Применение производных

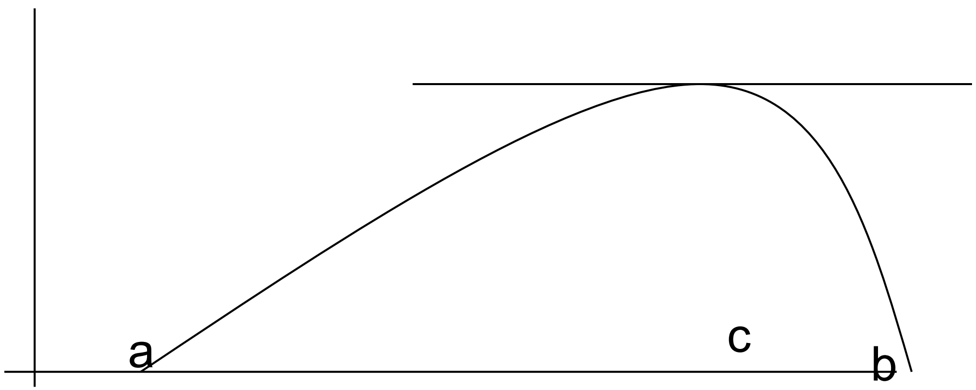
Лекция 6

Содержание

Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ферма.

Пусть $f(x)$ определена и дифференцируема на некотором интервале (a,b) и в точке $c \in (a,b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение. Тогда $f'(c)=0$.



Теорема Ролля.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и на концах отрезка $[a,b]$ принимает равные значения $f(a)=f(b)$. Тогда существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f'(c)=0$.

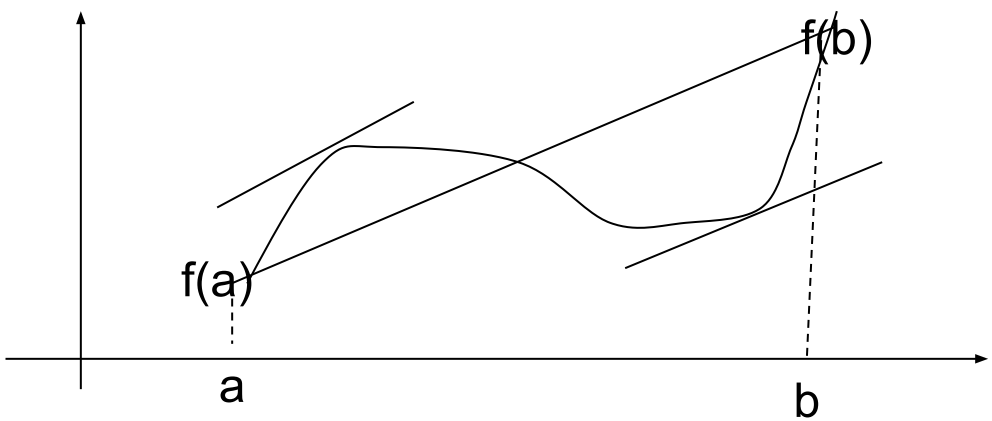
Теорема Лагранжа.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует точка $c\in(a,b)$ такая, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Геометрическая интерпретация

Из теоремы Лагранжа вытекает, что найдется точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна секущей, проходящей через точки (a, $f(a)$) и (b, $f(b)$).



Правило Лопиталя

Пусть в некоторой окрестности О точки $x = a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы всюду, кроме быть может самой точки $x = a$ и пусть $g'(x) \neq 0$ в О.

Правило Лопиталя

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются одновременно бесконечно малыми или бесконечно большими при $x \to a$ и при этом существует предел отношения их производных, то существует и предел отношения самих функций, причем

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Примеры.

Правило применимо и в случае, когда $a = \infty$.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}2}{\cos 3x\cdot 3} = 2/3.$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3} = \lim\dfrac{2\ln x}{3x^2x} = \dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^3} =$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{3x^2x} = 0.$$

ВГУЭС

Примеры

Найдем

$$\lim_{x\to 1}\sin(x-1)tg\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{ctg\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\dfrac{\pi}{2\sin^2\frac{\pi x}{2}}}=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\cos(x-1)\sin^2\frac{\pi x}{2}=-\frac{2}{\pi}.$$

Пример

Найдем $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$

Прологарифмируем это выражение и найдем предел.

$$\lim_{x\to 0}\sin x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cos x}=0.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}=1.$

Убывающие и возрастающие функции

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке (a,b), если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, $f(x_2) > f(x_1)$. Если же любым $x_1 < x_2$ соответствуют $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется убывающей на промежутке (a,b).

Теорема (Признак возрастания функции).

Если дифференцируемая функция возрастает на некотором промежутке, то производная этой функции неотрицательна на этом промежутке.

Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка, то функция возрастает на этом промежутке.

Теорема (Признак убывания функции).

Если дифференцируемая функция убывает на некотором промежутке, то ее производная не положительна на этом промежутке.

Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка, то функция убывает на этом промежутке.

Максимум и минимум функции

Определение. Говорят, что точка x_1 является точкой максимума функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполнено неравенство

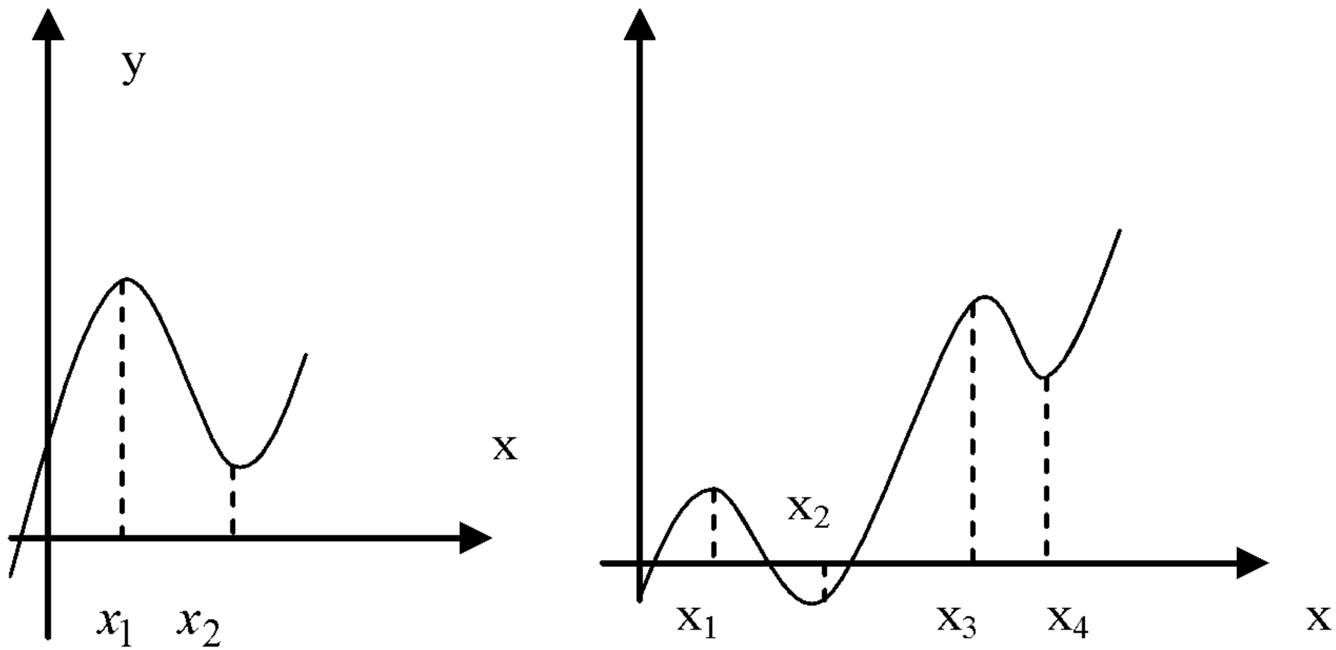
$f(x_1) > f(x) \quad (x \neq x_1)$.

Аналогично говорят, что точка x_2 является точкой минимума функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполнено неравенство $f(x_2) < f(x)(x \neq x_2)$.

Экстремум функции

Максимум $f(x_1)$ и минимум $f(x_2)$ функции называются экстремумами функции, а точки x_1 и x_2 - точками экстремума, точнее, локального экстремума, так как речь идет лишь о наибольшем или наименьшем внутри некоторой окрестности значениях функции

Экстремум функции



Здесь x_1, x_2, x_3, x_4 - точки локального экстремума функции.

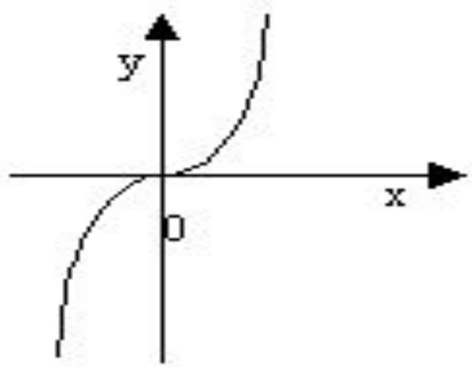
Необходимое условие экстремума

Теорема.

Если дифференцируемая функция имеет в точке c экстремум, то ее производная обращается в нуль в этой точке.

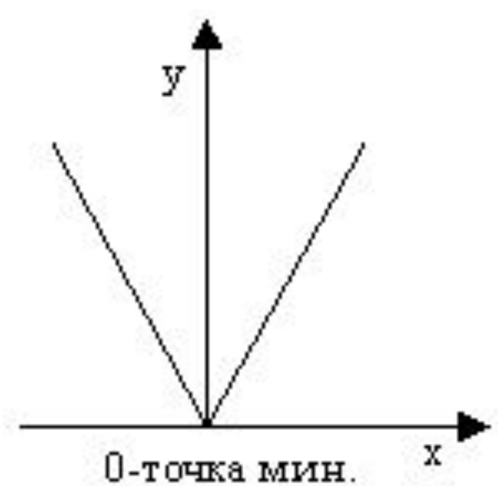
Экстремум функции

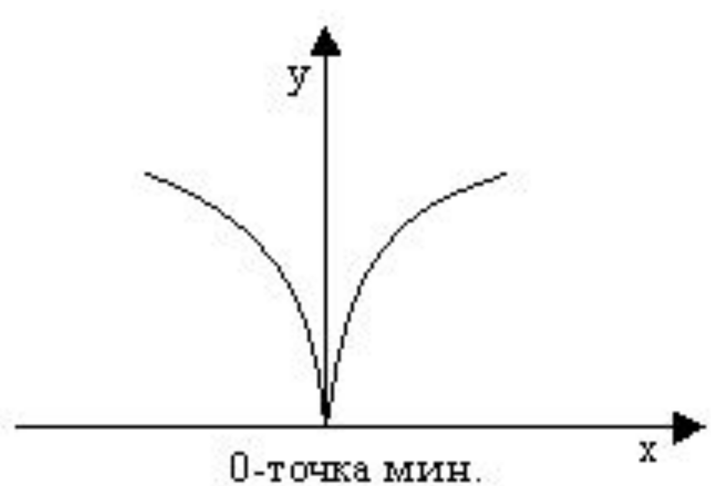
Замечание. Это условие не является достаточным условием экстремума, так как в точках, где $f'(x) = 0$, экстремума может и не быть. (Так, функция $y = x^3$ в точке $x = 0$ имеет производную $y' = 3x^2$, равную нулю, а экстремума в этой точке у нее нет.)



Продолжение

Кроме точек, где $y' = 0$, экстремумы могут быть в точках, где производная не существует или равна бесконечности





Критические точки

Определение. Точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю или не существует, называются критическими (т.е. точками возможного экстремума).

Критические точки

Пример. Найти критические точки функции $y = e^{x^2}$.

Решение. Найдем производную функции e^{x^2} и приравняем ее к нулю:

$y' = e^{x^2} \cdot 2x$. $e^{x^2} \cdot 2x = 0$ в точке

$x = 0 \ (e^{x^2} \neq 0)$.Следовательно, точка $x = 0$ критическая.

Теорема (Достаточное условие экстремума).

Если при переходе через точку возможного экстремума x_0 производная функции меняет знак, то в точке x_0 функция имеет экстремум, причем :

1) если производная меняет знак с + на – , то в точке x_0 функция имеет максимум;

2) если производная меняет знак с – на + , то в точке x_0 – минимум.

Найти экстремумы

$$y = 3x^5 - 5x^4$$

Приравняем производную к нулю:

$$y' = 15x^4 - 20x^3 = 5x^3(3x - 4)$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4/3.$$

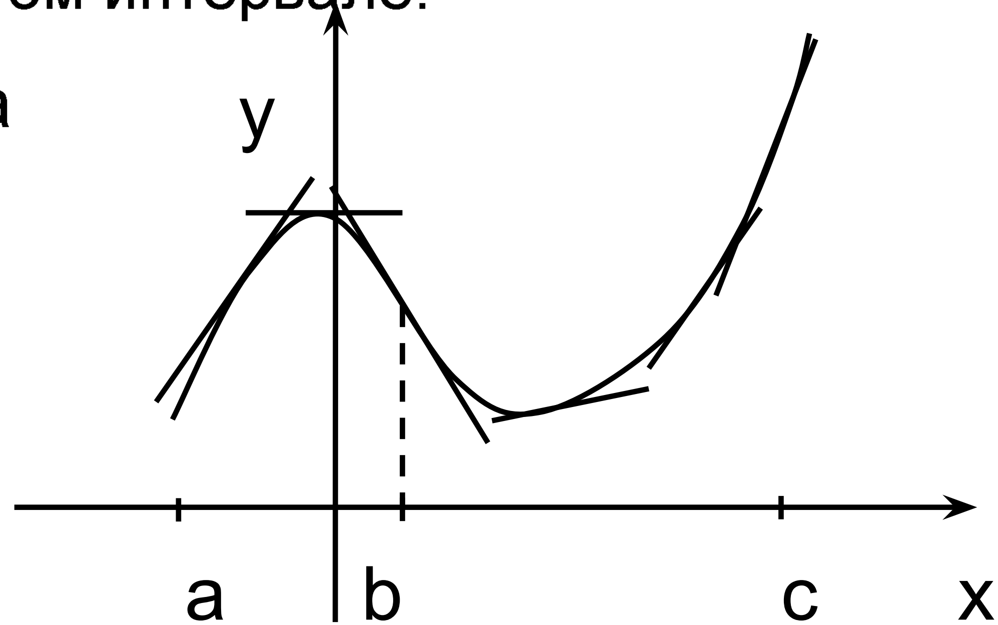
Проверим, меняет ли производная знаки при переходе через эти точки, для чего числовую ось разобьем точками 0 и 4/3 на интервалы (—∞, 0), (0, 4/3) и (4/3,∞) и найдем знаки y' в этих интервалах. В точке x = 0 имеем максимум, а в точке x = 4/3 – минимум.

max y = 0,. $\min y = 3 \cdot (4/3)^5 - 5(4/3)^4$

Выпуклость и вогнутость кривой

Определение. График функции *f*(x) называется выпуклым вниз на интервале (a,b), если все точки графика лежат выше любой его касательной на этом интервале.

На рис. показана кривая, выпуклая вверх на интервале (a,b) и выпуклая вниз на интервале (b,c).

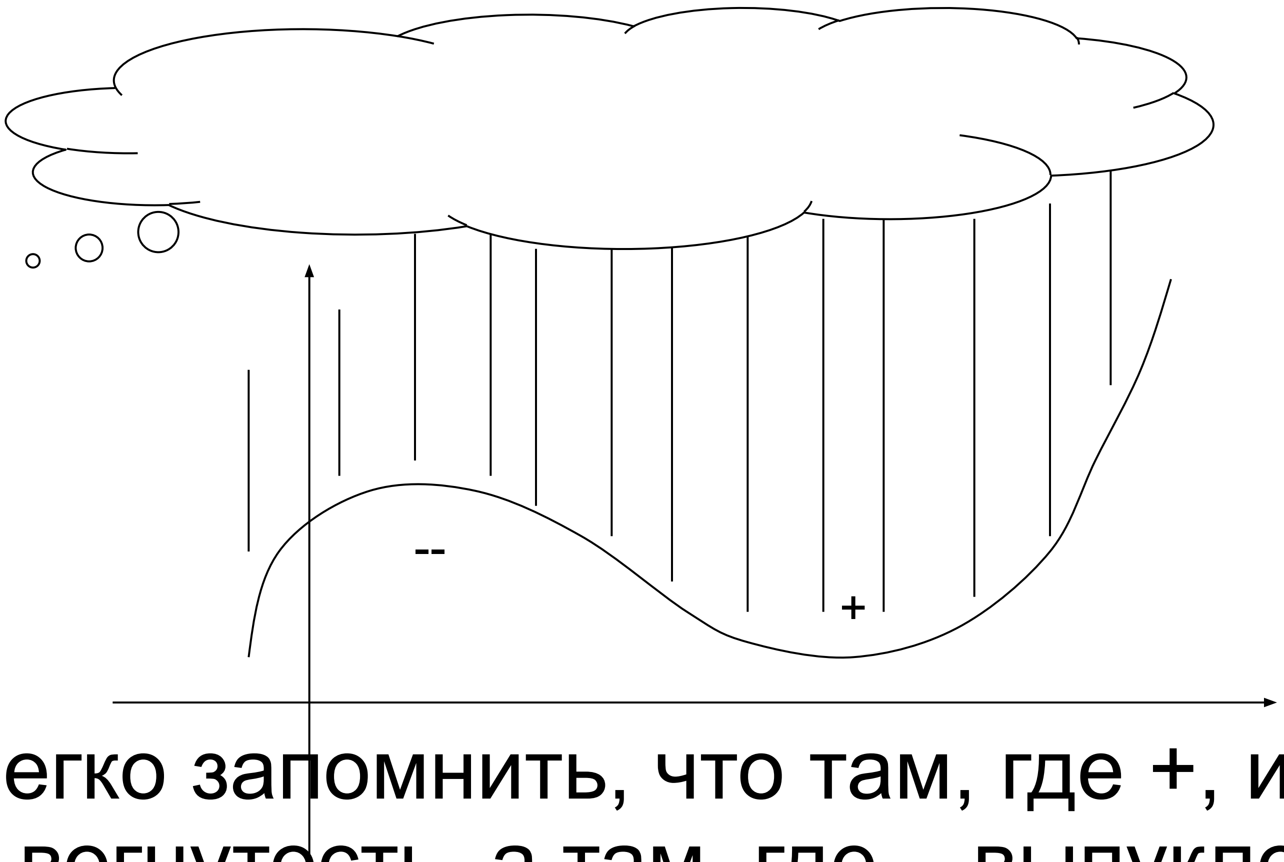


Достаточное условие выпуклости

Теорема. Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т.е. $f''(x)<0$, то график функции на этом интервале направлен выпуклостью вверх.

Если же вторая производная $f''(x)>0$ на интервале (a,b), то график функции на этом интервале направлен выпуклостью вниз.

Правило дождя



Легко запомнить, что там, где +, имеем вогнутость, а там, где – выпуклость.

Точка перегиба

Определение. Точкой перегиба графика непрерывной функции f(x) называется точка, при переходе через которую кривая меняет направление выпуклости.

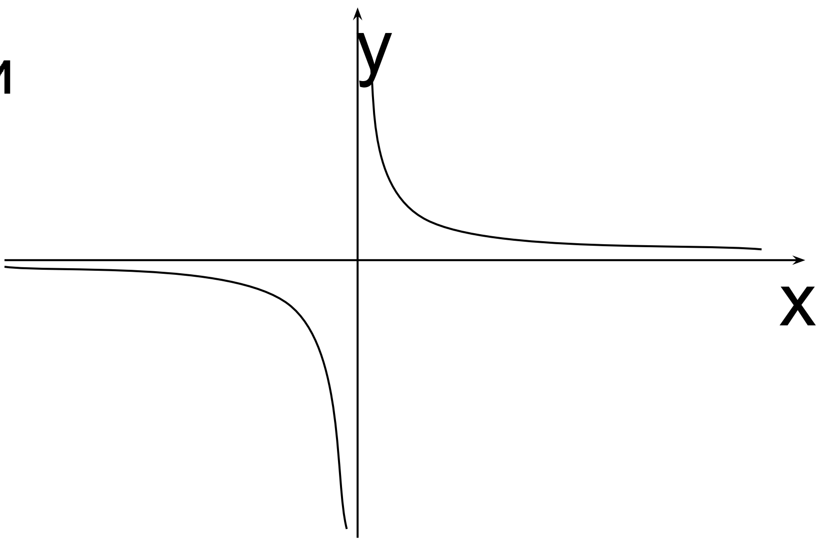
Достаточное условие перегиба кривой

Теорема. Если вторая производная функции $f(x)$, т.е. $f''(x)$, в некоторой точке x_0 обращается в нуль, а при переходе через эту точку меняет знак, то точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

Продолжение

Направление выпуклости функции может изменяться не только при переходе через точку перегиба, но и при переходе через точку разрыва.

Например, график функции $y = \frac{1}{x}$ при $x<0$ направлен выпуклостью вверх, а при $x>0$ – выпуклостью вниз.

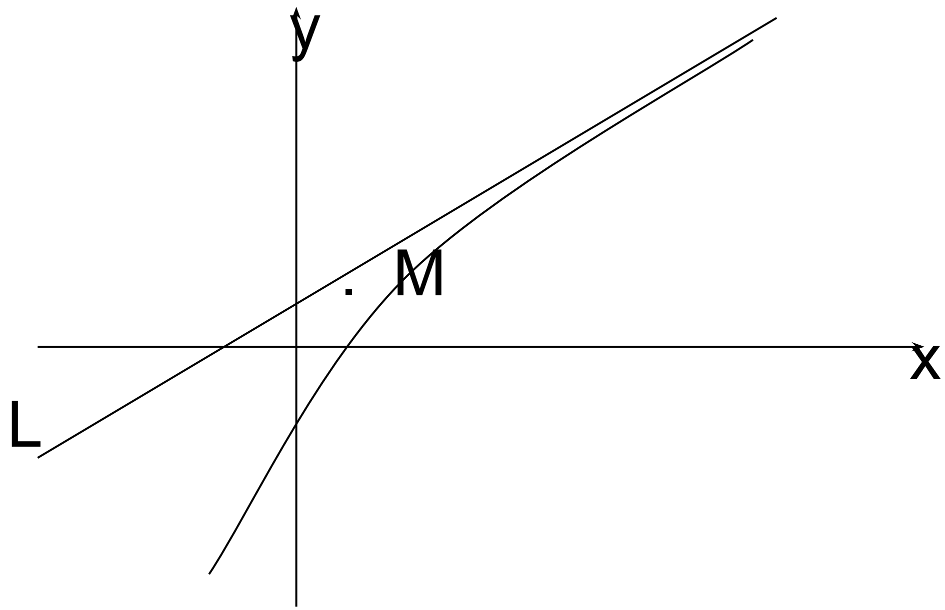


Асимптоты

При исследовании формы кривой приходится исследовать характер изменения функции при неограниченном возрастании (по абсолютной величине) абсциссы или ординаты переменной точки кривой.

Асимптоты кривой

Прямая называется *асимптотой* кривой, если при удалении точки М кривой в бесконечность по этой кривой расстояние от точки М до этой прямой стремится к нулю.



Если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$

или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$,

или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$,

то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой.

Пример

Функция y = $\frac{1}{x^2-4}$ в точках x = 2, очевидно, имеет бесконечный разрыв, поэтому прямые x = – 2 и x = 2 являются вертикальными асимптотами кривой y = $\frac{1}{x^2-4}$.

Наклонные асимптоты

Наклонные асимптоты задают уравнением $y = kx + b$, где угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый асимптотой на оси OY, ищут по формулам:

1) $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$

для правой асимптоты и

2) $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx)$ для левой асимптоты.

Общая схема исследования функции и построение графика

При решении этой задачи находят:

1. Область определения функции;

2. Выясняют, является функция четной или нечетной, периодической.

3. Находят нули функции и промежутки ее знакопостоянства;

4. Находят асимптоты вертикальные и наклонные.

5. Критические точки и интервалы монотонности;

6. Точки перегиба и интервалы выпуклости.

Общая схема исследования функции и построение графика

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ и построить ее график. Результаты наших исследований объединим в таблицу.

x	$(-\infty, 0)$	0	(0,1)	1	(1,3)	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	+		–	0	+
y''	–	0	+		+		+
y	⊐∩	Точка перегиба	∪⊐	Не существует	⊐∪	min	∪⊐

Общая схема исследования функции и построение графика

Строим график функции, предварительно построив асимптоты и отметив точки минимума, перегиба и пересечения графика с осями координат.