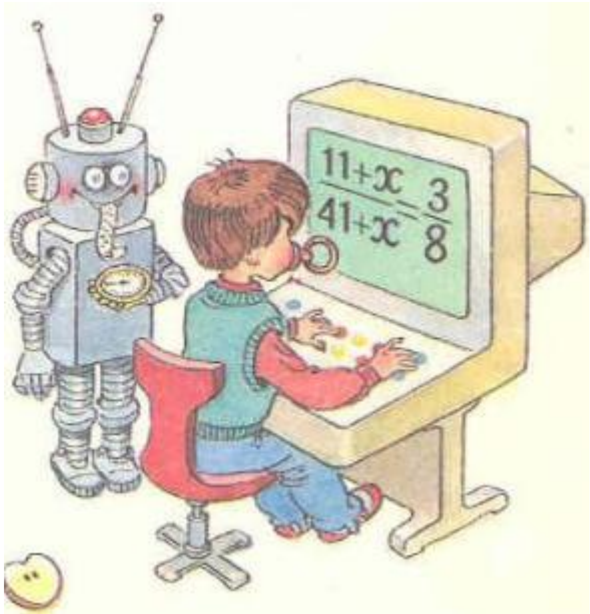
Итак: **S=S(t)   V=S′(t)=x′(t), a=V′(t)=S″(t)**

- **F=ma F=mV′   F=mS″**

Запишем II закон Ньютона:
F=mV′   F=mS″

Открытие приложения «Листок»

2. «Сюжет Суслики, Волки»



Рассмотрим дифференциальные уравнения показательного роста и убывания : **F=ma F=mV' F=mS''** Решение многих задач физики, технической биологии и социальных наук сводятся к задаче нахождения функций y=f(x), удовлетворяющих дифференциальному уравнению **f'(x)=kf(x),** где **k= const** .

Открытие приложения «Волки»

Открытие приложения «Суслики»

3. «Формула Человека»

Человек во столько раз больше атома, во сколько раз он меньше звезды:

$$\sqrt{\frac{\text{Человек}}{\text{Атом}}} = \frac{\text{Звезда}}{\text{Человек}}$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{\text{Человек}} = \text{Звезда}^{*}\ \text{Атом}$$

Это и есть формула, определяющая место человека во вселенной. В соответствии с ней размеры человека представляют среднее пропорциональное звезды и атома.

Применение производной в математике

Производная в математике показывает числовое выражение степени изменений величины, находящейся в одной и тоже точке, под влиянием различных условий.

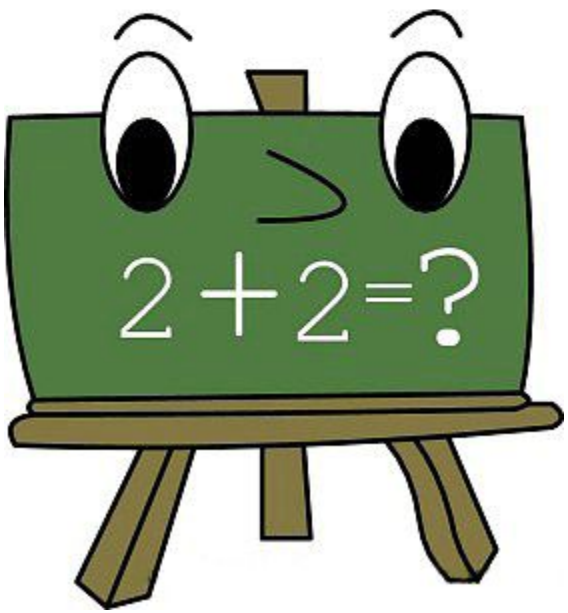
Формула производной встречается нам ещё в 15 веке. Великий итальянский математик Тартальи, рассматривая и развивая вопрос - на сколько зависит дальность полёта снаряда от наклона орудия - применяет её в своих трудах.

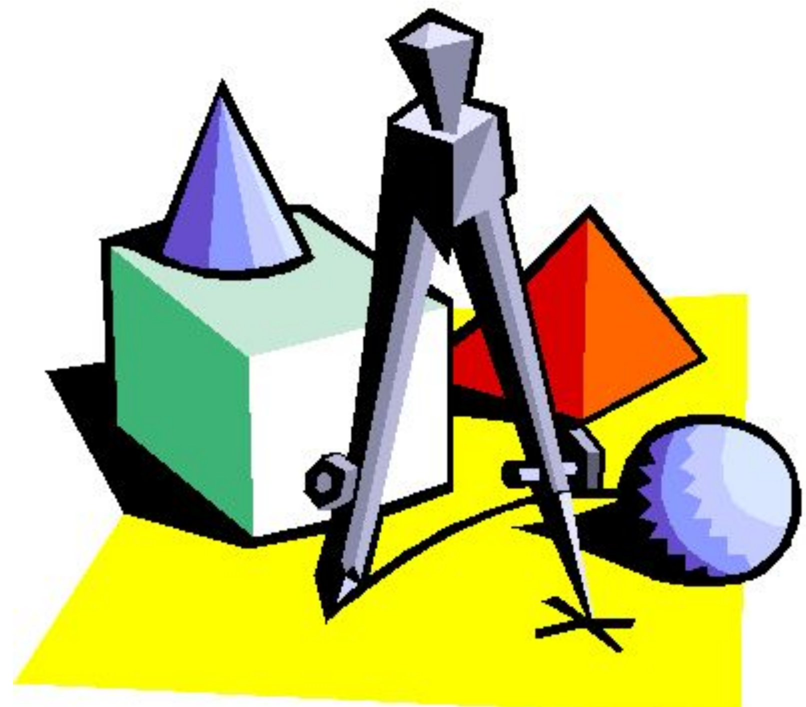
Формула производной часто встречается в работах известных математиков 17 века. Её применяют Ньютон и Лейбниц.

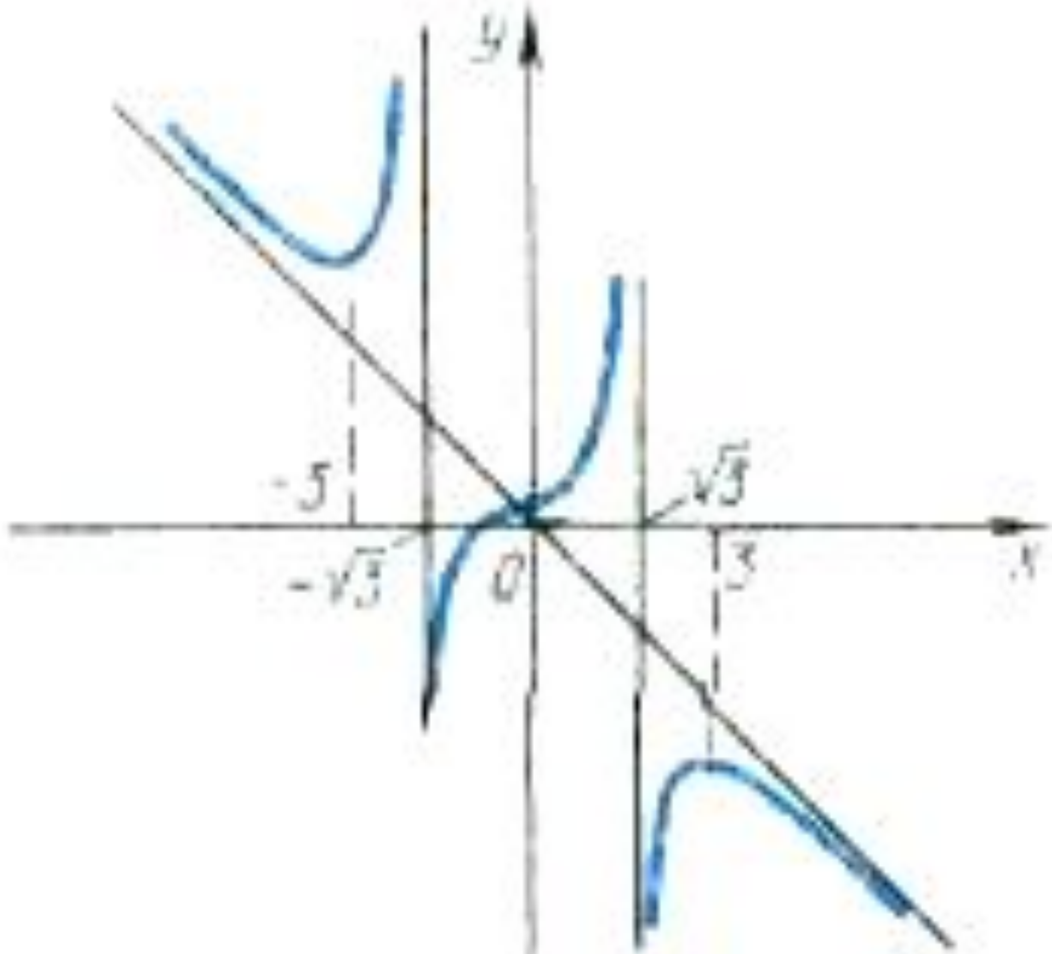
Посвящает целый трактат о роли производной в математике известный учёный Галилео Галилей. Затем производная и различные изложения с её применением стали встречаться в работах Декарта, французского математика Роберваля и англичанина Грегори. Большой вклад по изучению производной внесли такие умы, как Лопиталь, Бернулли, Ланнгранж и др.

<u>№1</u> Построить график и исследовать функцию:

$$y=\frac{\sin^2 x}{2+\sin x}$$







y
-3
$\sqrt{3}$
$-\sqrt{3}$
0
3
x

Минутка релаксации (приложение BBC):

Применение производной в физике

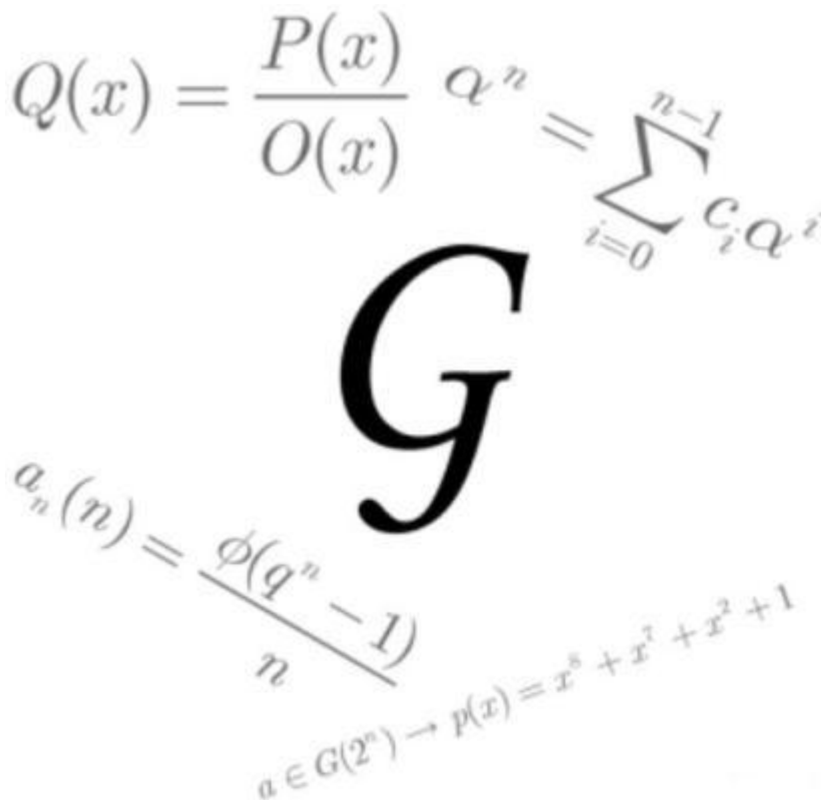
При изучении тех или иных процессов и явлений часто возникает задача определения скорости этих процессов. Её решение приводит к понятию производной, являющемуся основным понятием дифференциального исчисления.

Метод дифференциального исчисления был создан в XVII и XVIII вв. С возникновением этого метода связаны имена двух великих математиков – И. Ньютона и Г.В. Лейбница.

Ньютон пришёл к открытию дифференциального исчисления при решении задач о скорости движения материальной точки в данный момент времени (мгновенной скорости).

В физике производная применяется в основном для вычисления наибольших или наименьших значений каких-либо величин.

<u>№1</u> Потенциальная энергия *U* поля частицы, в котором находится другая, точно такая же частица имеет вид: *U = a/r2 – b/r*, где *a* и *b* — положительные постоянные, *r* — расстояние между частицами. <u>Найти:</u> а) значение *r0* соответствующее равновесному положению частицы; б) выяснить устойчиво ли это положение; в) *Fmax* значение силы притяжения; г) изобразить примерные графики зависимости *U(r)* и *F(r)*.



<u>Решение</u>: **Для определения** $r0$ **соответствующего равновесному положению частицы исследуем** $f = U(r)$ **на экстремум.**

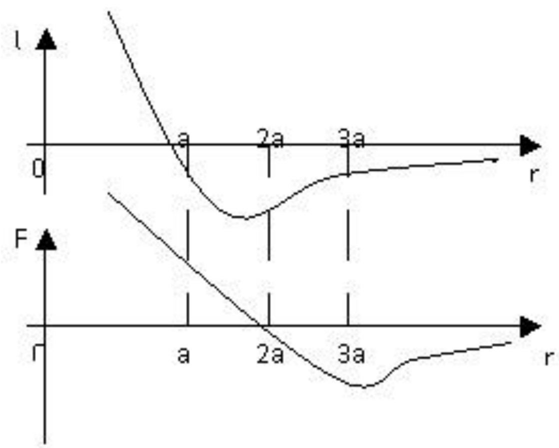
Используя связь между потенциальной энергией поля U **и** F**, тогда** $F = -dU/dr$**, получим** $F = -dU/dr = -(2a/r3+b/r2)=0;$

при этом $r = r0$**;** $2a/r3 = b/r2 \Rightarrow r0 = 2a/b$**;**

Устойчивое или неустойчивое равновесие определим по знаку второй производной:

$d2U/dr02= dF/dr0=-6a/r04 + 2b/r03 = -6a/(2a/b)4+2b/(2a/b)3=(-b4/8a3)<0$**;**

равновесие устойчивое.



Для определения $Fmax$ **притяжения исследую на экстремумы функцию:**

$F = 2a/r3 — b/r2$**;**

$dF/dr = -6a/r4 + 2b/ r3 = 0$**;**

при $r = r1 = 3a/b$**;**

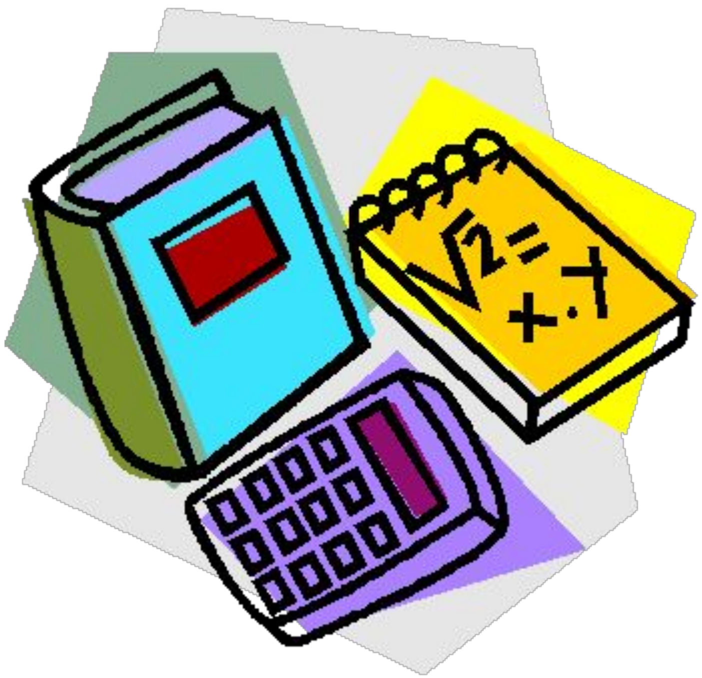
подставляя, получу $Fmax = 2a/r31 — b/r31 = -b3/27a2$**;**

$U(r) = 0$**;** **при** $r = a/b$**;** $U(r)min$ **при** $r = 2, a/b = r0$**;**

$F = 0;$ $F(r)max$ **при** $r = r1 = 3a/b$**;**

<u>Ответ</u>: $F(r)max$ **при** $r = r1 = 3a/b$**;**

__№2__ **Цепь с внешним сопротивлением *R = 0,9 Ом* питается от батареи из *k=36* одинаковых источников, каждый из которых имеет ЭДС *E=2 В* и внутреннее сопротивление *r0 = 0,4 Ом*. Батарея включает *n* групп, соединенных параллельно, а в каждой из них содержится *m* последовательно соединенных аккумуляторов. При каких значениях *m*, *n* будет получена максимальная *J* во внешнем *R.***



<u>Решение</u>:

При последовательном соединении аккумуляторов $E_{гр} = m*E$; $r_{гр} = r_0*m$;

а при параллельном соединении одинаковых $r_{бат} = r_0m/n$; $E_{бат} = m*E$,

По закону Ома $J = mE/(R + r_0m/n) = mEn/(nR + r_0m)$

Т.к. k – общее число аккумуляторов, то $k = mn$;

$J = kE/(nR + r_0m) = kE/(nR + kr_0/n)$;

Для нахождения условия при котором J тока в цепи максимальная исследую функцию $J = J(n)$ на экстремум взяв производную по n и приравняв ее к нулю.

$J'n\text{-}(kE(R—kr_0/n2))/ (nR + kr_0/n)2 = 0$;

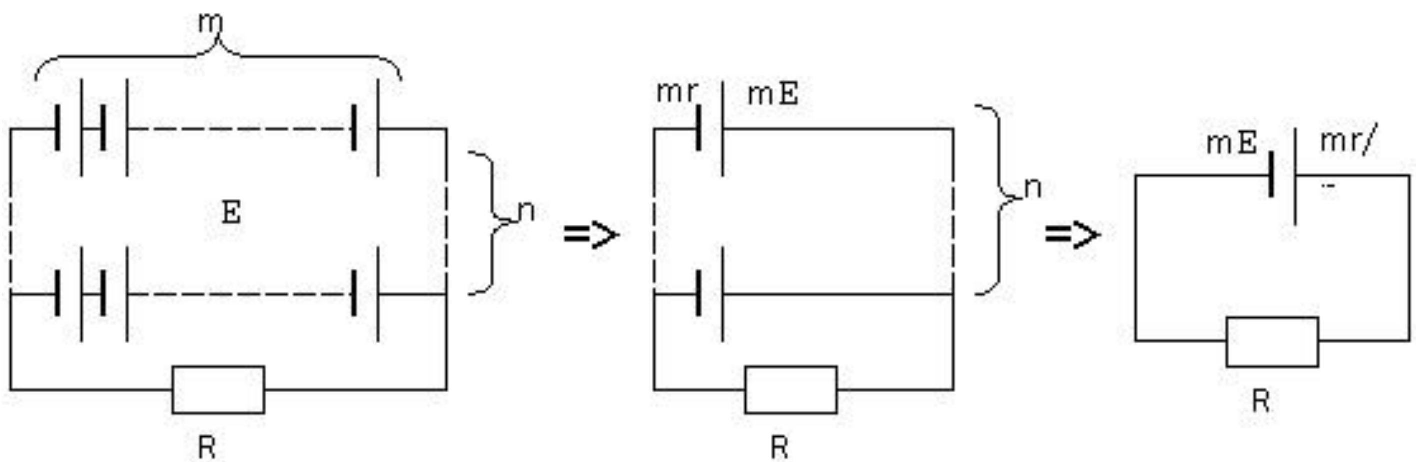
$$n2 = \underline{kr/R}$$

$$n = \sqrt{kr/R} = \sqrt{3{,}6*0{,}4/0{,}9} = 4;$$

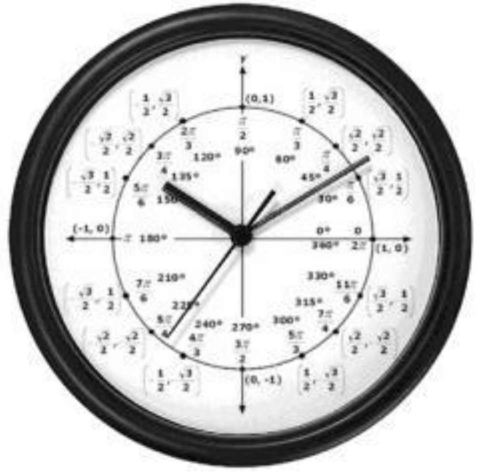
$$m = k/n = 36/4 = 9;$$

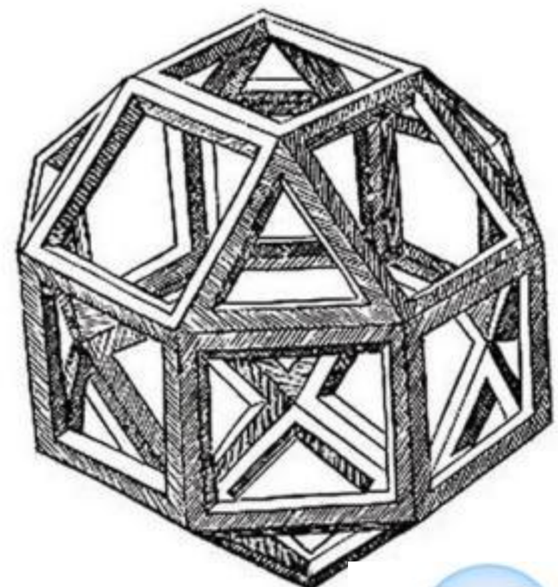
при этом $J_{max} = kE/(nR + mr_0) = 36*2/(4*0{,}9 + 9*0{,}4) = 10\ A$;

<u>Ответ</u>: $n = 4$, $m = 9$.



<u>№3</u> Платформа массой *M* начинает двигаться вправо под действием постоянной силы *F*. Из неподвижного бункера на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна *μ* кг/с. Пренебрегая трением, найти зависимость от времени ускорения a платформы в процессе погрузки. Определить ускорение *a1* платформы в случае, если песок не насыпается на платформу, а из наполненной высыпается через отверстие в ее дне с постоянной скоростью *μ* кг/с.





<u>Решение</u>: Рассмотрим сначала случай, когда песок насыпается на платформу

Движение системы платформа-песок можно описать с помощью второго закона Ньютона:

$dP/dt = F\Sigma$

P – импульс системы платформа-песок, $F\Sigma$ – сила, действующая на систему платформа-песок.

Если через p обозначить импульс платформы, то можно написать:

$dp/dt = F$

Найдем изменение импульса платформы за бесконечно малый промежуток времени Δt: $\Delta p = (M+\mu(t+\Delta t))(u+\Delta u) - (M+\mu t)u = F\Delta t;$

где u – скорость платформы.

Раскрыв скобки и, проведя сокращения получаем:

$\Delta p = \mu u\Delta t + M\Delta u+\mu\Delta ut+ \mu\Delta u\Delta t = F\Delta t$

Разделим на Δt и перейдем к пределу $\Delta t \rightarrow 0$

$Mdu/dt+\mu tdu/dt+\mu u=F$ или $d[(M+\mu t)u]/dt = F$

Это уравнение можно проинтегрировать, считая начальную скорость платформы равной нулю: $(M+\mu t)u = Ft.$

Следовательно: $u = Ft/(M+\mu t)$

Тогда, ускорение платформы: $a = du/dt =$

$=(F(M+\mu t)-Ft\mu)/(M+\mu t)2 =$

$=FM / (M+\mu t)2$

Рассмотрим случай, когда песок высыпается из наполненной платформы.

Изменение импульса за малый промежуток времени:

$\Delta p = (M-\mu(t+\Delta t))(u+\Delta u) + \mu\Delta t u - (M-\mu t)u = F\Delta t$

Слагаемое $\mu\Delta t u$ **есть импульс количества песка, которое высыпалось из платформы за время** Δt. **Тогда:**

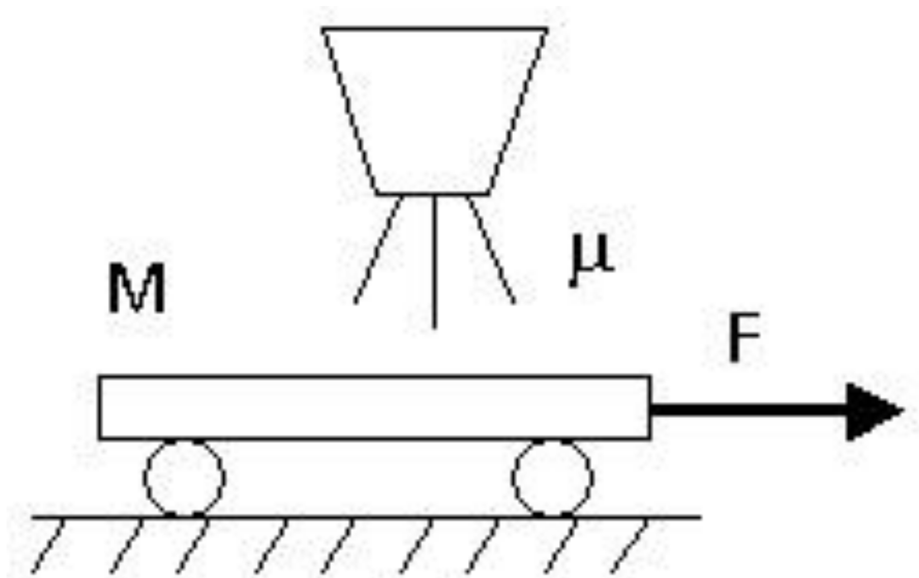
$\Delta p = M\Delta u - \mu t\Delta u - \mu\Delta t\Delta u = F\Delta t$

Разделим на Δt **и перейдем к пределу** $\Delta t \to 0$

$(M-\mu t)du/dt = F$

Или $a1 = du/dt = F/(M-\mu t)$

<u>Ответ</u>: $a = FM / (M+\mu t)2$, $a1 = F/(M-\mu t)$



Работа в классе

(решение номеров из сборника):

№ 1 Найти скорость движения материальной точки в конце 3-й секунды, если движение точки задано уравнением $s = t^2 -11t + 30$.

№ 2 Точка движется прямолинейно по закону $s = 6t – t^2$. В какой момент ее скорость окажется равной нулю?

Два тела движутся прямолинейно: одно по закону $s = t^3 – t^2 - 27t$, 3 №
другое — по закону $s = t^2 + 1$. Определить момент, когда скорости этих
.тел окажутся равными

№ 4 Для машины, движущейся со скоростью 30 м/с, тормозной путь определяется формулой *s(t)* $=30t—16t^2$, где ***s(t) -*** путь в метрах, ***t*** - время торможения в секундах. В течении какого времени осуществляется торможение до полной остановки машины? Какое расстояние пройдет машина с начала торможения до полной ее остановки?

№5 Тело массой 8 кг движется прямолинейно по закону $s = 2t^2 + 3t - 1$. Найти кинетическую энергию тела ***($mv^2/2$)*** через 3 секунды после начала движения.

Решение: Найдем скорость движения тела в любой момент времени:

$V = ds / dt = 4t + 3$

Вычислим скорость тела в момент времени $t = 3$:

$V_{t=3} = 4 * 3 + 3 = 15$ (м/с).

Определим кинетическую энергию тела в момент времени $t = 3$:

$mv^2/2 = 8 \cdot 15^2 / 2 = 900$ (Дж).

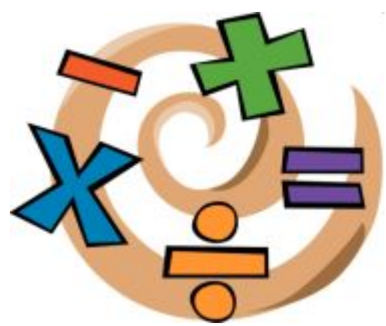
№6 Найти кинетическую энергию тела через 4 с после начала движения, если его масса равна 25 кг, а закон движения имеет вид $s = 3t^2 - 1$.

№7 Тело, масса которого 30 кг, движется прямолинейно по закону $s = 4t^2 + t$. Доказать, что движение тела происходит под действием постоянной силы.

Решение: Имеем $s' = 8t+1$, $s'' = 8$. Следовательно, $a(t) = 8$ (м/с^2), т. е. при данном законе движения тело движется с постоянным ускорением 8 м/с^2. Далее, так как масса тела постоянна (30 кг), то по второму закону Ньютона действующая на него сила $F=ma=30*8=240$ (Н)-также постоянная величина.

№8 Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $s(t)=t^3-3t^2+2$. Найти силу, действующую на тело в момент времени $t=4$с.

№9 Материальная точка движется по закону $s=2t^3-6t^2+4t$. Найти ее ускорение в конце 3-й секунды.



ПРОВЕРЬ СЕБЯ!!!

Выполните самостоятельную работу

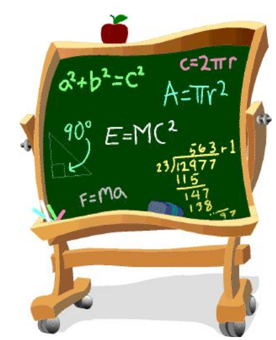
Найдите производные функций:

а) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;

б) $y = x \operatorname{ctg} x$;

в) $y = (5x + 1)^7$.

Прямая $y = 2x$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 5x^2 + 9x + 3$. Найдите абсциссу точки касания.



- *Каким **вопросам** был посвящен урок?*
- *Чему **научились** на уроке?*
- *Какие **теоретические факты** обобщались на уроке?*
- *Какие рассмотренные **задачи** оказались наиболее сложными? **Почему?***

Спасибо за просмотр!

До новых встреч!

Литература:

- Амелькин В.В., Садовский А.П. Математические модели и дифференциальные уравнения.- Минск: Высшая школа, 1982.-272с.
- Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987.-160с.
- Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.- Минск: Наука и техника, 1979.-744с.
- Журнал «Потенциал» Ноябрь 2007 №11
- «Алгебра и начала анализа» 11 класс С.М. Никольский, М.К. Потапов и др.
- «Алгебра и математический анализ» Н.Я. Виленкин и др.
- «Математика» В.Т. Лисичкин, И.Л. Соловейчик 1991 год