14.5. ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

С помощью степенных рядов можно вычислять с различной степенью точности значения функций, значения определенных интегралов.

Рассмотрим это на конкретных примерах.

ПРИМЕР 1.

Вычислить приближенно, с точностью до 0,0001

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e^3}}$$

РЕШЕНИЕ.

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e^3}} = e^{-\frac{3}{5}}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-\frac{3}{5}} = 1 - \frac{3}{5} + \frac{3^2}{5^2 \cdot 2!} - \frac{3^3}{5^3 \cdot 3!} + \frac{3^4}{5^4 \cdot 4!} - \frac{3^5}{5^5 \cdot 5!} + \frac{3^6}{5^6 \cdot 6!} + \ldots =$$

$$= 1 - 0.6 + 0.18 - 0.036 + 0.0054 -$$

$$- 0.000648 + 0.0000648 - \ldots$$

По следствию из теоремы Лейбница погрешность при приближенном вычислении суммы сходящегося знакочередующегося ряда по абсолютной величине не превышает абсолютной величины первого отброшенного члена.

Т.об, взяв первые 6 членов ряда, мы допустим погрешность

$$|r_n| < 0.0000648 < 0.0001$$

Следовательно,

$$e^{-\frac{3}{5}} \approx 1 - 0.6 + 0.18 - 0.036 + 0.0054 -$$

$$- 0.000648 = 0.548752$$

ПРИМЕР 2.

Вычислить приближенно, с точностью до 0,0001

$$\ln 0.8$$

РЕШЕНИЕ.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\ln 0.8 = \ln(-0.2+1) = \left| x = -0.2 \right| =$$

$$= -0.2 - \frac{0.2^2}{2} - \frac{0.2^3}{3} - \frac{0.2^4}{4} - \frac{0.2^5}{5} - \dots =$$

$$= -(0.2 + 0.02 + 0.00266 + 0.0004 + 0.00008 + \dots)$$

Т.об, взяв первые 4 члена ряда, мы допустим погрешность $\left| r_n \right| < 0.00008 < 0.0001$

Следовательно,

$$\ln 0.8 \approx -(0.2 + 0.02 + 0.00266 + 0.0004) = -0.222306$$

ПРИМЕР 3.

Вычислить приближенно, с точностью до 0,0001

$$\sin 20^0$$

РЕШЕНИЕ.

$$\sin 20^0 = \sin\frac{\pi}{9}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\sin\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^5}{5!} - \ldots =$$

$$= 0.34907 - 0.00709 + 0.00004 - \ldots$$

Т.об, взяв первые 2 члена ряда, мы допустим погрешность $|r_n| < 0.00004 < 0.0001$

$$\sin\frac{\pi}{9} \approx 0.34907 - 0.00709 = 0.342$$

ПРИМЕР 4.

Вычислить приближенно

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$$

РЕШЕНИЕ.

Вычислить интеграл непосредственно здесь невозможно, т.к. интеграл «неберущийся».

Разложим подынтегральную функцию в ряд:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\ldots$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^{2}}{2!}-\frac{x^{3}}{3!}+\ldots$$

$$\sqrt{x}\cdot e^{-x}=\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2!}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{3!}+\ldots$$

Интервал (0,1) входит в интервал сходимости данного ряда $(-\infty;+\infty)$

поэтому интегрируем почленно:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\cdot e^{-x}dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx - \frac{1}{6}\int_0^1 x^{\frac{7}{2}}dx + \ldots =$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}\Big|_0^1 + \ldots =$$

$$= 0.66667 - 0.4 + 0.14286 - 0.0374 + \ldots \approx 0.38$$