

14.5. ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

С помощью степенных рядов можно вычислять с различной степенью точности значения функций, значения определенных интегралов.

Рассмотрим это на конкретных примерах.

ПРИМЕР 1.

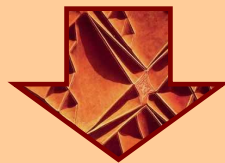
*Вычислить приближенно, с точностью
до 0,0001*

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e^3}}$$

РЕШЕНИЕ.

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e^3}} = e^{-\frac{3}{5}}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$



$$e^{-\frac{3}{5}} = 1 - \frac{3}{5} + \frac{3^2}{5^2 \cdot 2!} - \frac{3^3}{5^3 \cdot 3!} + \frac{3^4}{5^4 \cdot 4!} - \frac{3^5}{5^5 \cdot 5!} + \frac{3^6}{5^6 \cdot 6!} + \dots =$$

$$= 1 - 0.6 + 0.18 - 0.036 + 0.0054 - \\ - 0.000648 + 0.0000648 - \dots$$

По следствию из теоремы Лейбница погрешность при приближенном вычислении суммы сходящегося знакочередующегося ряда по абсолютной величине не превышает абсолютной величины первого отброшенного члена.

Т.об, взяв первые 6 членов ряда, мы допустим погрешность

$$|r_n| < 0.0000648 < 0.0001$$

Следовательно,

$$e^{-\frac{3}{5}} \approx 1 - 0.6 + 0.18 - 0.036 + 0.0054 - \\ - 0.000648 = 0.548752$$

ПРИМЕР 2.

*Вычислить приближенно, с точностью
до 0,0001*

$$\ln 0.8$$

РЕШЕНИЕ.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\ln 0.8 = \ln(-0.2 + 1) = |x = -0.2| =$$

$$= -0.2 - \frac{0.2^2}{2} - \frac{0.2^3}{3} - \frac{0.2^4}{4} - \frac{0.2^5}{5} - \dots =$$

$$= -(0.2 + 0.02 + 0.00266 + 0.0004 + 0.00008 + \dots)$$

Т.об, взяв первые 4 члена ряда, мы допустим погрешность $|r_n| < 0.00008 < 0.0001$

Следовательно,

$$\ln 0.8 \approx -(0.2 + 0.02 + 0.00266 + 0.0004) = -0.222306$$

ПРИМЕР 3.

*Вычислить приближенно, с точностью
до 0,0001*

$$\sin 20^{\circ}$$

РЕШЕНИЕ.

$$\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{9} &= \frac{\pi}{9} - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^5}{5!} - \dots = \\ &= 0.34907 - 0.00709 + 0.00004 - \dots \end{aligned}$$

Т.об, взяв первые 2 члена ряда, мы допустим погрешность $|r_n| < 0.00004 < 0.0001$

$$\sin \frac{\pi}{9} \approx 0.34907 - 0.00709 = 0.342$$

ПРИМЕР 4.

Вычислить приближенно

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$$

РЕШЕНИЕ.

Вычислить интеграл непосредственно здесь невозможно, т.к. интеграл «неберущийся».

Разложим подынтегральную функцию в ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sqrt{x} \cdot e^{-x} = \sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2!} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{3!} + \dots$$

Интервал $(0,1)$ входит в интервал сходимости данного ряда $(-\infty; +\infty)$

поэтому интегрируем почленно:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx &= \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} dx - \frac{1}{6} \int_0^1 x^{\frac{7}{2}} dx + \dots = \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} \Big|_0^1 + \dots = \\ &= 0.666667 - 0.4 + 0.14286 - 0.0374 + \dots \approx 0.38\end{aligned}$$