

**«Теория без практики мертва
или бесполезна, практика без
теории невозможна или пагубна».**
А. Н. Крылов

**Тема урока: Применение производной в физике,
математике, биологии и жизни**

Учитель математики ВКК МБОУ
СОШ с углубленным изучением
отдельных предметов Орлова О.В.

Г. Воронеж

• *Тип урока:* интегрированный

• *Воспитательная работа:*

1. Расширение кругозора и познавательной деятельности учащихся
2. Развитие логического мышления и умение применять свои знания

• *Техническое обеспечение:*

1. Интерактивная доска
2. Компьютер
3. Диск

ЦЕЛЬ УРОКА

- **обобщить и закрепить ключевые задачи по теме**
- **обобщить и закрепить применение техники дифференцирования**
- **учить работать с теоретическими вопросами темы**
- **научиться применять производную в физике, биологии и математике**
- **обобщить, систематизировать знания о производной**



Повторение основных понятий:

- 1. Скажите основное определение производной?**
- 2. Что вы знаете о производной (свойства, теоремы)?**
- 3. Знаете ли вы какие-нибудь примеры задач с применением производной?**



Обоснование термина производной :

Производная – одно из фундаментальных понятий математики. Умение решать задачи с применением производной требует хорошего знания теоретического материала, умения проводить исследование различных ситуаций.

Поэтому сегодня на уроке мы закрепим и систематизируем полученные знания, рассмотрим и оценим работу каждой группы и на примере некоторых задач покажем, как при помощи производной решать другие задачи и нестандартные задачи с применением производной.



Разбор домашней работы:

№ 396,
397 (а, б),
401 (2),
425 (4, 7)



Домашнее задание:



№ 428 (2),

430 (1),

433 (1, 3),

435*, 439*

Объяснение нового материала и запись конспекта:

I. Мгновенная мощность есть производная работы по времени:

$W = \lim \Delta A / \Delta t$ ΔA – изменение работы.

II. Если тело вращается вокруг оси, то угол поворота есть функция времени t

Тогда угловая скорость равна:

$W = \lim \Delta \varphi / \Delta t = \varphi'(t)$

$\Delta t \rightarrow 0$

III. Сила тока есть производная

$I = \lim \Delta g / \Delta t = g'$, где g – положительный электрический заряд переносимый через сечение проводника за время Δt .

IV. Пусть ΔQ – количество теплоты, необходимое для изменения температуры за Δt времени, тогда

$\lim \Delta Q / \Delta t = Q' = C$ – удельная теплоёмкость.

V. Задача о скорости течения химической реакции.

$m(t) - m(t_0)$ – количество вещества, вступающее в реакцию от времени t_0 до t

$V = \lim \Delta m / \Delta t = m'$

$\Delta t \rightarrow 0$

$$N = N_0 * e^{-\lambda t}$$

VI. Пусть m – масса радиоактивного вещества. Скорость радиоактивного распада:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = m'(t)$$

В дифференцированной форме закон радиоактивного распада имеет вид:

$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, где N – число ядер не распавшихся время t .

Интегрируя это выражение, получаем: $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \quad \ln N = -\lambda t + c, \quad c = \text{const}$$

при $t=0$ число радиоактивных ядер $N=N_0$, отсюда имеем:

$$\ln N_0 = c, \quad \text{следовательно} \quad \ln N = -\lambda t + \ln N_0.$$

Потенцируя это выражение получаем:

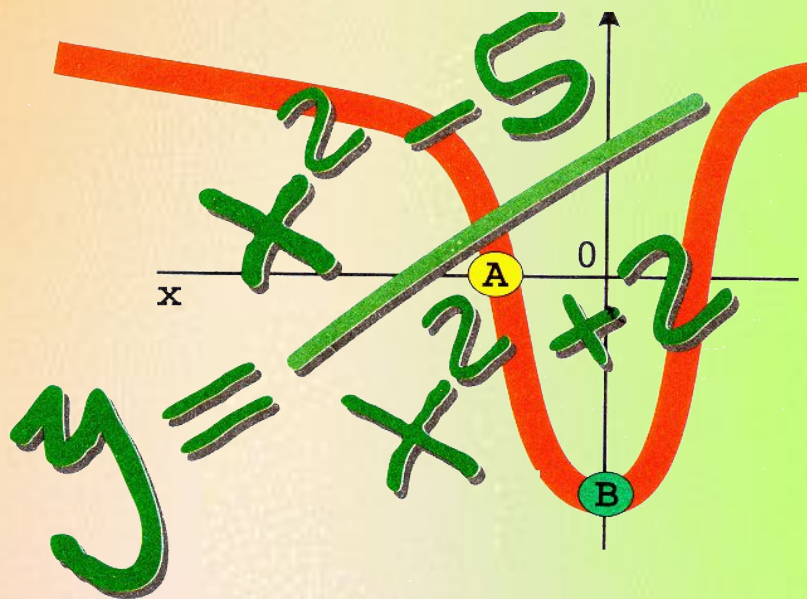
$$N = N_0 * e^{-\lambda t}$$

- закон радиоактивного распада, где N_0 – число ядер в момент времени $t_0=0$, N – число ядер, не распавшихся за время t .

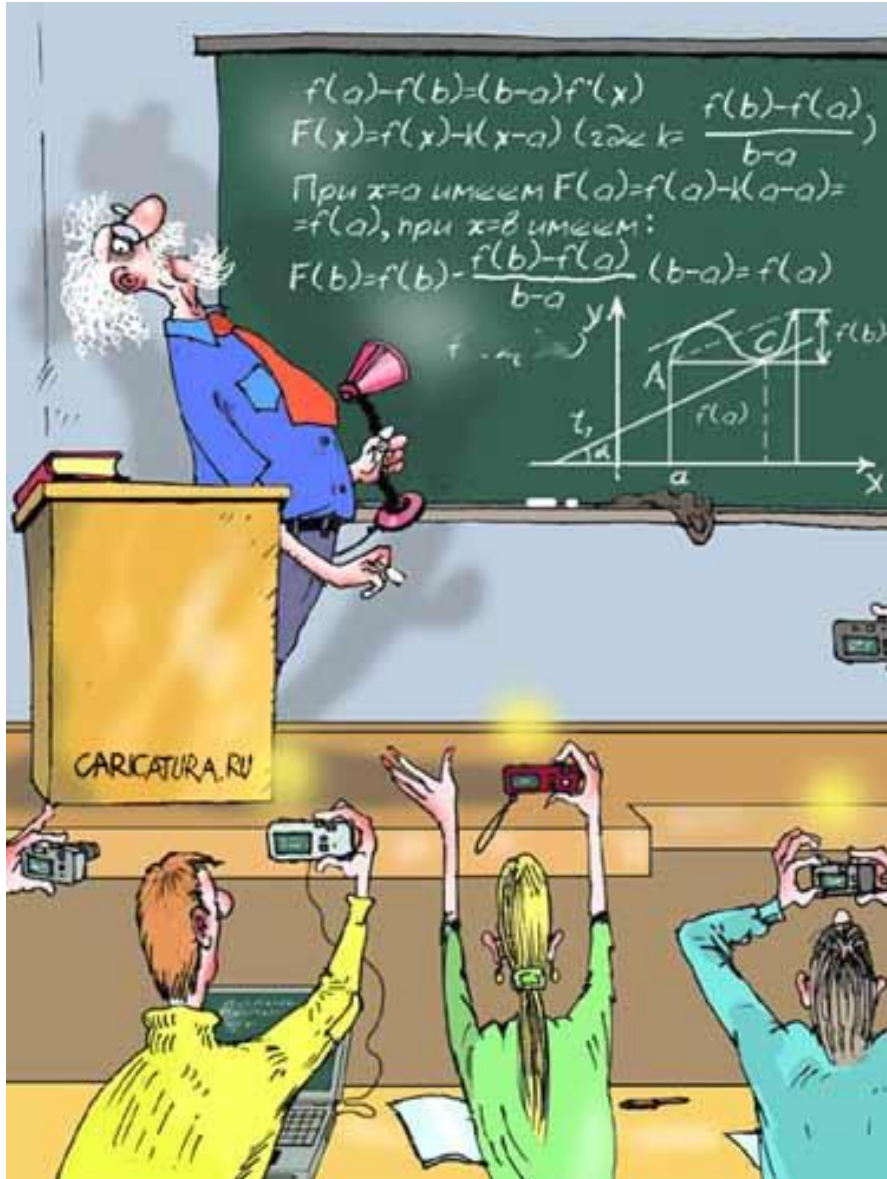
Применение производной в биологии, физике, жизни



Дифференциальное исчисление- это описание окружающего нас мира, выполненное на математическом языке. Производная помогает нам успешно решать не только математические задачи, но и задачи практического характера в разных областях науки, техники и жизни.



1. «Сюжет Листик»



Мы с вами изучали производную и её свойства. Философское высказывание Гильберта: «У каждого человека есть определённый кругозор. Когда этот кругозор сужается до бесконечного малого, то он обращается в точку. Тогда человек и говорит что это и есть его точка зрения.»

Давайте попробуем измерить точку зрения на применении производной! Рассмотрим падение как неравномерное движение зависящее от времени.

Итак: $S=S(t)$ $V=S'(t)=x'(t)$, $a=V'(t)=S''(t)$

• $F=ma$ $F=mV'$ $F=mS''$

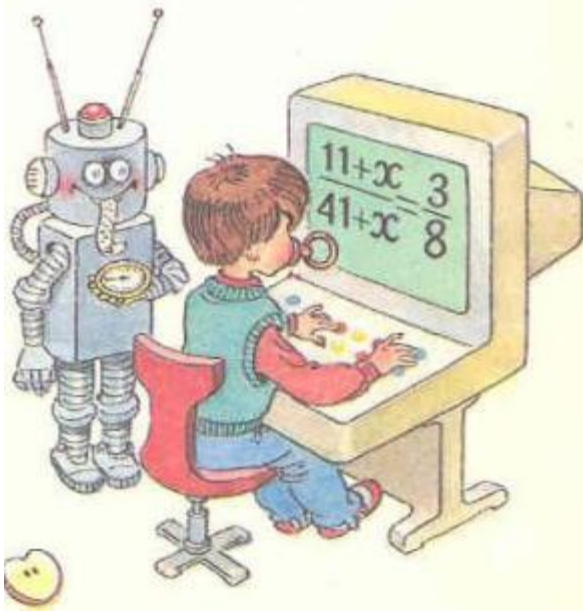
Запишем II закон Ньютона:
 $F=mV'$ $F=mS''$



Открытие приложения «Листок»



2. «Сюжет Суслики, Волки»



Рассмотрим дифференциальные уравнения показательного роста и убывания : $F=ma$ $F=mV'$ $F=mS''$
Решение многих задач физики, технической биологии и социальных наук сводятся к задаче нахождения функций $y=f(x)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению $f'(x)=kf(x)$, где $k=const$.



Открытие приложения «Волки»



Открытие приложения «Суслики»



3. «Формула Человека»

Человек во столько раз больше атома, во сколько раз он меньше звезды:

$$\sqrt{\frac{\text{Человек}}{\text{Атом}}} = \frac{\text{Звезда}}{\text{Человек}}$$



Отсюда следует, что

$$\sqrt{\text{Человек}} = \sqrt{\text{Звезда} \cdot \text{Атом}}$$



Это и есть формула, определяющая место человека во вселенной. В соответствии с ней размеры человека представляют среднее пропорциональное звезды и атома.





Применение производной в математике

Производная в математике показывает числовое выражение степени изменений величины, находящейся в одной и той же точке, под влиянием различных условий.

Формула производной встречается нам ещё в 15 веке. Великий итальянский математик Тарталья, рассматривая и развивая вопрос - на сколько зависит дальность полёта снаряда от наклона орудия - применяет её в своих трудах.

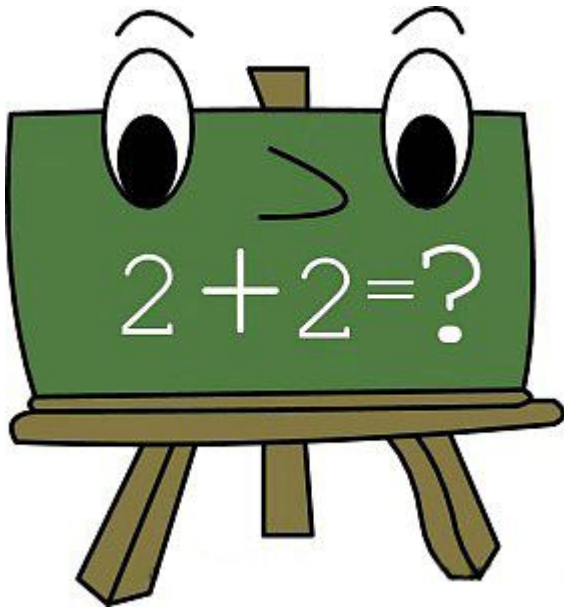
Формула производной часто встречается в работах известных математиков 17 века. Её применяют Ньютон и Лейбниц.

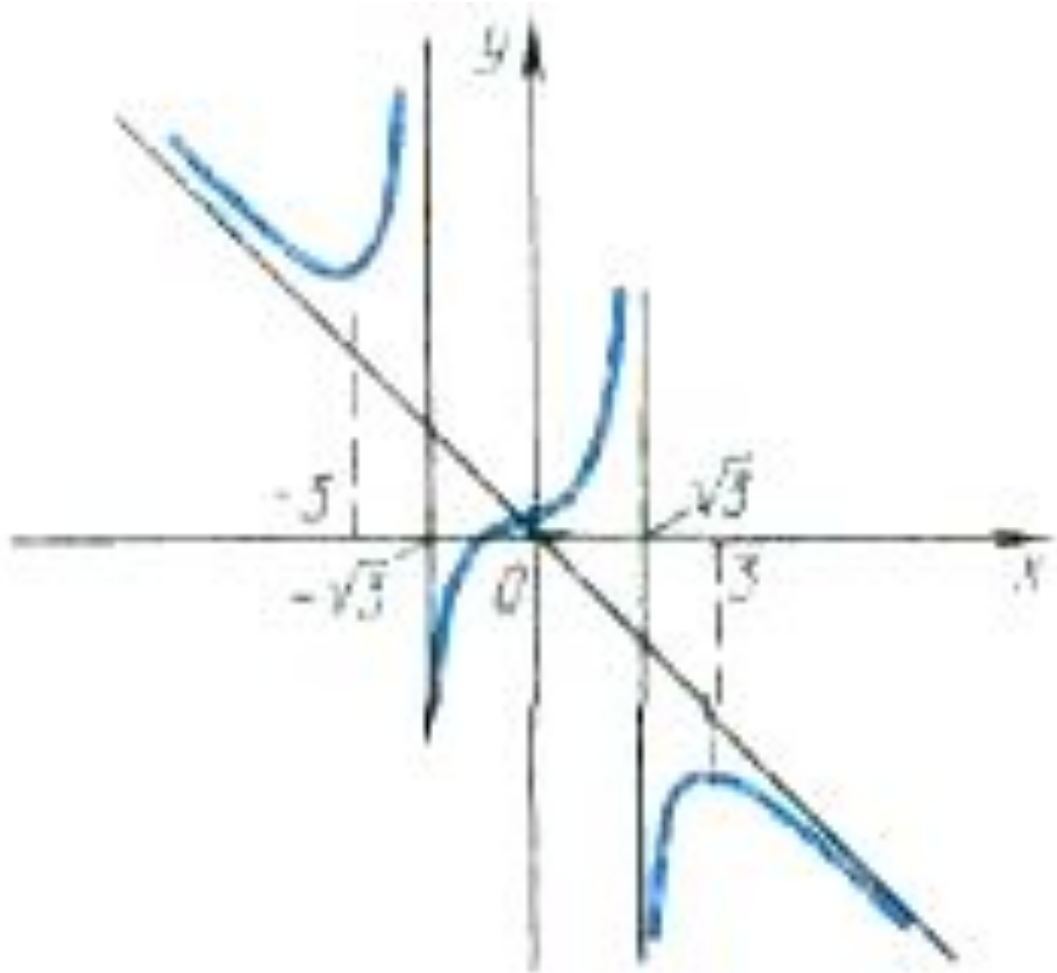
Посвящает целый трактат о роли производной в математике известный учёный Галилео Галилей. Затем производная и различные изложения с её применением стали встречаться в работах Декарта, французского математика Роберваля и англичанина Грегори. Большой вклад по изучению производной внесли такие умы, как Лопиталь, Бернуллы, Лангранж и др.

№1 Построить график и исследовать функцию:



$$y = \frac{\sin^2 x}{2 + \sin x}$$





Минутка релаксации (приложение ВВС):



Применение производной в физике

При изучении тех или иных процессов и явлений часто возникает задача определения скорости этих процессов. Её решение приводит к понятию производной, являющемуся основным понятием дифференциального исчисления.

Метод дифференциального исчисления был создан в XVII и XVIII вв. С возникновением этого метода связаны имена двух великих математиков – И. Ньютона и Г.В. Лейбница.

Ньютон пришёл к открытию дифференциального исчисления при решении задач о скорости движения материальной точки в данный момент времени (мгновенной скорости).

В физике производная применяется в основном для вычисления наибольших или наименьших значений каких-либо величин.

№1 Потенциальная энергия U поля частицы, в котором находится другая, точно такая же частица имеет вид: $U = a/r^2 - b/r$, где a и b — положительные постоянные, r — расстояние между частицами. Найти:
 а) значение r_0 соответствующее равновесному положению частицы; б) выяснить устойчиво ли это положение; в) F_{\max} значение силы притяжения; г) изобразить примерные графики зависимости $U(r)$ и $F(r)$.

$$Q(x) = \frac{P(x)}{O(x)} \alpha^n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \alpha^i$$

\mathcal{G}

$$a_n(n) = \frac{\phi(q^n - 1)}{n}$$

$$a \in G(2^n) \rightarrow p(x) = x^8 + x^7 + x^2 + 1$$



Решение: Для определения r_0 соответствующего равновесному положению частицы исследуем $f = U(r)$ на экстремум.

Используя связь между потенциальной энергией поля

$$U \text{ и } F, \text{ тогда } F = -dU/dr, \text{ получим } F = -dU/dr = -(2a/r^3 + b/r^2) = 0;$$

при этом $r = r_0$; $2a/r^3 = b/r^2 \Rightarrow r_0 = 2a/b$;

Устойчивое или неустойчивое равновесие определим по знаку второй производной:

$$d^2U/dr^2 = dF/dr = -6a/r^4 + 2b/r^3 = -6a/(2a/b)^4 + 2b/(2a/b)^3 = (-b^4/8a^3) < 0;$$

равновесие устойчивое.

Для определения F_{\max} притяжения исследую на экстремумы функцию:

$$F = 2a/r^3 - b/r^2;$$

$$dF/dr = -6a/r^4 + 2b/r^3 = 0;$$

при $r = r_1 = 3a/b$;

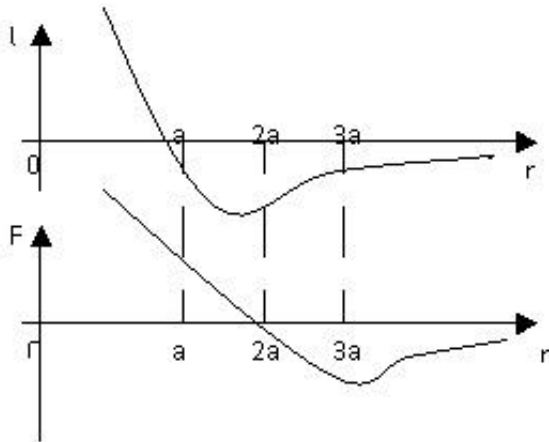
подставляя, получу $F_{\max} = 2a/r_1^3 - b/r_1^2 = -$

$$b^3/27a^2;$$

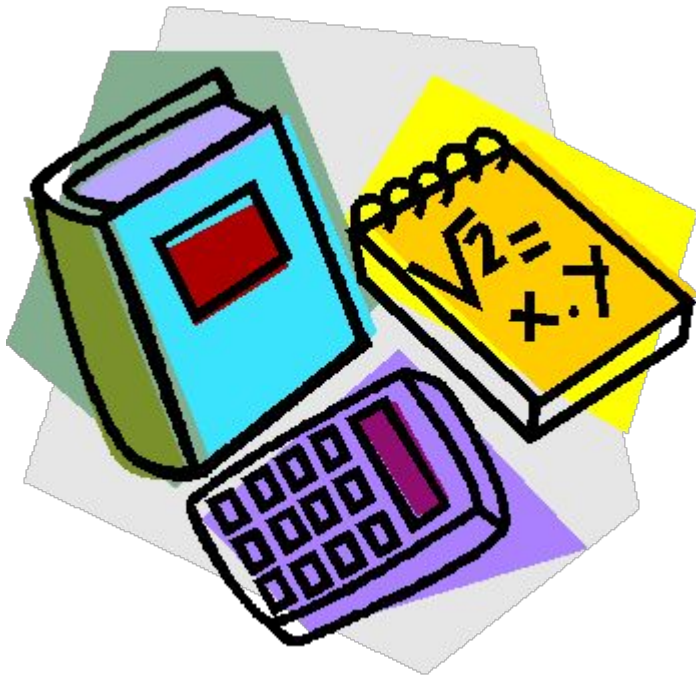
$U(r) = 0$; при $r = a/b$; $U(r)_{\min}$ при $r = 2, a/b = r_0$;

$F = 0$; $F(r)_{\max}$ при $r = r_1 = 3a/b$;

Ответ: $F(r)_{\max}$ при $r = r_1 = 3a/b$;



№2 Цепь с внешним сопротивлением $R = 0,9 \text{ Ом}$ питается от батареи из $k=36$ одинаковых источников, каждый из которых имеет ЭДС $E=2 \text{ В}$ и внутреннее сопротивление $r_0 = 0,4 \text{ Ом}$. Батарея включает n групп, соединенных параллельно, а в каждой из них содержится m последовательно соединенных аккумуляторов. При каких значениях m, n будет получена максимальная J во внешнем R .



Решение:

При последовательном соединении аккумуляторов $E_{гр} = m \cdot E$; $r_{гр} = r_0 \cdot m$;
а при параллельном соединении одинаковых $r_{бат} = r_0 m / n$; $E_{бат} = m \cdot E$,

По закону Ома $J = mE / (R + r_0 m / n) = mEn / (nR + r_0 m)$

Т.к. k – общее число аккумуляторов, то $k = mn$;

$J = kE / (nR + r_0 m) = kE / (nR + kr_0 / n)$;

Для нахождения условия при котором J тока в цепи максимальная исследую функцию $J = J(n)$ на экстремум взяв производную по n и приравняв ее к нулю.

$J' n - (kE(R - kr_0/n^2)) / (nR + kr_0/n)^2 = 0$;

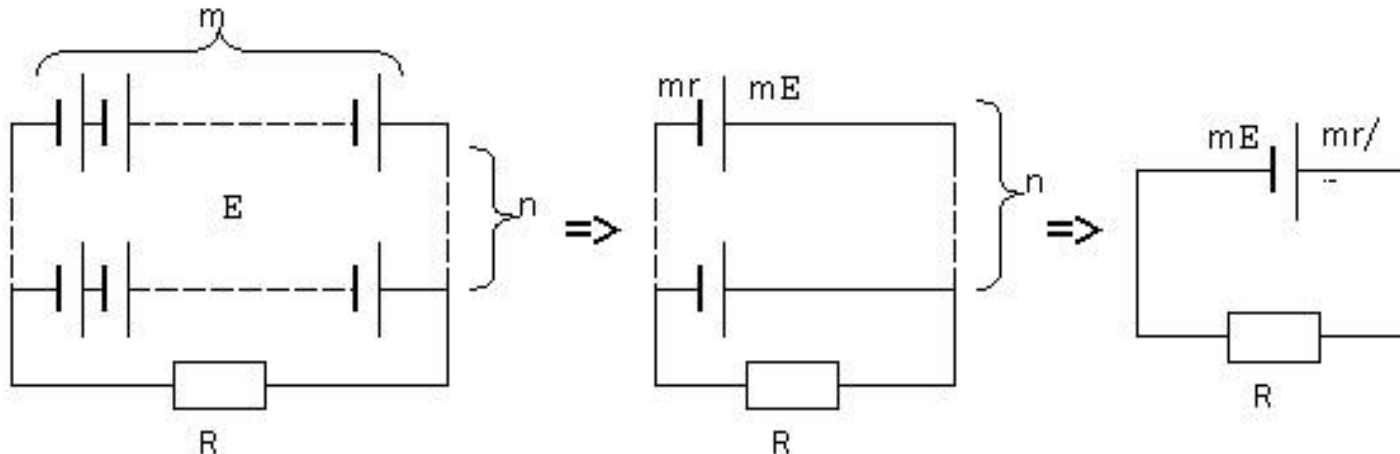
$$n^2 = \frac{kr}{R}$$

$$n = \sqrt{kr/R} = \sqrt{3,6 \cdot 0,4 / 0,9} = 4;$$

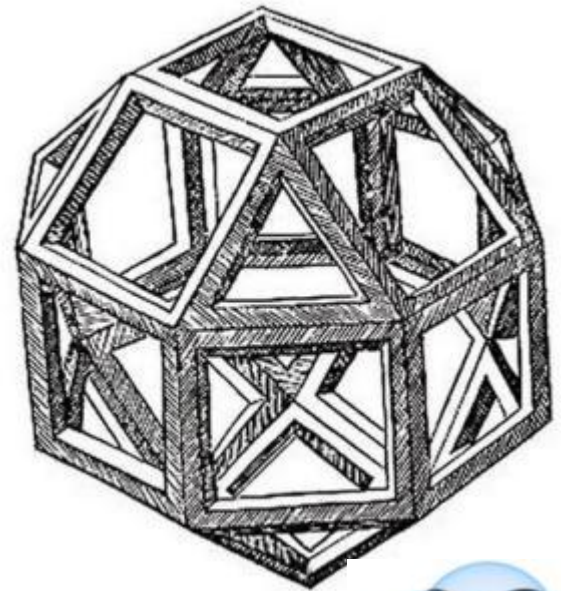
$$m = k/n = 36/4 = 9;$$

при этом $J_{max} = kE / (nR + mr_0) = 36 \cdot 2 / (4 \cdot 0,9 + 9 \cdot 0,4) = 10 \text{ A}$;

Ответ: $n = 4, m = 9$.



№3 Платформа массой M начинает двигаться вправо под действием постоянной силы F . Из неподвижного бункера на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна μ кг/с. Пренебрегая трением, найти зависимость от времени ускорения a платформы в процессе погрузки. Определить ускорение a_1 платформы в случае, если песок не насыпается на платформу, а из наполненной высыпается через отверстие в ее дне с постоянной скоростью μ кг/с.



Решение: Рассмотрим сначала случай, когда песок насыпается на платформу

Движение системы платформа-песок можно описать с помощью второго закона Ньютона:

$$dP/dt = F\Sigma$$

P – импульс системы платформа-песок, $F\Sigma$ – сила, действующая на систему платформа-песок.

Если через p обозначить импульс платформы, то можно написать:

$$dp/dt = F$$

Найдем изменение импульса платформы за бесконечно малый

промежуток времени Δt : $\Delta p = (M+\mu(t+\Delta t))(u+\Delta u) - (M+\mu t)u = F\Delta t$;

где u – скорость платформы.

Раскрыв скобки и, проведя сокращения получаем:

$$\Delta p = \mu u \Delta t + M \Delta u + \mu \Delta u t + \mu \Delta u \Delta t = F \Delta t$$

Разделим на Δt и перейдем к пределу $\Delta t \rightarrow 0$

$$M du/dt + \mu t du/dt + \mu u = F \quad \text{или} \quad d[(M+\mu t)u]/dt = F$$

Это уравнение можно проинтегрировать, считая начальную скорость платформы равной нулю: $(M+\mu t)u = Ft$.

Следовательно: $u = Ft/(M+\mu t)$

Тогда, ускорение платформы: $a = du/dt =$

$$= (F(M+\mu t) - Ft\mu) / (M+\mu t)^2 =$$

$$= FM / (M+\mu t)^2$$



Рассмотрим случай, когда песок высыпается из наполненной платформы.

Изменение импульса за малый промежуток времени:

$$\Delta p = (M - \mu(t + \Delta t))(u + \Delta u) + \mu \Delta t u - (M - \mu t)u = F \Delta t$$

Слагаемое $\mu \Delta t u$ есть импульс количества песка, которое высыпалось из платформы за время Δt . Тогда:

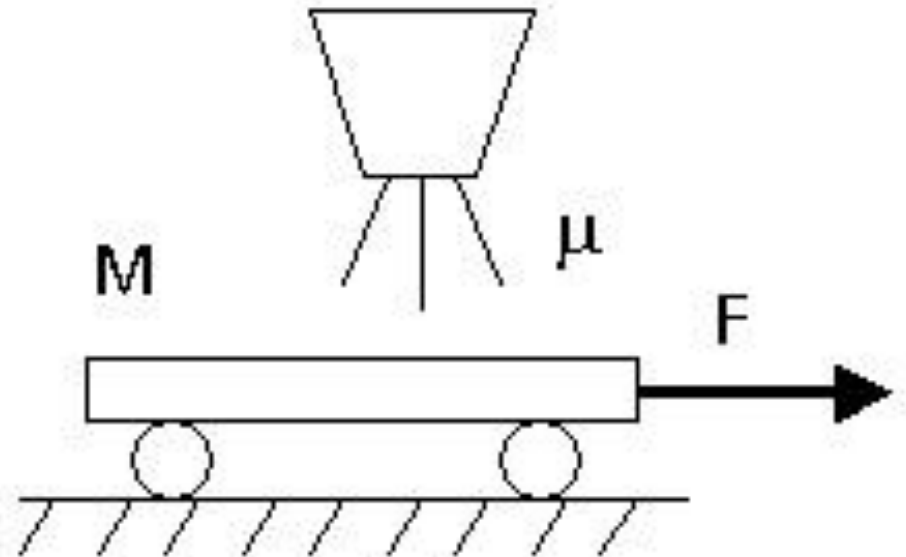
$$\Delta p = M \Delta u - \mu t \Delta u - \mu \Delta t \Delta u = F \Delta t$$

Разделим на Δt и перейдем к пределу $\Delta t \rightarrow 0$

$$(M - \mu t) du/dt = F$$

$$\text{Или } a_1 = du/dt = F / (M - \mu t)$$

$$\underline{\text{Ответ:}} \quad a = FM / (M + \mu t)^2, \quad a_1 = F / (M - \mu t)$$



Работа в классе

(решение номеров из сборника):

№ 1 Найти скорость движения материальной точки в конце 3-й секунды, если движение точки задано уравнением $s = t^2 - 11t + 30$.

№ 2 Точка движется прямолинейно по закону $s = 6t - t^2$. В какой момент ее скорость окажется равной нулю?

Два тела движутся прямолинейно: одно по закону $s = t^3 - t^2 - 27t$, 3 № другое — по закону $s = t^2 + 1$. Определить момент, когда скорости этих тел окажутся равными

№ 4 Для машины, движущейся со скоростью 30 м/с, тормозной путь определяется формулой $s(t) = 30t - 16t^2$, где $s(t)$ - путь в метрах, t - время торможения в секундах. В течении какого времени осуществляется торможение до полной остановки машины? Какое расстояние пройдет машина с начала торможения до полной ее остановки?



№5 Тело массой 8 кг движется прямолинейно по закону $s = 2t^2 + 3t - 1$. Найти кинетическую энергию тела ($mv^2/2$) через 3 секунды после начала движения.

Решение: Найдем скорость движения тела в любой момент времени:

$$V = ds / dt = 4t + 3$$

Вычислим скорость тела в момент времени $t = 3$:

$$V_{t=3} = 4 * 3 + 3 = 15 \text{ (м/с)}.$$

Определим кинетическую энергию тела в момент времени $t = 3$:

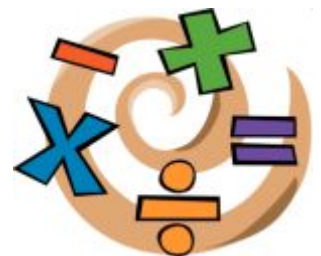
$$mv^2/2 = 8 * 15^2 / 2 = 900 \text{ (Дж)}.$$

№6 Найти кинетическую энергию тела через 4 с после начала движения, если его масса равна 25 кг, а закон движения имеет вид $s = 3t^2 - 1$.

№7 Тело, масса которого 30 кг, движется прямолинейно по закону $s = 4t^2 + t$. Доказать, что движение тела происходит под действием постоянной силы.

Решение: Имеем $s' = 8t + 1$, $s'' = 8$. Следовательно, $a(t) = 8 \text{ (м/с}^2\text{)}$, т. е.

при данном законе движения тело движется с постоянным ускорением 8 м/с². Далее, так как масса тела постоянна (30 кг), то по второму закону Ньютона действующая на него сила $F = ma = 30 * 8 = 240 \text{ (Н)}$ - также постоянная величина.

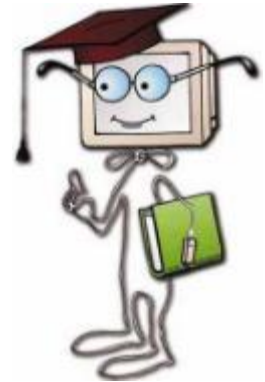


№8 Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $s(t)=t^3-3t^2+2$. Найти силу, действующую на тело в момент времени $t=4$ с.

№9 Материальная точка движется по закону $s=2t^3-6t^2+4t$. Найти ее ускорение в конце 3-й секунды.



ПРОВЕРЬ СЕБЯ!!!



Выполните самостоятельную работу

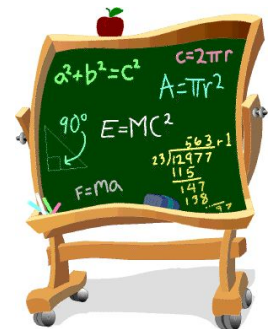
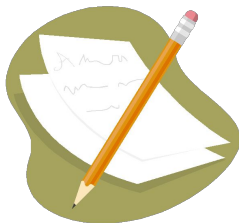
Найдите производные функций:

а) $y = \frac{\sin x}{x}$;

в) $y = (5x + 1)^7$.

б) $y = x \operatorname{ctg} x$;

Прямая $y = 2x$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 5x^2 + 9x + 3$. Найдите абсциссу точки касания.





Каким вопросам был посвящен урок?



Чему научились на уроке?



Какие теоретические факты обобщались на уроке?



*Какие рассмотренные задачи оказались наиболее сложными?
Почему?*



*Спасибо за
просмотр!*

До новых встреч!

Литература:

- Амелькин В.В., Садовский А.П. Математические модели и дифференциальные уравнения.- Минск: Высшая школа, 1982.-272с.
- Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987.-160с.
- Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.- Минск: Наука и техника, 1979.- 744с.
- Журнал «Потенциал» Ноябрь 2007 №11
- «Алгебра и начала анализа» 11 класс С.М. Никольский, М.К. Потапов и др.
- «Алгебра и математический анализ» Н.Я. Виленкин и др.
- «Математика» В.Т. Лисичкин, И.Л. Соловейчик 1991 год